Física

para la ciencia y la tecnología

6ª edición

Tipler | Mosca

Volumen 2

Electricidad y magnetismo/Luz

EDITORIAL REVERTÉ

Prefijos de potencias de 10*

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
$\mathbf{10^{9}}$	giga	G
$\mathbf{10^{6}}$	mega	M
$\mathbf{10^{3}}$	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
$\mathbf{10^{-2}}$	centi	c
$\mathbf{10^{-3}}$	mili	m
$\mathbf{10^{-6}}$	micro	μ
$\mathbf{10^{-9}}$	nano	n
$\mathbf{10^{-12}}$	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

* Los prefijos más habituales están en azul.

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Ny	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Ómicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ, ε	Rho	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Phi	Φ	ϕ
Kappa	K	κ	Ji	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
My	M	μ	Omega	Ω	ω

Datos terrestres y datos astronómicos*

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g	$9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 32{,}2\ \mathrm{ft/s^2}$
Radio de la Tierra	R_T	6371 km = 3959 mi
Masa de la Tierra	M_T	$5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Masa del Sol		$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Masa de la Luna		$7{,}35 \times 10^{22}$ kg
Velocidad de escape en la superficie de la Tierra		11,2 km/s = 6,95 mi/s
Temperatura y presión normales (C.N.)		0 °C = 273,15 K 1 atm = 101,3 kPa
Distancia Tierra-Luna†		$3{,}84 \times 10^{8}$ m = $2{,}39 \times 10^{5}$ mi
Distancia Tierra-Sol (media)†		$1{,}50 \times 10^{11}$ m = $9{,}30 \times 10^{7}$ mi
Velocidad del sonido en aire seco (a C.N.)		331 m/s
Velocidad del sonido en aire seco (20 °C, 1 atm)		343 m/s
Densidad del aire (C.N.)		$1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$
Densidad de aire seco (20 °C, 1 atm)		$1{,}20\ \mathrm{kg/m^3}$
Densidad del agua (4 °C, 1 atm)		$1000\ \mathrm{kg/m^3}$
Calor de fusión del H_2O (0 °C, 1 atm)	L_f	333,5 kJ/kg
Calor de vaporización del H_2O (100 °C, 1 atm)	L_v	2,257 MJ/kg

* Otros datos sobre el sistema solar se pueden encontrar en el Apéndice B y en http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html.
† De centro a centro.

Símbolos matemáticos

$=$	es igual a
$\equiv$	es equivalente a
$\neq$	no es igual a
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\sim$	es del orden de
$\propto$	es proporcional a
$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$>>$	es mucho mayor que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que
$<<$	es mucho menor que
Δx	variación o incremento de x
dx	variación diferencial en x
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
$\lvert \vec{v} \rvert$	valor absoluto de $\vec{v}$
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots1$
Σ	suma
lim	límite
$\Delta t \to 0$	Δt tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de x respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x respecto a t
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$	integral definida $= F(x)\Big\rvert_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$

Abreviaturas de unidades

A	ampère	H	henry	nm	nanómetro (10^{-9} m)
Å	ángstrom (10^{-10} m)	h	hora	pt	pinta
atm	atmósfera	Hz	hertz	qt	quart
Btu	unidad térmica inglesa	in	pulgada	rev	revolución
Bq	becquerel	J	joule	R	roentgen
C	coulomb	K	kelvin	Sv	sievert
°C	grados centígrados	kg	kilogramo	s	segundo
cal	caloría	km	kilómetro	T	tesla
Ci	curie	keV	kilo-electronvolt	u	unidad de masa unificada
cm	centímetro	lb	libra	V	volt
dyn	dina	L	litro	W	watt
eV	electronvolt	m	metro	Wb	weber
°F	grados Fahrenheit	MeV	mega-electronvolt	y	año
fm	femtometro, fermi (10^{-15} m)	Mm	megametro (10^6 m)	yd	yarda
ft	pie	mi	milla	μm	micrometro (10^{-6} m)
Gm	gigametro (10^9 m)	min	minuto	μs	microsegundo
G	gauss	mm	milímetro	μC	microcoulomb
Gy	gray	ms	milisegundo	Ω	ohm
g	gramo	N	newton		

Factores de conversión

Longitud

1 m = 39,37 in = 3,281 ft = 1,094 yd

1 m = 10^{15} fm = 10^{10} Å = 10^9 nm

1 km = 0,6214 mi

1 mi = 5280 ft = 1,609 km

1 año-luz= 1 $c \cdot$ a = 9,461 × 10^{15} m

1 in = 2,540 cm

Volumen

1 L = 10^3 cm³ = 10^{-3} m³ = 1,057 qt

Tiempo

1 h = 3600 s = 3,6 ks

1 a = 365,24 d = 3,156 × 10^7 s

Velocidad

1 km/h = 0,278 m/s = 0,6214 mi/h

1 ft/s = 0,3048 m/s = 0,6818 mi/h

Ángulo y velocidad angular

1 rev = 2π rad = 360°

1 rad = 57,30°

1 rev/min = 0,1047 rad/s

Fuerza–presión

1 N = 10^5 dina = 0,2248 lb

1 lb = 4,448 N

1 atm = 101,3 kPa = 1,013 bar = 76,00 cmHg = 14,70 lb/in²

Masa

1 u = $[(10^{-3}\ \text{mol}^{-1})/N_A]$ kg = 1,661 × 10^{-27} kg

1 tonelada = 10^3 kg = 1 Mg

1 slug = 14,59 kg

1 kg ≈ 2,205 lb

Energía–Potencia

1 J = 10^7 erg = 0,7376 ft · lb = 9,869 × 10^{-3} atm · L

1 kW · h = 3,6 MJ

1 cal = 4,184 J = 4,129 × 10^{-2} atm · L

1 atm · L = 101,325 J = 24,22 cal

1 eV = 1,602 × 10^{-19} J

1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1054 J

1 caballo de vapor = 550 ft · lb/s = 746 W

Conductividad térmica

1 W/(m · K) = 6,938 Btu · in/(h · ft² · °F)

Campo magnético

1 T = 10^4 G

Viscosidad

1 Pa · s = 10 poise

106

SEXTA EDICIÓN

FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

VOLUMEN 2

Electricidad y magnetismo/Luz

SEXTA EDICIÓN

FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

VOLUMEN 2
Electricidad y magnetismo/Luz

Paul A. Tipler
Gene Mosca



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México

Registro bibliográfico (ISBD)

Tipler, Paul A.

[Physics for scientists and engineers. Español]

Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo, luz / Paul A. Tipler, Gene Mosca ; coordinador y traductor: José Casas-Vázquez; traductores: Albert Bramon Planas... [et al.]. – Barcelona : Reverté, 2010.

XXII , P. 693-1172 , [9] p. : il. col. ; 27 cm.

Índice.

DL B-25923-2010. – ISBN 978-84-291-4430-7

1. Física. I. Mosca. Gene, coaut. II. Casas-Vázquez, José, coord., trad. III. Bramon Planas, Albert, trad. IV. Título.

53

Título de la obra original:

Physics for Scientists and Engineers, Sixth Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por

W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke

41 Madison Avenue, New York (NY) – U.S.A.

Edición en español:

ISBN: 978-84-291-4430-7 Volumen 2

ISBN: 978-84-291-4428-4 Obra completa

Versión española:

COORDINADOR Y TRADUCTOR

Dr. José Casas-Vázquez
Catedrático de Física de la Materia Condensada

TRADUCTORES

Dr. Albert Bramon Planas
Catedrático de Física Teórica

Dr. Josep Enric Llebot Rabagliati
Catedrático de Física de la Materia Condensada

Dr. Fernando M. López Aguilar
Catedrático de Física Aplicada

Dr. Vicenç Méndez López
Profesor Agregado de Física de la Materia Condensada

Departamento de Física
Universidad Autónoma de Barcelona
España

MAQUETACIÓN: REVERTÉ-AGUILAR
CORRECCIÓN DE ESTILO: CARLOS CISTUÉ SOLÁ

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
08029 Barcelona. ESPAÑA
reverte@reverte.com

www.reverte.com

Impreso en España - *Printed in Spain*

Depósito Legal: B-25923-2010
Impresión y encuadernación: Liberdúplex, S.L.U.

PT: Para Claudia

GM: Para Vivian

Índice abreviado de la obra completa

VOLUMEN 1

Volumen 1A



Thinkstock/Alamy

PARTE I MECÁNICA

Volumen 1B

PARTE II OSCILACIONES Y ONDAS

Volumen 1C

PARTE III TERMODINÁMICA

VOLUMEN 2

Volumen 2A

PARTE IV ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Volumen 2B

PARTE V LUZ

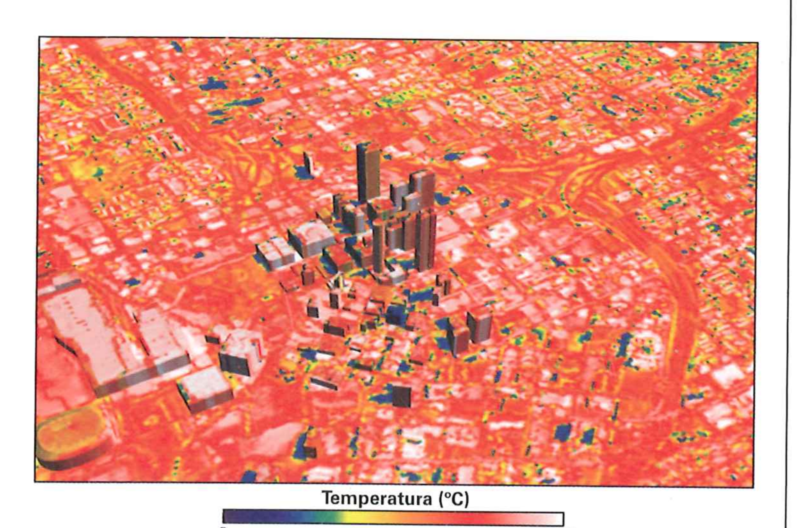
FÍSICA MODERNA

PARTE VI MECÁNICA CUÁNTICA, RELATIVIDAD Y ESTRUCTURA DE LA MATERIA

APÉNDICES Y RESPUESTAS

Índice analítico

Volumen 2



NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio

Capítulo 23
POTENCIAL ELÉCTRICO / 763

Capítulo 24
CAPACIDAD / 801

Capítulo 25
CORRIENTE ELÉCTRICA Y CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA / 839

Capítulo 26
EL CAMPO MAGNÉTICO / 887

Capítulo 27
FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO / 917

Capítulo 28
INDUCCIÓN MAGNÉTICA / 959

Prefacio

La sexta edición de *Física para la ciencia y la tecnología* presenta un texto y herramientas *online* completamente integrados que ayudarán a los estudiantes a aprender de un modo más eficaz y que permitirá a los profesores adaptar sus clases para enseñar de un modo más eficiente.

El texto incluye un nuevo enfoque estratégico de resolución de problemas, un apéndice de matemáticas integrado y nuevas herramientas para mejorar la comprensión conceptual. Los nuevos temas de actualidad en física destacan temas innovadores que ayudan a los estudiantes a relacionar lo que aprenden con las tecnologías del mundo real.

CARACTERÍSTICAS CLAVE



ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En la sexta edición destaca una nueva estrategia de resolución de problemas en la que los Ejemplos siguen un formato sistemático de **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación**. Este formato conduce a los estudiantes a través de los pasos implicados en el análisis del problema, la resolución del problema y la comprobación de sus respuestas. Los Ejemplos a menudo incluyen útiles secciones de **Observación** que presentan formas alternativas de resolución de problemas, hechos interesantes, o información adicional relativa a los conceptos presentados. Siempre que se considera necesario, los Ejemplos van seguidos de **Problemas Prácticos** para que los estudiantes puedan evaluar su dominio de los conceptos.

En esta edición, las etapas de resolución de problemas siguen contando con las ecuaciones necesarias al lado, de manera que a los estudiantes les resulte más fácil seguir el razonamiento.

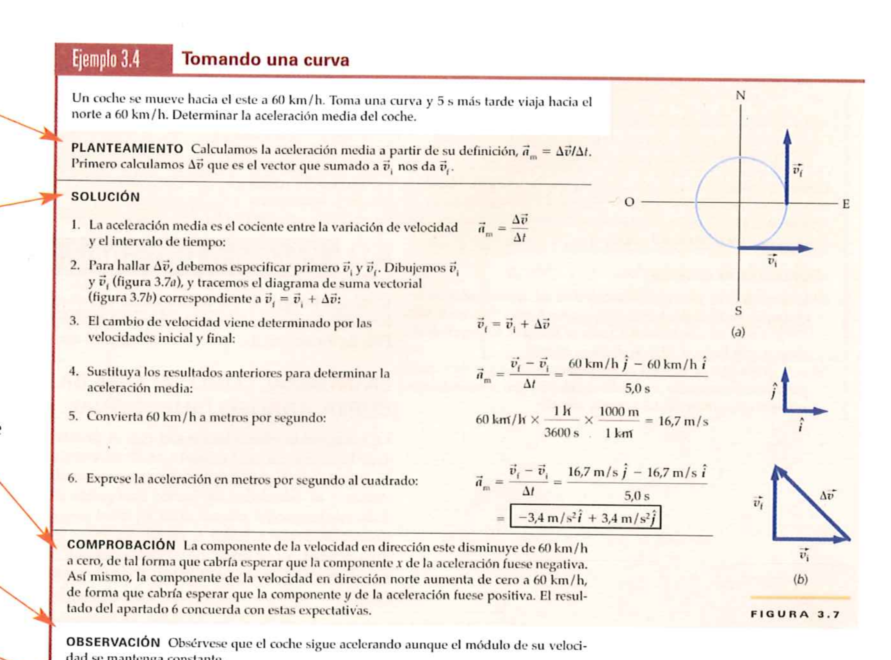
Después de cada enunciado del problema, los estudiantes van al **Planteamiento** del problema. Aquí, el problema se analiza tanto conceptualmente como visualmente.

En la sección **Solución**, cada paso de la solución se presenta con un enunciado escrito en la columna de la izquierda y las ecuaciones matemáticas correspondientes en la columna de la derecha.

La **Comprobación** recuerda a los estudiantes que han de verificar que sus resultados son precisos y razonables.

La **Observación** sugiere una forma distinta de enfocar un ejemplo o da información adicional relevante para el ejemplo.

A la solución le sigue normalmente un **Problema Práctico**, lo que permite a los estudiantes comprobar su comprensión. Al final del capítulo se incluyen las respuestas para facilitar una comprobación inmediata.



Ejemplo 3.4 Tomando una curva

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

PLANTEAMIENTO Calculamos la aceleración media a partir de su definición, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Primero calculamos $\Delta\vec{v}$ que es el vector que sumado a $\vec{v}_i$ nos da $\vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo: $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
2. Para hallar $\Delta\vec{v}$, debemos especificar primero $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$. Dibujemos $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$ (figura 3.7*a*), y tracemos el diagrama de suma vectorial (figura 3.7*b*) correspondiente a $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$:
3. El cambio de velocidad viene determinado por las velocidades inicial y final: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$
4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{60\ \text{km/h}\ \hat{j} - 60\ \text{km/h}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}}$
5. Convierta 60 km/h a metros por segundo: $60\ \text{km/h} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 16{,}7\ \text{m/s}$
6. Exprese la aceleración en metros por segundo al cuadrado: $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{j} - 16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}} = \boxed{-3{,}4\ \text{m/s}^2\hat{i} + 3{,}4\ \text{m/s}^2\hat{j}}$

COMPROBACIÓN La componente de la velocidad en dirección este disminuye de 60 km/h a cero, de tal forma que cabría esperar que la componente *x* de la aceleración fuese negativa. Así mismo, la componente de la velocidad en dirección norte aumenta de cero a 60 km/h, de forma que cabría esperar que la componente *y* de la aceleración fuese positiva. El resultado del apartado 6 concuerda con estas expectativas.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el coche sigue acelerando aunque el módulo de su velocidad se mantenga constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.1 Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media.

FIGURA 3.7

En casi todos los capítulos se incluye un recuadro llamado **Estrategia de resolución de problemas** para reforzar el formato **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación** para solucionar satisfactoriamente los problemas.

> ***ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS***
>
> ***Velocidad relativa***
>
> **PLANTEAMIENTO** El primer paso para la resolución de problemas de velocidad relativa es identificar y marcar los sistemas de referencia relevantes. Aquí les llamaremos sistema de referencia A y B.
>
> **SOLUCIÓN**
>
> 1. Utilizando $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ (ecuación 3.9), relacione la velocidad del objeto móvil (partícula p) relativa al sistema A con la velocidad de la partícula relativa al sistema B.
> 2. Trace un diagrama de suma vectorial para la ecuación $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$. Incluya ejes de coordenadas en el dibujo.
> 3. Calcule la incógnita en cuestión. Utilice la trigonometría cuando sea necesario.
>
> **COMPROBACIÓN** Asegúrese de que obtiene la velocidad o posición del cuerpo respecto del sistema de referencia correcto.



APÉNDICE DE MATEMÁTICAS INTEGRADO

Esta edición ha mejorado el apoyo matemático a los estudiantes que estudian Matemáticas al mismo tiempo que introducción a la Física o a los estudiantes que requieren repasar las Matemáticas.

El **Apéndice de Matemáticas completo**

- revisa resultados básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo,
- relaciona conceptos matemáticos con conceptos físicos del libro,
- proporciona Ejemplos y Problemas Prácticos para que los estudiantes puedan comprobar su comprensión de los conceptos matemáticos.

Ejemplo M.13 Desintegración radiactiva del cobalto-60

El período de semidesintegración del cobalto-60 (^{60}Co) es 5,27 años. A $t = 0$ se tiene una muestra de ^{60}Co de masa 1,20 mg. ¿Cuánto tiempo t (en años) habrá de transcurrir para que 0,400 mg de la muestra de ^{60}Co se hayan desintegrado?

PLANTEAMIENTO En la deducción del período de semidesintegración pusimos $N/N_0 = 1/2$. En este ejemplo, hemos de hallar el tiempo de permanencia de dos tercios de la muestra, es decir, cuando la fracción N/N_0 sea de 0,667.

SOLUCIÓN

1. Expresar la fracción N/N_0 como una función exponencial: $\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$
2. Obtener los valores recíprocos de ambos miembros: $\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$
3. Despejar t: $t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$
4. La constante de desintegración está relacionada con el período de semidesintegración por medio de $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (ecuación M.70). Sustituir $(\ln 2)/t_{1/2}$ por λ y calcular el tiempo: $t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ años} = 3{,}08 \text{ años}$

COMPROBACIÓN Para que la masa de una muestra de ^{60}Co decreciese hasta el 50% de su masa inicial habrían de transcurrir 5,27 años. Por lo tanto, es de esperar que la muestra tardase menos de 5,27 años para perder el 33,3% de su masa. Por tanto, el resultado obtenido (3,08 años), concuerda con lo esperado.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

27. La constante de tiempo de descarga de un condensador en ur que tarda el condensador en descargarse hasta e^{-1} (o sea 0,368) $\tau = 1$ s para un condensador, ¿cuánto tiempo t (en segundos) descargarse hasta el 50% de su carga inicial?
28. Si la población de coyotes en un determinado lugar está creci por década y continúa creciendo al mismo ritmo indefinidamen canzará una población 1,5 veces la actual?

M.12 CÁLCULO INTEGRAL

El **cálculo integral** se puede considerar el inverso del cálculo diferencial. Si una función $f(t)$ se integra, se obtiene una función $F(t)$, de forma que $f(t)$ es la derivada de $F(t)$ con respecto a t.

LA INTEGRAL COMO UN ÁREA BAJO UNA CURVA. ANÁLISIS DIMENSIONAL

La integración está relacionada con el problema de hallar el área bajo una curva. La figura M.27 muestra una función $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula en un punto cualquiera del intervalo Δt_i. Esta aproximación mejora si Δt_i es muy pequeño. Se halla el área total desde t_1 hasta t_2 sumando todos los elementos de área desde t_1 a t_2 y tomando el límite cuando Δt_i tiende a cero. Este límite se denomina la **integral** de f extendida al intervalo t_1, t_2 y se escribe

$$\int f\,dt = \text{área}_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \text{M.74}$$

Las dimensiones físicas de una integral de una función $f(t)$ se hallan multiplicando las dimensiones del integrando (la función que se ha de integrar) por las dimensiones de la variable de in-

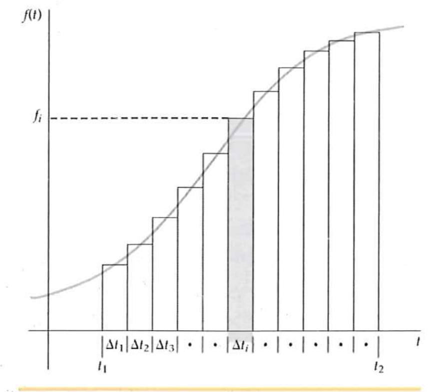


FIGURA M.27 Función general $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula para un punto cualquiera del intervalo.

Además, las notas al margen permiten a los estudiantes ver fácilmente la relación entre los conceptos físicos del texto y los conceptos matemáticos.



Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Cálculo diferencial



PEDAGOGÍA PARA ASEGURAR LA COMPRENSIÓN CONCEPTUAL

Se han añadido herramientas prácticas para los estudiantes para facilitar un mejor comprensión conceptual de la física.

- Se han introducido nuevos **Ejemplos conceptuales**, para ayudar a los estudiantes a comprender en profundidad conceptos físicos esenciales. Estos ejemplos utilizan la estrategia **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación**, de modo que los estudiantes no sólo obtienen una comprensión conceptual básica sino que tienen que evaluar sus respuestas.

Ejemplo 8.12 Colisiones con masilla *Conceptual*

María tiene dos bolas de la misma masa, una bola de masilla y otra de goma. Lanza la bola de masilla contra un bloque suspendido por dos cuerdas como se muestra en la figura 8.20. La bola impacta contra el bloque y cae al suelo. Como consecuencia, el bloque asciende hasta una altura máxima h. Si hubiera lanzado la bola de goma con la misma velocidad, ¿el bloque habría ascendido a una altura mayor que h? La goma, a diferencia de la masilla, es elástica y hubiera rebotado contra el bloque.

PLANTEAMIENTO Durante el impacto, el cambio de momento del sistema bola-bloque es cero. Cuanto mayor es el cambio de momento de la bola, mayor será el cambio de momento del bloque. ¿Aumenta más el cambio de momento de la bola si rebota en el bloque que si no lo hace?

SOLUCIÓN

La bola de masilla pierde una fracción importante de su momento inicial. La bola de goma perdería todo el momento inicial para ganar momento en la dirección opuesta. Por tanto, la bola de goma perdería mayor cantidad de momento que la bola de masilla.

El bloque ascendería hasta una mayor altura después de ser impactado con la bola de goma que si hubiese sido impactado por la bola de masilla.

FIGURA 8.20

COMPROBACIÓN El bloque ejerce un impulso hacia atrás sobre la bola de masilla hasta hacerla parar. El mismo impulso hace detener la bola de goma, pero además el bloque ejerce un impulso adicional que la hacer retroceder. Así, el bloque ejerce un mayor impulso sobre la bola de goma que sobre la de masilla. Según la tercera ley de Newton, el impulso de la bola sobre el bloque es igual y opuesto al impulso del bloque sobre la bola. Entonces, la bola de goma ejerce un impulso mayor sobre el bloque confiriéndole un mayor cambio de momento.

- Las nuevas **Comprobaciones de conceptos** facilitan a los estudiantes comprobar su comprensión conceptual de conceptos físicos mientras leen los capítulos. Las respuestas están situadas al final de cada capítulo para permitir una comprobación inmediata. Las comprobaciones de conceptos se colocan cerca de temas relevantes, de modo que los estudiantes puedan releer inmediatamente cualquier material que no comprendan del todo.

- Los nuevos **avisos de errores frecuentes**, identificados mediante signos de exclamación, ayudan a los estudiantes a evitar errores habituales. Estos avisos están situados cerca de los temas que habitualmente causan confusión, de manera que los estudiantes puedan resolver de inmediato cualquier dificultad.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.1

La figura 3.9 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo t_6, cuando se halla momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su descenso. En la parte de su ascenso mostrada en el esquema, la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (a) en el instante t_6 y (b) en el instante t_9.

donde U_0, la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Por ejemplo, si a la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se le asigna un valor igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos asignar el valor cero de energía potencial al momento en que el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, donde y es la distancia del esquiador respecto al punto P.

Tenemos libertad para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia.



TEMAS DE ACTUALIDAD EN FÍSICA

Los **temas de actualidad en Física**, que aparecen al final de ciertos capítulos, tratan de aplicaciones actuales de la Física y relacionan estas aplicaciones con conceptos descritos en los capítulos. Estos temas van desde un parque eólico hasta termómetros moleculares y motores de detonación pulsar.

Temas de actualidad en Física

Soplando aire cálidos

Los parques eólicos están desperdigados por la costa danesa, las planicies del alto medio-oeste de EE.UU. y las montañas desde California hasta Vermont. El aprovechamiento de la energía cinética del viento no es nada nuevo. Durante siglos, los molinos de viento se han utilizado para bombear agua, ventilar minas[1] y moler el grano.

En la actualidad, las turbinas de viento hacen funcionar generadores eléctricos. Esas turbinas transforman energía cinética en energía electromagnética. Las turbinas modernas tienen precios, tamaños y rendimientos muy variados. Algunas de ellas son pequeñas y sencillas máquinas que cuestan unos 500 dólares y producen unos 100 watts de potencia.[2] Otras son gigantes y complejas y cuestan unos 2 millones de dólares pero generan hasta 2,5 MW por turbina.[3] Todas ellas funcionan gracias a una fuente de energía fácilmente disponible —el viento.

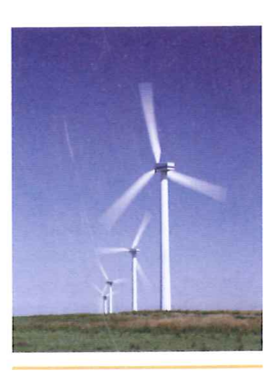
La teoría que hay detrás de la conversión de energía cinética en electromagnética es simple. Las moléculas de aire golpean sobre las aspas de la hélice y hacen girar la turbina. Las aspas hacer girar unos engranajes que hacen aumentar la velocidad de rotación que a su vez hace girar el rotor generador. El generador envía energía electromagnética a cables que soportan alta tensión.

Sin embargo, la conversión de la energía cinética del viento en energía electromagnética no es perfectamente eficiente; de hecho, no puede ser 100% eficiente. Si las turbinas convirtieran completamente la energía cinética del viento en energía eléctrica, el aire saldría de las turbinas sin energía cinética. Es decir, las turbinas pararían el aire. Si la turbina parase completamente el aire, éste fluiría alrededor de la turbina en lugar de fluir a través de ella.

Así, la turbina debe ser capaz de capturar la energía cinética del aire en movimiento y de evitar el flujo de aire a su alrededor. Las turbinas propulsadas por hélices son las más comunes y su eficiencia teórica varía de 30% a 59%.[4] (Las eficiencias teóricas varían en función de cómo el aire fluye alrededor de la turbina y a través de las hélices.)

En resumen, ni la más eficiente de las turbinas puede convertir el 100% de la energía disponible. ¿Qué sucede? Antes de llegar a la turbina el aire fluye de forma laminar mientras que al dejar atrás la turbina el aire se vuelve turbulento. La componente rotacional del movimiento del aire de detrás de la turbina, aumenta su energía aunque también hay alguna disipación debida a la viscosidad del aire. Si un determinado volumen de aire se mueve más lentamente, aparecerá un rozamiento entre este aire y el aire más veloz que fluye a su alrededor.[5] Las hélices se calientan y el aire también. Los engranajes de la turbina también disipan energía debido al rozamiento. Las hélices vibran individualmente —la energía absorbida para producir estas vibraciones también hace disminuir la eficiencia. Finalmente, la turbina necesita corriente para hacer funcionar los motores que lubrican los engranajes y el motor que orienta la turbina en la dirección más apropiada para la captura del viento.

En definitiva, la mayoría de turbinas funcionan con una eficiencia de entre un 10 y un 20 por ciento,[6] pero siguen siendo un recurso energético más limpio que el petróleo. Uno de los propietarios de turbinas eólicas decía, "Lo fundamental del negocio de las turbinas radica en que nos ayuda a controlar nuestro futuro".[7]



Un parque eólico que convierte la energía cinética del aire en energía eléctrica. *(Image Slate.)*

MEDIOS DE DIFUSIÓN Y SUPLEMENTOS IMPRESOS

Todos los suplementos de la obra están disponibles en Internet en la página www.reverte.com/microsites/tipler6ed.

FLEXIBILIDAD PARA LOS CURSOS DE FÍSICA

Nos damos cuenta de que no todos los cursos de física son iguales. Para facilitar la utilización del libro, *Física para la ciencia y la tecnología* se halla disponible en las siguientes versiones:

Volumen 1 *Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica* (Capítulos 1–20, R) 978-84-291-4429-1

Volumen 2 *Electricidad y magnetismo/Luz* (Capítulos 21–33) 978-84-291-4430-7

Volumen 1A *Mecánica* (Capítulos 1–13) 978-84-291-4421-5

Volumen 1B *Oscilaciones y ondas* (Capítulos 14–16) 978-84-291-4422-2

Volumen 1C *Termodinámica* (Capítulos 17–20) 978-84-291-4423-9

Volumen 2A *Electricidad y magnetismo* (Capítulos 21–30) 978-84-291-4424-6

Volumen 2B *Luz* (Capítulos 31–33) 978-84-291-4425-3

Física moderna *Mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia* (Capítulos R, 34–41) 978-84-291-4426-0

Apéndices y respuestas 978-84-291-4427-7

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los diversos profesores, estudiantes, colaboradores y amigos que han contribuido a esta edición y a las anteriores.

Anthony J. Buffa, profesor emérito en California Polytechnic State University en California, escribió muchos de los nuevos problemas que aparecen al final de los capítulos y editó las secciones de problemas del final de cada capítulo. Laura Runkle escribió los Temas de actualidad en Física. Richard Mickey revisó la Revisión de matemáticas de la quinta edición, que ahora constituye el Apéndice de matemáticas de la sexta edición. David Mills, profesor emérito en el College of the Redwoods en California, revisó a fondo el Manual de Soluciones. Para redactar este libro y para comprobar la precisión y exactitud del texto y los problemas hemos contado con la ayuda inestimable de los siguientes profesores:

Thomas Foster
Southern Illinois University

Karamjeet Arya
San Jose State University

Mirley Bala
Texas A&M University—Corpus Christi

Michael Crivello
San Diego Mesa College

Carlos Delgado
Community College of Southern Nevada

David Faust
Mt. Hood Community College

Robin Jordan
Florida Atlantic University

Jerome Licini
Lehigh University

Dan Lucas
University of Wisconsin

Laura McCullough
University of Wisconsin, Stout

Jeannette Myers
Francis Marion University

Marian Peters
Appalachian State University

Todd K. Pedlar
Luther College

Paul Quinn
Kutztown University

Peter Sheldon
Randolph-Macon Woman's College

Michael G. Strauss
University of Oklahoma

Brad Trees
Ohio Wesleyan University

George Zober
Yough Senior High School

Patricia Zober
Ringgold High School

Muchos profesores y estudiantes han realizado revisiones exhaustivas y útiles de uno o más capítulos de esta edición. Cada uno de ellos ha contribuido de un modo fundamental a mejorar la calidad de esta revisión, y merecen por ello nuestro agradecimiento. Nos gustaría dar las gracias a los siguientes revisores:

Ahmad H. Abdelhadi
James Madison University

Edward Adelson
Ohio State University

Royal Albridge
Vanderbilt University

J. Robert Anderson
University of Maryland, College Park

Toby S. Anderson
Tennessee State University

Wickram Ariyasinghe
Baylor University

Yildirim Aktas
University of North Carolina, Charlotte

Eric Ayars
California State University

James Battat
Harvard University

Eugene W. Beier
University of Pennsylvania

Peter Beyersdorf
San Jose State University

Richard Bone
Florida International University

Juliet W. Brosing
Pacific University

Ronald Brown
California Polytechnic State University

Richard L. Cardenas
St. Mary's University

Troy Carter
University of California, Los Angeles

Alice D. Churukian
Concordia College

N. John DiNardo
Drexel University

Jianjun Dong
Auburn University

Fivos R Drymiotis
Clemson University

Mark A. Edwards
Hofstra University

James Evans
Broken Arrow Senior High

Nicola Fameli
University of British Columbia

N. G. Fazleev
University of Texas at Arlington

Thomas Furtak
Colorado School of Mines

Richard Gelderman
Western Kentucky University

Yuri Gershtein
Florida State University

Paolo Gondolo
University of Utah

Benjamin Grinstein
University of California, San Diego

Parameswar Hari
University of Tulsa

Joseph Harrison
University of Alabama—Birmingham

Patrick C. Hecking
Thiel College

Kristi R. G. Hendrickson
University of Puget Sound

Linnea Hess
Olympic College

Mark Hollabaugh
Normandale Community College

Daniel Holland
Illinois State University

Richard D. Holland II
Southern Illinois University

Eric Hudson
Massachusetts Institute of Technology

David C. Ingram
Ohio University

Colin Inglefield
Weber State University

Nathan Israeloff
Northeastern University

Donald J. Jacobs
California State University, Northridge

Erik L. Jensen
Chemeketa Community College

Colin P Jessop
University of Notre Dame

Ed Kearns
Boston University

Alice K. Kolakowska
Mississippi State University

Douglas Kurtze
Saint Joseph's University

Eric T. Lane
University of Tennessee at Chattanooga

Christie L. Larochelle
Franklin & Marshall College

Mary Lu Larsen
Towson University

Clifford L. Laurence
Colorado Technical University

Bruce W. Liby
Manhattan College

Ramon E. Lopez
Florida Institute of Technology

Ntungwa Maasha
Coastal Georgia Community Collegee and University Center

Jane H MacGibbon
University of North Florida

A. James Mallmann
Milwaukee School of Engineering

Rahul Mehta
University of Central Arkansas

R. A. McCorkle
University of Rhode Island

Linda McDonald
North Park University

Kenneth McLaughlin
Loras College

Eric R. Murray
Georgia Institute of Technology

Jeffrey S. Olafsen
University of Kansas

Richard P. Olenick
University of Dallas

Halina Opyrchal
New Jersey Institute of Technology

Russell L. Palma
Minnesota State University—Mankato

Todd K. Pedlar
Luther College

Daniel Phillips
Ohio University

Edward Pollack
University of Connecticut

Michael Politano
Marquette University

Robert L. Pompi
SUNY Binghamton

Damon A. Resnick
Montana State University

Richard Robinett
Pennsylvania State University

John Rollino
Rutgers University

Daniel V. Schroeder
Weber State University

Douglas Sherman
San Jose State University

Christopher Sirola
Marquette University

Larry K. Smith
Snow College

George Smoot
University of California at Berkeley

Zbigniew M. Stadnik
University of Ottawa

Kenny Stephens
Hardin-Simmons University

Daniel Stump
Michigan State University

Jorge Talamantes
California State University, Bakersfield

Charles G. Torre
Utah State University

Brad Trees
Ohio Wesleyan University

John K. Vassiliou
Villanova University

Theodore D. Violett
Western State College

Hai-Sheng Wu
Minnesota State University—Mankato

Anthony C. Zable
Portland Community College

Ulrich Zurcher
Cleveland State University

También estamos en deuda con los revisores de ediciones anteriores. Por lo que nos gustaría dar las gracias a los siguientes revisores, quienes nos proporcionaron un apoyo imprescindible mientras realizábamos la cuarta y la quinta ediciones:

Edward Adelson
The Ohio State University

Michael Arnett
Kirkwood Community College

Todd Averett
The College of William and Mary

Yildirim M. Aktas
University of North Carolina at Charlotte

Karamjeet Arya
San Jose State University

Alison Baski
Virginia Commonwealth University

William Bassichis
Texas A&M University

Joel C. Berlinghieri
The Citadel

Gary Stephen Blanpied
University of South Carolina

Frank Blatt
Michigan State University

Ronald Brown
California Polytechnic State University

Anthony J. Buffa
California Polytechnic State University

John E. Byrne
Gonzaga University

Wayne Carr
Stevens Institute of Technology

George Cassidy
University of Utah

Lay Nam Chang
Virginia Polytechnic Institute

I. V. Chivets
Trinity College, University of Dublin

Harry T. Chu
University of Akron

Alan Cresswell
Shippensburg University

Robert Coakley
University of Southern Maine

Robert Coleman
Emory University

Brent A. Corbin
UCLA

Andrew Cornelius
University of Nevada at Las Vegas

Mark W. Coffey
Colorado School of Mines

Peter P. Crooker
University of Hawaii

Jeff Culbert
London, Ontario

Paul Debevec
University of Illinois

Ricardo S. Decca
Indiana University-Purdue University

Robert W. Detenbeck
University of Vermont

N. John DiNardo
Drexel University

Bruce Doak
Arizona State University

Michael Dubson
University of Colorado at Boulder

John Elliott
University of Manchester, England

William Ellis
University of Technology — Sydney

Colonel Rolf Enger
U.S. Air Force Academy

John W. Farley
University of Nevada at Las Vegas

David Faust
Mount Hood Community College

Mirela S. Fetea
University of Richmond

David Flammer
Colorado School of Mines

Philip Fraundorf
University of Missouri, Saint Louis

Tom Furtak
Colorado School of Mines

James Garland
Retired

James Garner
University of North Florida

Ian Gatland
Georgia Institute of Technology

Ron Gautreau
New Jersey Institute of Technology

David Gavenda
University of Texas at Austin

Patrick C. Gibbons
Washington University

David Gordon Wilson
Massachusetts Institute of Technology

Christopher Gould
University of Southern California

Newton Greenberg
SUNY Binghamton

John B. Gruber
San Jose State University

Huidong Guo
Columbia University

Phuoc Ha
Creighton University

Richard Haracz
Drexel University

Clint Harper
Moorpark College

Michael Harris
University of Washington

Randy Harris
University of California at Davis

Tina Harriott
Mount Saint Vincent, Canada

Dieter Hartmann
Clemson University

Theresa Peggy Hartsell
Clark College

Kristi R.G. Hendrickson
University of Puget Sound

Michael Hildreth
University of Notre Dame

Robert Hollebeek
University of Pennsylvania

David Ingram
Ohio University

Shawn Jackson
The University of Tulsa

Madya Jalil
University of Malaya

Monwhea Jeng
University of California — Santa Barbara

James W. Johnson
Tallahassee Community College

Edwin R. Jones
University of South Carolina

Ilon Joseph
Columbia University

David Kaplan
University of California — Santa Barbara

William C. Kerr
Wake Forest University

John Kidder
Dartmouth College

Roger King
City College of San Francisco

James J. Kolata
University of Notre Dame

Boris Korsunsky
Northfield Mt. Hermon School

Thomas O. Krause
Towson University

Eric Lane
University of Tennessee, Chattanooga

Andrew Lang (graduate student)
University of Missouri

David Lange
University of California — Santa Barbara

Donald C. Larson
Drexel University

Paul L. Lee
California State University, Northridge

Peter M. Levy
New York University

Jerome Licini
Lehigh University

Isaac Leichter
Jerusalem College of Technology

William Lichten
Yale University

Robert Lieberman
Cornell University

Fred Lipschultz
University of Connecticut

Graeme Luke
Columbia University

Dan MacIsaac
Northern Arizona University

Edward McCliment
University of Iowa

Robert R. Marchini
The University of Memphis

Peter E. C. Markowitz
Florida International University

Daniel Marlow
Princeton University

Fernando Medina
Florida Atlantic University

Howard McAllister
University of Hawaii

John A. McClelland
University of Richmond

Laura McCullough
University of Wisconsin at Stout

M. Howard Miles
Washington State University

Matthew Moelter
University of Puget Sound

Eugene Mosca
U.S. Naval Academy

Carl Mungan
U.S. Naval Academy

Taha Mzoughi
Mississippi State University

Charles Niederriter
Gustavus Adolphus College

John W. Norbury
University of Wisconsin at Milwaukee

Aileen O'Donughue
St. Lawrence University

Jack Ord
University of Waterloo

Jeffry S. Olafsen
University of Kansas

Melvyn Jay Oremland
Pace University

Richard Packard
University of California

Antonio Pagnamenta
University of Illinois at Chicago

George W. Parker
North Carolina State University

John Parsons
Columbia University

Dinko Pocanic
University of Virginia

Edward Pollack
University of Connecticut

Robert Pompi
The State University of New York at Binghamton

Bernard G. Pope
Michigan State University

John M. Pratte
Clayton College and State University

Brooke Pridmore
Clayton State College

Yong-Zhong Qian
University of Minnesota

David Roberts
Brandeis University

Lyle D. Roelofs
Haverford College

R. J. Rollefson
Wesleyan University

Larry Rowan
University of North Carolina at Chapel Hill

Ajit S. Rupaal
Western Washington University

Todd G. Ruskell
Colorado School of Mines

Lewis H. Ryder
University of Kent, Canterbury

Andrew Scherbakov
Georgia Institute of Technology

Bruce A. Schumm
University of California, Santa Cruz

Cindy Schwarz
Vassar College

Mesgun Sebhatu
Winthrop University

Bernd Schuttler
University of Georgia

Murray Scureman
Amdahl Corporation

Marllin L. Simon
Auburn University

Scott Sinawi
Columbia University

Dave Smith
University of the Virgin Islands

Wesley H. Smith
University of Wisconsin

Kevork Spartalian
University of Vermont

Zbigniew M. Stadnik
University of Ottawa

G. R. Stewart
University of Florida

Michael G. Strauss
University of Oklahoma

Kaare Stegavik
University of Trondheim, Norway

Jay D. Strieb
Villanova University

Dan Styer
Oberlin College

Chun Fu Su
Mississippi State University

Jeffrey Sundquist
Palm Beach Community College — South

Cyrus Taylor
Case Western Reserve University

Martin Tiersten
City College of New York

Chin-Che Tin
Auburn University

Oscar Vilches
University of Washington

D. J. Wagner
Grove City College
Columbia University

George Watson
University of Delaware

Fred Watts
College of Charleston

David Winter

John A. Underwood
Austin Community College

John Weinstein
University of Mississippi

Stephen Weppner
Eckerd College

Suzanne E. Willis
Northern Illinois University

Frank L. H. Wolfe
University of Rochester

Frank Wolfs
University of Rochester

Roy C. Wood
New Mexico State University

Ron Zammit
California Polytechnic State University

Yuriy Zhestkov
Columbia University

Dean Zollman
Kansas State University

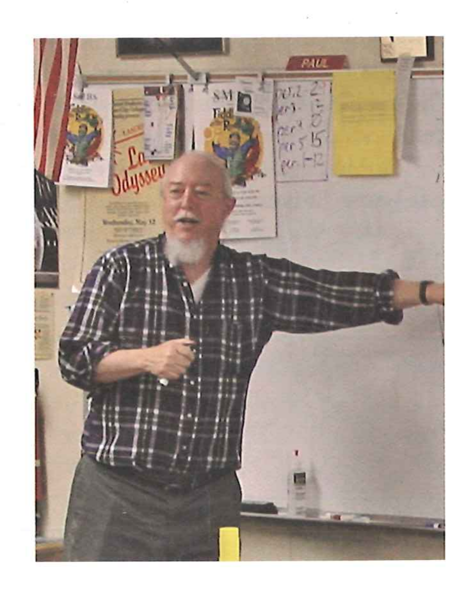
Fulin Zuo
University of Miami

Es obvio que nuestro trabajo no termina nunca; por ello, esperamos recibir comentarios y sugerencias de nuestros lectores para poder mejorar el texto y corregir cualquier error. Si usted cree que ha hallado un error, o tiene cualquier otro comentario, sugerencia o pregunta, envíenos una nota a **producción@reverte.com** Incorporaremos las correcciones en el texto en posteriores reimpresiones.

Por último, nos gustaría agradecer a nuestros amigos de W. H. Freeman and Company su ayuda y aliento. Susan Brennan, Clancy Marshall, Kharissia Pettus, Georgia Lee Hadler, Susan Wein, Trumbull Rogers, Connie Parks, John Smith, Dena Digilio Betz, Ted Szczepanski y Liz Geller, quienes fueron muy generosos con su creatividad y duro trabajo en cada etapa del proceso.

También estamos agradecidos por las contribuciones y ayuda de nuestros colegas Larry Tankersley, John Ertel, Steve Montgomery y Don Treacy.

Acerca de los autores



Paul Tipler nació en la pequeña ciudad agrícola de Antigo, Wisconsin, en 1933. Realizó sus estudios medios en Oshkosh, Wisconsin, en donde su padre era superintendente de las Escuelas Públicas. Recibió el título de Bachelor of Science en la Universidad de Purdue en 1955 y obtuvo su Ph.D. en la Universidad de Illinois, en donde estudió la estructura del núcleo. Impartió la enseñanza durante un año en la Wesleyan University de Connecticut mientras redactaba su tesis. Después se trasladó a la Universidad de Oakland en Michigan, donde fue uno de los primeros miembros del Departamento de Física, y desempeñó un papel importante en el desarrollo de los planes de estudio. Durante los siguientes 20 años, enseñó casi todas las disciplinas de la física y escribió la primera y segunda ediciones de sus ampliamente difundidos textos *Física Moderna* (1969, 1978) y *Física* (1976, 1982). En 1982, se mudó a Berkeley, California, donde ahora reside y donde escribió *Física preuniversitaria* (1987) y la tercera edición de *Física* (1991). Además de la física, sus aficiones incluyen la música, excursionismo y camping. Es un excelente pianista de jazz y un buen jugador de póker.



Gene Mosca nació en la ciudad de Nueva York y se crió en Shelter Island, en el Estado de Nueva York. Estudió en la Universidad de Villanova, en la Universidad de Michigan y en la Universidad de Vermont, donde obtuvo su Ph.D. en física. Recientemente jubilado, Gene Mosca ha sido profesor en la U.S. Naval Academy, donde fue el impulsor de numerosas mejoras en la enseñanza de la Física, tanto en los laboratorios como en las aulas. Proclamado por Paul Tipler como "el mejor crítico que he tenido", Mosca se ha convertido en coautor del libro a partir de su quinta edición.

PARTE IV **ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO**





EL COBRE ES UN CONDUCTOR CUYAS PROPIEDADES SON ÚTILES PORQUE HACEN POSIBLE EL TRANSPORTE DE LA ELECTRICIDAD. *(Brooks R. Dillard/www.yuprocks.com)*

Campo eléctrico I: distribuciones discretas de carga

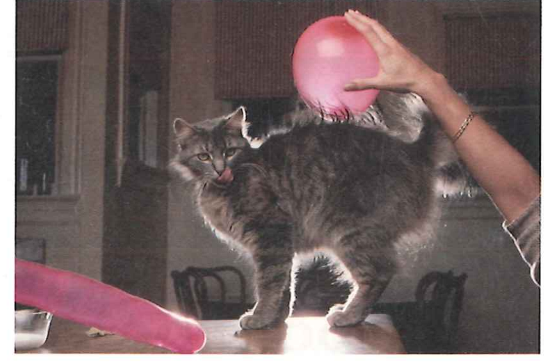
- 21.1 Carga eléctrica
- 21.2 Conductores y aislantes
- 21.3 Ley de Coulomb
- 21.4 El campo eléctrico
- 21.5 Líneas de campo eléctrico
- 21.6 Acción del campo eléctrico sobre las cargas

? ¿Cuál es la carga total de los electrones de una moneda? (Véase el ejemplo 21.1.)

Hoy en día, nuestra vida diaria depende extraordinariamente de la electricidad, mientras que hace un siglo sólo disponíamos de alguna lámpara eléctrica. Sin embargo, aunque el uso generalizado de la electricidad es muy reciente, su estudio tiene una larga historia que comienza mucho antes de que apareciese la primera lámpara eléctrica. Las primeras observaciones de la atracción eléctrica fueron realizadas por los antiguos griegos. Éstos observaron que al frotar el ámbar, éste atraía pequeños objetos como pajitas o plumas. Ciertamente, la palabra "eléctrico" procede del vocablo griego asignado al ámbar, *elektrón*.

Actualmente, la electricidad está en un proceso continuo de estudio, de investigación y de búsqueda de nuevos usos. Los ingenieros eléctricos mejoran la tecnología existente en materia eléctrica, incrementando el rendimiento y eficacia de diferentes dispositivos eléctricos, tales como automóviles híbridos, plantas de producción eléctrica, etc. Pinturas de fijación electrostática se utilizan en la industria de la automoción, en diversas partes del motor y de la estructura general del automóvil. Los procesos electrostáticos de cromación y de fijación de la pintura permiten realizar recubrimientos más duraderos, y de forma más ecológica y cuidadosa del medio ambiente que los que utilizan pinturas líquidas, dado que no utilizan ningún tipo de disolvente.

En este capítulo, se inicia el estudio de la electricidad con la electrostática, *que trata de las cargas eléctricas en reposo. Después de introducir el concepto de carga eléctrica, analizaremos brevemente el concepto de conductores y aislantes y la forma en que un conductor puede adquirir una carga. A continuación, estudiaremos la ley de Coulomb, que describe la fuerza ejercida por una carga eléctrica sobre otra. Posteriormente, introduciremos el concepto de campo eléctrico y veremos cómo puede describirse mediante las líneas de campo, las cuales indican el módulo y la dirección del campo, del mismo modo en que describíamos el campo de velocidades de un fluido en movimiento mediante líneas de corriente (capítulo 13). Por último, abordaremos el comportamiento de las cargas puntuales y los dipolos en campos eléctricos.*

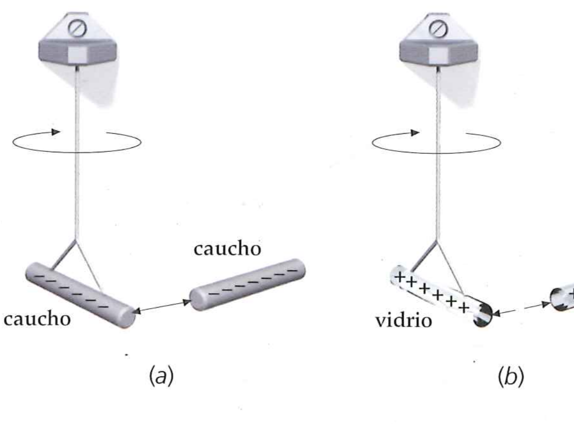


Un gato y un globo hinchado. *(Roger Ressmeyer/CORBIS.)*

21.1 CARGA ELÉCTRICA

Consideremos una barra de caucho que se frota con un trozo de piel y se suspende de una cuerda que puede girar libremente. Si aproximamos a esta barra una segunda barra de caucho, frotada también con una piel, observaremos que las barras se repelen entre sí (figura 21.1*a*). El mismo resultado se obtiene si repetimos el mismo experimento con dos barras de vidrio que han sido frotadas con seda (figura 21.1*b*). Sin embargo, si utilizamos una barra de plástico frotada con piel y una varilla de vidrio frotada con seda, observaremos que las barras se atraen entre sí (figura 21.1*c*).

Al frotar una barra, ésta se carga eléctricamente. Repitiendo el experimento con diversos tipos de materiales, vemos que todos los objetos cargados pueden clasificarse en dos grupos: aquellos que se cargan como la barra de plástico frotada con un trozo de piel y los que se cargan como la varilla de vidrio frotada con un paño de seda. Los objetos de un mismo grupo se repelen entre sí, mientras que los de grupos diferentes se atraen. Benjamín Franklin propuso un modelo de electricidad para explicar este fenómeno. Sugirió que todo objeto posee una cantidad *normal* de electricidad y que cuando dos objetos están muy próximos, por ejemplo cuando se frotan entre sí, parte de la electricidad se transfiere de un cuerpo al otro: así pues, uno tiene un exceso de carga y el otro una deficiencia de carga de valor igual. Franklin describió las cargas resultantes con los signos más y menos. Al tipo de carga adquirida por una barra de vidrio frotada con un paño de seda le llamó positiva, lo cual significaba que el paño de seda adquiría una carga negativa de igual magnitud.



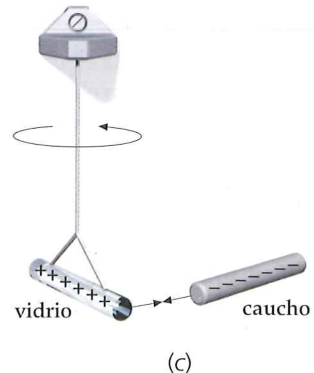


FIGURA 21.1 (*a*) Dos barras de caucho frotadas con piel se repelen mutuamente. (*b*) Igualmente, dos barras de vidrio frotadas con un material hecho de seda, se repelen entre sí. (*c*) Una barra de caucho que ha sido frotada con piel y otra de vidrio frotada con seda se atraen mutuamente.

Según esta elección de Franklin, el plástico frotado con una piel adquiere una carga negativa y la piel adquiere una carga positiva de igual magnitud. Dos objetos que portan el mismo tipo de carga se repelen entre sí, mientras que si portan cargas opuestas se atraen mutuamente (figura 21.1).

Actualmente, es bien conocido que cuando un vidrio se frota con un trozo de seda, se transfieren electrones del vidrio al pedazo de seda. De acuerdo con la convención de Franklin, todavía en uso, la seda está cargada negativamente, y, consecuentemente, decimos que los electrones tienen carga negativa. La tabla 21.1 corresponde a una versión reducida de una **serie triboeléctrica** (en griego *tribos* significa rozamiento). En esta serie, cuanto más baja es la ubicación de un material, mayor es su afinidad por captar electrones. Si dos materiales se ponen en contacto mediante rozamiento, se transfieren electrones del de la zona superior al de la inferior. Por ejemplo, electrones del nailon son transferidos al teflón cuando ambos se frotan entre sí.

Tabla 21.1 Serie triboeléctrica

+ Extremo positivo de la serie
Amianto
Vidrio
Nailon
Lana
Plomo
Seda
Aluminio
Papel
Algodón
Acero
Caucho (goma dura)
Níquel y cobre
Latón y plata
Goma sintética
Fibra acrílica
Plástico flexible
Polietileno
Teflón
Goma de silicona
− Extremo negativo de la serie

CUANTIZACIÓN DE LA CARGA

La materia está formada por átomos eléctricamente neutros. Cada átomo posee un pequeño, pero masivo, núcleo que contiene protones y neutrones. Los protones están cargados positivamente, mientras que los neutrones no poseen carga. El número de protones en el núcleo es el número atómico Z del elemento. Rodeando al núcleo existe un número igual de electrones negativamente cargados, de modo que el átomo posee una carga neta cero. La masa del electrón es aproximadamente 2000 veces menor que la del protón. Sin embargo, sus cargas son exactamente iguales pero de signo contrario. La carga del protón es e y la del electrón $-e$, siendo e la **unidad fundamental de carga**. La carga de un electrón o protón es una propiedad intrínseca de la partícula; del mismo modo, la masa y el espín de estas partículas son también propiedades intrínsecas de las mismas.

Todas las cargas observables se presentan en cantidades enteras de la unidad fundamental de carga e. Es decir, la carga está cuantizada. Toda carga Q presente en la naturaleza puede escribirse en la forma $Q = \pm Ne$, siendo N un número entero.* Sin embargo, en los objetos ordinarios, N es habitualmente un número muy grande y la carga parece ser continua, del mismo modo que el aire parece ser un medio continuo aunque realmente consta de muchas moléculas discretas. Por ejemplo, al cargar una barra de plástico frotándola con un trozo de piel se transfieren del orden de 10^{10} electrones a la barra.

CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Cuando dos objetos se frotan entre sí, uno de ellos queda con un exceso de electrones y, por lo tanto, cargado negativamente, y el otro queda con un déficit de electrones y, en consecuencia, cargado positivamente. La carga total, suma de la de los dos objetos, no cambia. Es decir, la *carga se conserva*. La **ley de conservación de la carga** es una ley fundamental de la naturaleza. En ciertas interacciones entre partículas elementales puede ocurrir que los electrones se creen o destruyan. Sin embargo, en todos estos procesos, se producen o destruyen cantidades iguales de cargas negativas y positivas, de manera que la carga del universo no varía.

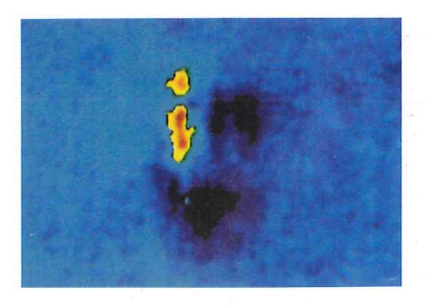
La unidad de carga del SI es el coulomb, el cual se define en función de la unidad de corriente o intensidad eléctrica, el ampere (A).† El **coulomb** (C) es la cantidad de carga que fluye a través de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente en el cable es de un ampere. La unidad fundamental de carga eléctrica e está relacionada con el coulomb por

$$e = 1{,}602177 \times 10^{-19}\ \text{C} \approx 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \qquad 21.1$$

UNIDAD FUNDAMENTAL DE CARGA

* En el modelo estándar de partículas elementales, los protones, neutrones y otras partículas elementales están constituidas por partículas aún más fundamentales y primigenias llamadas *quarks*, las cuales poseen cargas de $\pm\frac{1}{3}e$ o $\pm\frac{2}{3}e$. Los quarks no se han observado como partículas individuales. Sólo se han observado combinaciones de estas partículas elementales que constituyen una carga neta de $\pm Ne$, siendo N un número entero.

† El ampere (A) es la unidad de corriente eléctrica.



Carga por contacto. Una muestra de plástico de anchura 0,02 mm fue cargada mediante contacto con una pieza de níquel. Aunque el plástico posee una carga neta positiva, se aprecian regiones de carga negativa (oscuras) y regiones de carga positiva (amarillo). La fotografía se tomó barriendo una aguja cargada, de anchura 10^{-7} m, sobre la muestra y midiendo la fuerza electrostática sobre la aguja. *(Bruce Terris/IBM Almaden Research Center.)*

PROBLEMA PRÁCTICO 21.1
Una carga de 50 nC (1 nC = 10^{-9} C) puede producirse en el laboratorio simplemente frotando entre sí dos objetos. ¿Cuántos electrones deben ser transferidos para producir esta carga?

Ejemplo 21.1 ¿Cuánta carga hay en una moneda?

Una moneda de cobre* (Z = 29) tiene una masa de 3 g. ¿Cuál es la carga total de todos los electrones contenidos en la moneda?

PLANTEAMIENTO La carga total de los electrones contenidos en una moneda viene dada por el número de éstos, N_e, multiplicado por la carga de uno de ellos, $-e$. Por tanto, el número de electrones será 29 veces el número de átomos de cobre, N_{at}. Para determinar N_{at} hay que tener en cuenta que un mol de cualquier sustancia tiene un número de moléculas igual al número de Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) y el número de gramos de un mol es la masa molecular M, que para el cobre es 63,5 g/mol. Como la molécula de cobre es monoatómica, determinaremos el número de átomos por gramo dividiendo el N_A (átomos por mol) por el peso molecular M (gramos por mol).

SOLUCIÓN

1. La carga total es el número de electrones multiplicado por la carga electrónica:
$$Q = N_e(-e)$$
2. El número de electrones es el número atómico Z multiplicado por el número de átomos de cobre, N_{at}:
$$N_e = ZN_{at}$$
3. Calcular el número de átomos de cobre en 3,10 g de este metal:
$$N_{at} = (3{,}10\text{ g})\frac{6{,}02 \times 10^{23}\text{ átomos/mol}}{63{,}5\text{ g/mol}} = 2{,}94 \times 10^{22}\text{ átomos}$$
4. Calcular el número de electrones, N_e:
$$N_e = ZN_{at} = (29\text{ electrones/átomo})(2{,}94 \times 10^{22}\text{ átomos}) = 8{,}53 \times 10^{23}\text{ electrones}$$
5. Utilizar este valor de N_e para determinar la carga total:
$$Q = N_e \times (-e) = (8{,}53 \times 10^{23}\text{ electrones})(-1{,}60 \times 10^{-19}\text{ C/electrón}) = \boxed{-1{,}37 \times 10^{5}\text{ C}}$$

COMPROBACIÓN Hay $29 \times (6{,}02 \times 10^{23})$ electrones en 63,5 g de cobre. Por lo tanto, en 3,5 gramos de este material hay $(3{,}10/63{,}5) \times 29 \times (6{,}02 \times 10^{23}) = 8{,}53 \times 10^{23}$ electrones, lo cual está de acuerdo con el paso 4 del resultado del ejercicio.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.2 Si cada habitante de los EE.UU. (aproximadamente 300 millones de habitantes) recibiera un millón de electrones, ¿qué porcentaje del número de electrones contenido en la moneda representaría?

* Desde 1793 hasta 1837, el penique estaba compuesto del 100% de cobre. En 1982, se cambió la composición pasando de 5% de cinc y 95% de cobre a una composición de 97,5% de cinc y 2,5% de cobre.

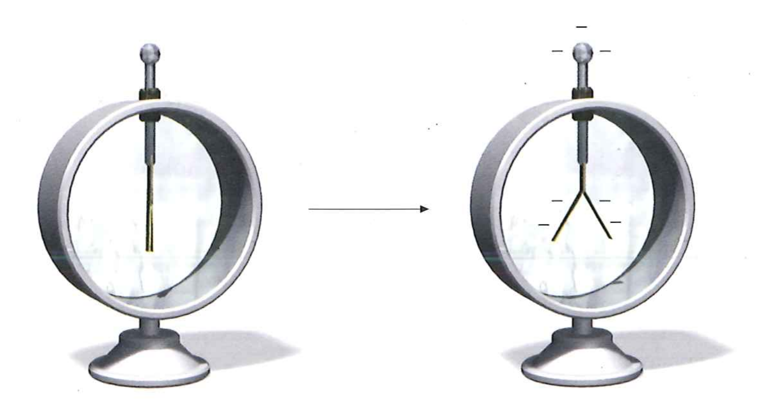


FIGURA 21.2 Electroscopio. Dos hojas de oro se conectan a una barra metálica terminada en la parte superior por una esfera de metal. Asimismo, las hojas están aisladas del recipiente. Cuando no están cargadas, las hojas cuelgan en dirección vertical, juntas. Cuando se toca la esfera con una barra de plástico cargada negativamente, se transfieren algunas cargas negativas de la barra a la esfera, y de ésta son conducidas a las hojas de oro, las cuales se separan entre ellas debido a la repulsión de sus respectivas cargas negativas. Si se toca la esfera con una barra de vidrio cargada positivamente, las hojas también se separan. (Poniendo en contacto la bola con una barra de vidrio cargada positivamente, las hojas de oro deberían separarse. En este caso, la barra de vidrio cargada positivamente atrae electrones de la esfera de metal, dejando una carga neta positiva en la bola, en la barra y en las hojas.)

21.2 CONDUCTORES Y AISLANTES

En muchos materiales, tales como el cobre y otros metales, parte de los electrones pueden moverse libremente en el seno del material. Estos materiales se denominan **conductores**. En otros materiales, tales como la madera o vidrio, todos los electrones están ligados a los átomos próximos y ninguno puede moverse libremente. Estos materiales se denominan **aislantes**.

En un átomo de cobre aislado, existen 29 electrones ligados al núcleo por atracción electrostática entre los electrones cargados negativamente y los núcleos cargados positivamente. Los electrones más externos están ligados más débilmente que los más internos a causa de su mayor distancia al núcleo y a la repulsión de los electrones más internos. Cuando un gran número de átomos de cobre se combinan en una pieza de cobre metálico, el enlace de los electrones de cada átomo individual se reduce debido a las interacciones con los átomos próximos. Uno o más de los electrones externos de cada átomo queda en libertad para moverse por todo el metal, del mismo modo que una molécula de gas se mueve en el interior de una caja. El número de electrones libres depende del metal de que se trate, pero generalmente es de alrededor de un electrón por átomo. Cuando a un átomo se le quita o se le añade un electrón, apareciendo una carga neta, se convierte en un **ion**. En el cobre metálico, los iones de cobre se distribuyen regularmente formando una *red*. Normalmente, un conductor es eléctricamente neutro porque existe un ion en la red portador de una carga positiva $+e$ por cada electrón libre portador de una carga negativa $-e$. La carga neta de un conductor puede variar por adición o extracción de electrones. Un conductor con una carga neta negativa tiene un exceso de electrones libres, mientras que un conductor con una carga neta positiva tiene un déficit de los mismos.

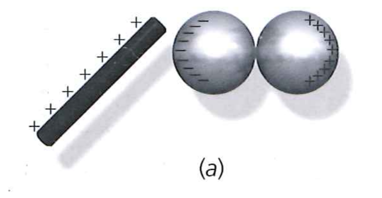


COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 21.1

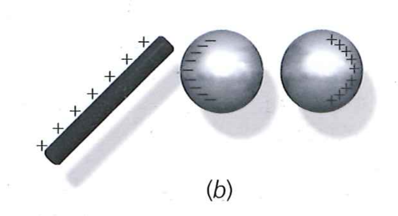
Una esfera conductora con carga $+Q$ se pone en contacto con otra esfera, también conductora e idéntica de tamaño a la anterior y con carga inicial nula. (*a*) ¿Cuál será la carga de cada esfera después de que se establezca el contacto? (*b*) Estando las esferas en contacto, una barra cargada positivamente se aproxima a una de estas esferas, causando una redistribución de las cargas de las dos esferas, de forma que la que está más próxima a la barra tiene una carga $-Q$. ¿Cuál es la carga de la otra esfera?

CARGA POR INDUCCIÓN

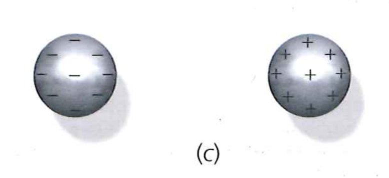
La conservación de la carga puede ilustrase mediante un método simple de cargar un conductor llamado **carga por inducción**, que se muestra en la figura 21.3. Dos esferas metálicas sin carga están en contacto. Al acercar a una de las esferas una barra cargada, los electrones fluyen de una esfera a la otra, acercándose a la barra si ésta se encuentra positivamente cargada o alejándose si su carga es negativa. Si la barra está cargada positivamente (figura 21.3*a*), atrae a los electrones y la esfera más próxima a la barra adquiere electrones de la otra. La esfera más próxima adquiere carga ne-



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 21.3 Carga por inducción. (*a*) Los dos conductores esféricos en contacto adquieren cargas opuestas cuando la barra cargada positivamente atrae a los electrones hacia la esfera de la izquierda. (*b*) Si las esferas se separan sin mover la barra de su posición, éstas retienen sus cargas iguales y opuestas. (*c*) Si la barra se retira y las esferas se separan, éstas quedan uniformemente cargadas con cargas iguales y opuestas.

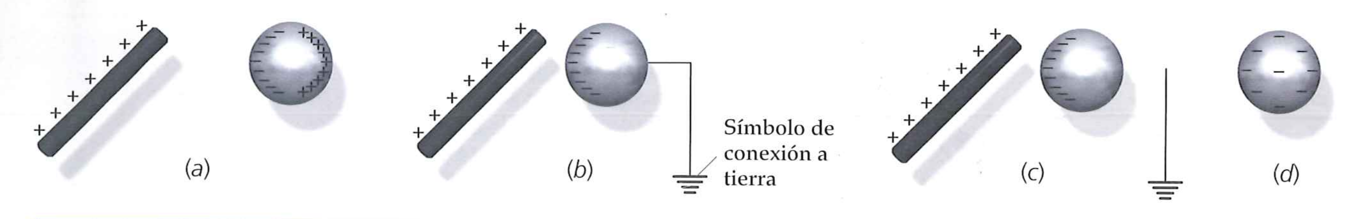


FIGURA 21.4 Inducción por conexión a tierra. (*a*) La carga libre sobre una esfera conductora se polariza mediante la barra cargada positivamente, que atrae las cargas negativas de la esfera. (*b*) Si la esfera se conecta a un conductor muy grande, tal como la Tierra, por medio de un alambre, los electrones del suelo neutralizan la carga positiva del lado más alejado de la barra y la esfera queda negativamente cargada. (*c*) La carga negativa permanece si el cable se desconecta antes de separar la barra. (*d*) Al quitar la barra, la esfera queda cargada negativamente de forma uniforme.

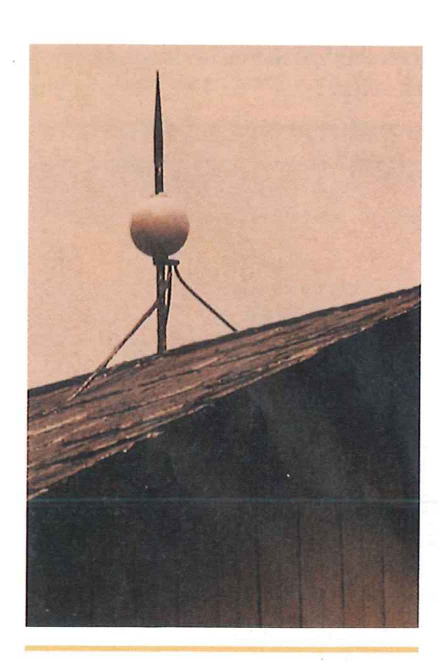
gativa y la más alejada queda con una carga neta igual, pero positiva. Cuando un conductor tiene cargas *separadas* iguales y opuestas se dice que está **polarizado**. Si las esferas se separan antes de retirar la barra, quedarán con cantidades iguales de cargas opuestas (figura 21.3*b*). Un resultado semejante se obtiene con una barra cargada negativamente; los electrones pasarían de la esfera más próxima a la más alejada.

La propia Tierra constituye un conductor que para muchos propósitos puede considerarse infinitamente grande y con un suministro de carga libre abundante. Cuando un conductor se pone en contacto con el suelo se dice que está **conectado a tierra**. Esto se representa esquemáticamente mediante un cable de conducción que termina en unas pequeñas líneas paralelas, como indica la figura 21.4*b*. La figura 21.4 muestra cómo puede inducirse una carga en un conductor simple transfiriendo electrones desde el suelo y, a continuación, interrumpiendo la conexión a tierra. (En la práctica, una persona que estuviera en el suelo tocando con sus manos la esfera podría servir como ejemplo de la demostración electrostática descrita aquí.)



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 21.2

Se cargan dos esferas idénticas conductoras mediante inducción electrostática y seguidamente se separan a gran distancia una de la otra; la esfera 1 tiene carga $+Q$ y la esfera 2, carga $-Q$. Se dispone de una tercera esfera idéntica a las otras dos e inicialmente descargada. Si las esferas 3 y 1 se ponen en contacto y, seguidamente, se separan, y luego se ponen en contacto la 3 y la 2 y se separan, ¿cuál será la carga final de cada una de las tres esferas?



El pararrayos de este edificio está conectado a tierra para conducir los electrones desde el suelo a las nubes cargadas positivamente a fin de neutralizarlas. (*© Grant Heilman.*)



Estas damas utilizan sombreros con cadenas metálicas que arrastran por el suelo, supuestamente para protegerse contra los rayos. (*Ann Ronan Picture Library.*)

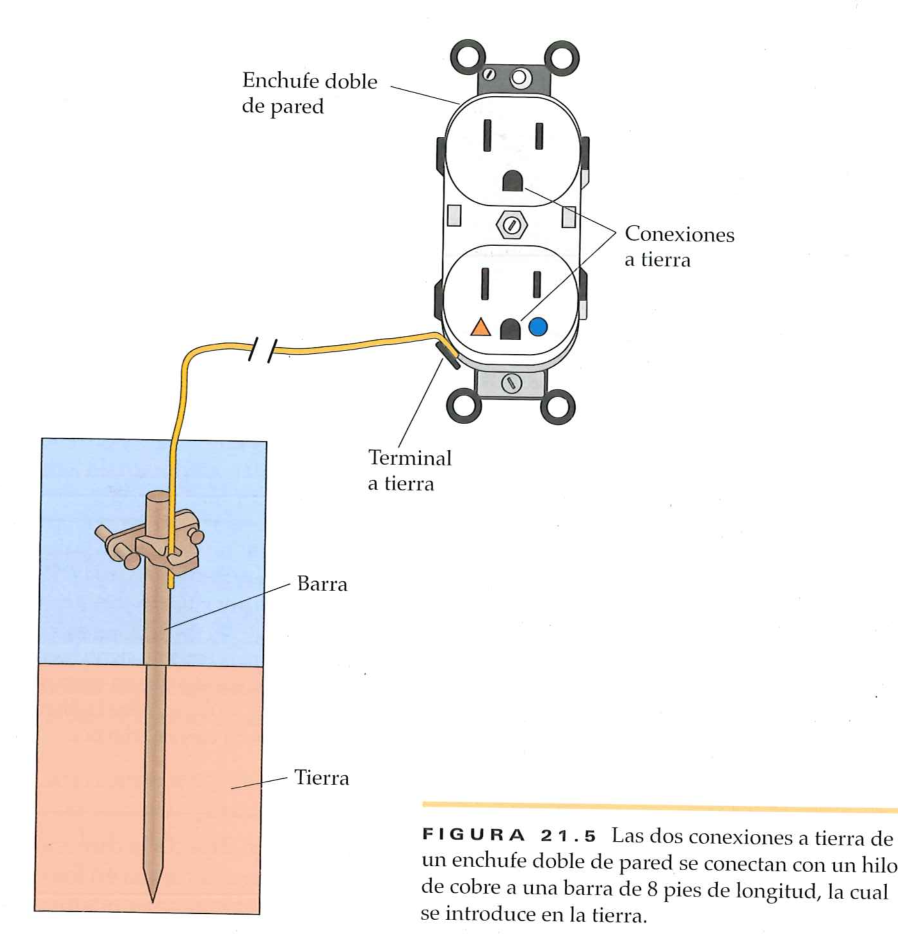
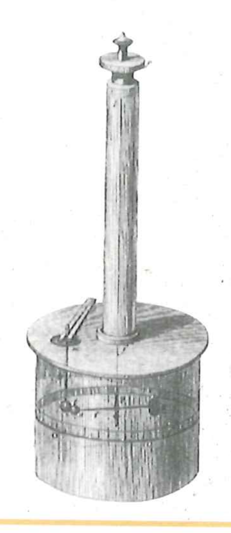


FIGURA 21.5 Las dos conexiones a tierra de un enchufe doble de pared se conectan con un hilo de cobre a una barra de 8 pies de longitud, la cual se introduce en la tierra.

21.3 LEY DE COULOMB

La fuerza ejercida por una carga sobre otra fue estudiada por Charles Coulomb (1736–1806) mediante una balanza de torsión de su propia invención.* En el experimento de Coulomb las esferas cargadas eran mucho menores que la distancia entre ellas, de modo que las cargas podían considerarse como puntuales. Coulomb utilizó el fenómeno de inducción para producir esferas igualmente cargadas y poder variar la carga depositada sobre ellas. Por ejemplo, comenzando con una carga q_0 sobre cada esfera, podía reducir la carga a $\frac{1}{2}q_0$ conectando a tierra una de las esferas temporalmente para descargarla, tras lo cual la desconectaba de tierra y ponía las dos esferas en contacto. Los resultados de los experimentos de Coulomb y otros científicos se resumen en la **ley de Coulomb**:

> La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las mismas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.
>
> LEY DE COULOMB



Balanza de torsión de Coulomb. *(Bundy Library, Norwalk, CT.)*

* El aparato experimental de Coulomb era esencialmente el mismo que se describió en el experimento de Cavendish (capítulo 11), con las masas reemplazadas por pequeñas esferas cargadas. La atracción gravitatoria de las esferas es completamente despreciable comparada con la atracción o repulsión eléctrica producida por las cargas depositadas en las esferas por frotamiento.

El *módulo* de la fuerza eléctrica ejercida por una carga puntual q_1 sobre otra carga puntual q_2 a la distancia r viene dada por

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \qquad 21.2$$

LEY DE COULOMB PARA LA FUERZA EJERCIDA POR q_1 SOBRE q_2

donde k es una constante positiva determinada experimentalmente conocida como **constante de Coulomb**, que tiene el valor

$$k = 8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \qquad 21.3$$

Si q_1 se encuentra en la posición $\vec{r}_1$ y q_2 en $\vec{r}_2$ (figura 21.6), la fuerza $\vec{F}_{12}$ ejercida por q_1 sobre q_2 es

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad 21.4$$

LEY DE COULOMB (FORMA VECTORIAL)

donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector que apunta de q_1 a q_2, y $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ es un vector unitario que apunta de q_1 a q_2.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza $\vec{F}_{21}$ ejercida por q_2 sobre q_1 es de sentido contrario a la fuerza $\vec{F}_{12}$. Obsérvese la semejanza entre la ley de Coulomb y la ley de Newton de la gravedad (ecuación 11.3). Ambas son leyes que dependen de la inversa del cuadrado de la distancia. Sin embargo, la fuerza gravitatoria entre dos partículas es proporcional a las masas de las partículas y es siempre atractiva, mientras que la fuerza eléctrica es proporcional a las cargas de las partículas y es repulsiva si ambas cargas tienen el mismo signo y atractiva si tienen signos contrarios.

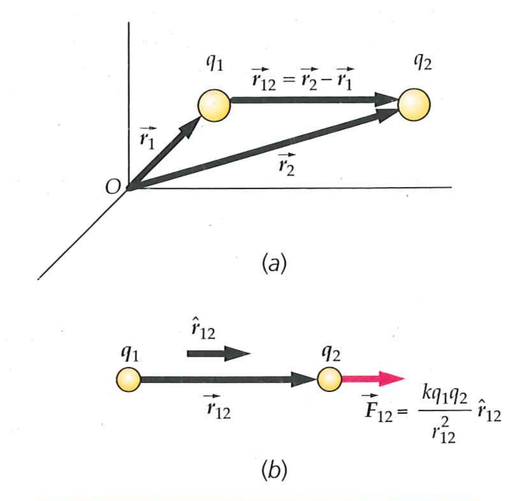


FIGURA 21.6 (*a*) Carga q_1 en la posición $\vec{r}_1$ y carga q_2 en $\vec{r}_2$, ambas respecto al origen O. La fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 está en la dirección y sentido del vector $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ si ambas cargas tienen el mismo signo, y en sentido opuesto si sus signos son contrarios. El vector unitario $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ tiene la dirección del vector que une la carga q_1 con la q_2.

! La ecuación 21.4 da la dirección correcta para la fuerza en los casos en que ambas cargas sean positivas, negativas o de diferente signo.

Ejemplo 21.2 Fuerza eléctrica en un átomo de hidrógeno

En el átomo de hidrógeno, el electrón está separado del protón por una distancia media de aproximadamente $5{,}3 \times 10^{-11}$ m. ¿Cuál es el módulo de la fuerza electrostática ejercida por el protón sobre el electrón?

PLANTEAMIENTO Asígnese la carga q_1 al protón y q_2 al electrón. Se utiliza la ley de Coulomb para determinar el módulo de la fuerza de atracción electrostática entre el protón y el electrón.

SOLUCIÓN

1. Se dibuja el electrón y el protón colocándolos en el dibujo con sendos símbolos diferenciados (figura 21.7):

Protón q_1 — Electrón q_2, F, r, $q_1 = +e$, $q_2 = -e$

FIGURA 21.7

2. Usar la ecuación 21.2 (ley de Coulomb) para calcular la fuerza electrostática:

$$F = \frac{k|q_1q_2|}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60 \times 10^{-19}\text{ C})^2}{(5{,}3 \times 10^{-11}\text{ m})^2}$$

$$= \boxed{8{,}2 \times 10^{-8}\text{ N}}$$

COMPROBACIÓN El orden de magnitud está dentro de lo esperado. Las potencias de diez en el numerador combinadas son $10^9 \times 10^{-38} = 10^{-29}$, la potencia de diez en el denominador es 10^{-22}, y $10^{-29}/10^{-22} = 10^{-7}$. Comparando con el resultado, se tiene que $8{,}2 \times 10^{-8} \approx 10^{-7}$.

OBSERVACIÓN Comparada con las interacciones macroscópicas, esta fuerza es muy pequeña. Sin embargo, como la masa del electrón es tan pequeña, aproximadamente 10^{-30} kg, esta fuerza produce una aceleración enorme, $F/m \approx 9 \times 10^{22}$ m/s². La masa del protón es casi 2000 veces mayor que la del electrón, así que la aceleración del protón es alrededor de 4×10^{19} m/s². Compárese esta aceleración con la debida a la gravedad, $g = 10$ m/s².

PROBLEMA PRÁCTICO 21.3 Dos cargas puntuales de 0,0500 μC cada una se colocan separadas por una distancia de 10 cm. Calcular el módulo de la fuerza ejercida por una de las cargas sobre la otra.

Puesto que tanto la fuerza eléctrica como la fuerza gravitatoria entre dos partículas varían en razón inversa con el cuadrado de su separación, la relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia que separa las partículas. Podemos, pues, comparar las intensidades relativas de estas dos fuerzas en partículas elementales, tales como el electrón y el protón.

Ejemplo 21.3 Comparación cuantitativa entre las fuerzas eléctrica y gravitatoria

Calcular la relación que existe entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria ejercidas entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ley de Coulomb con $q_1 = e$ y $q_2 = -e$ para hallar la fuerza eléctrica. Y usamos la ley de la gravitación de Newton junto con la masa del protón, $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, y la masa del electrón, $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, para hallar la fuerza de la gravedad.

SOLUCIÓN

1. Expresar los módulos de la fuerza eléctrica F_e y la fuerza gravitatoria F_g en función de las cargas, masas, distancia de separación r y las constantes eléctrica y de gravitación:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2} \qquad F_g = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

2. Determinar la relación de ambas fuerzas. Obsérvese que la distancia de separación r se anula:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e}$$

3. Sustituir por los valores numéricos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})}$$

$$= \boxed{2{,}27 \times 10^{39}}$$

COMPROBACIÓN En el paso 3, las unidades eléctricas se cancelan en el numerador de la fracción. En el denominador se cancelan las unidades de masa. En consecuencia, tanto en el numerador como en el denominador, las unidades son N · m². Por lo tanto, la fracción no tiene dimensiones, como era de esperar, ya que es una relación entre dos fuerzas.

OBSERVACIÓN Este resultado demuestra por qué los efectos de la gravedad no se consideran al tratar las interacciones atómicas o moleculares.

Aunque la fuerza gravitatoria es increíblemente pequeña comparada con la fuerza eléctrica y prácticamente no desempeña papel alguno a nivel atómico, la gravedad es la fuerza dominante entre sistemas grandes, como planetas y estrellas, porque estos objetos poseen un número casi igual de cargas positivas y negativas y, por lo tanto, se neutralizan las fuerzas eléctricas atractivas y repulsivas. La fuerza neta entre objetos astronómicos es esencialmente la fuerza de atracción gravitatoria.

FUERZA EJERCIDA POR UN SISTEMA DE CARGAS

En un sistema de cargas, cada una de ellas ejerce una fuerza dada por la ecuación 21.4 sobre cada una de las restantes. Así, la fuerza neta sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema. Esta es una consecuencia del *principio de superposición* de las fuerzas.



***Véase el* Apéndice de matemáticas *para más información sobre* Trigonometría**

Ejemplo 21.4 Fuerza neta

Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x; q_1 está en el origen, q_2 en $x = 2$ m y q_0 en x ($x > 2$ m). (*a*) Determinar la fuerza neta sobre q_0 ejercida por q_1 y q_2 si $q_1 = +25$ nC, $q_2 = -10$ nC y $x = 3{,}5$ m. (*b*) Obtener una expresión de la fuerza neta sobre q_0 debida a q_1 y q_2 en el intervalo $2 \text{ m} < x < \infty$.

PLANTEAMIENTO La fuerza neta sobre q_0 es el vector suma de la fuerza $\vec{F}_{10}$ ejercida por q_1 y la fuerza $\vec{F}_{20}$ ejercida por q_2. Las fuerzas individuales se determinan mediante la ley de Coulomb. Obsérvese que $\hat{r}_{10} = \hat{r}_{20} = \hat{i}$ pues $\hat{r}_{10}$ y $\hat{r}_{20}$ se encuentran ambos en la dirección positiva de x.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un croquis del sistema de cargas (figura 21.8*a*). Indicar las distancias r_{10} y r_{20}:

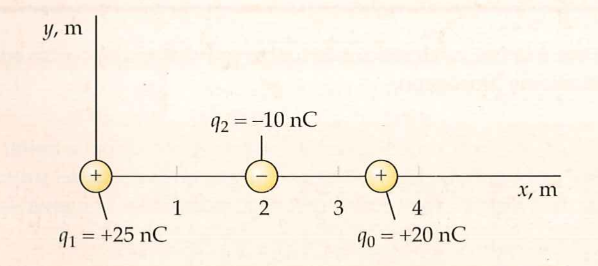
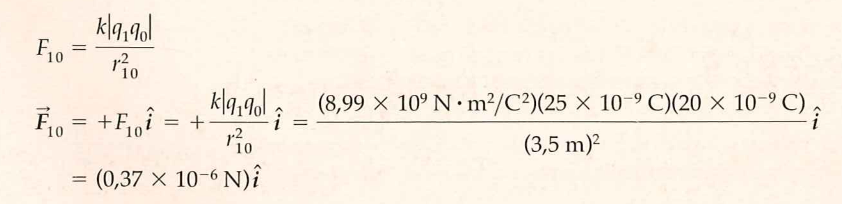


FIGURA 21.8*a*

2. Hallar la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la q_0. Estas cargas se repelen por ser del mismo signo. La fuerza tiene la dirección del eje x:

$$F_{10} = \frac{k|q_1q_0|}{r_{10}^2}$$



$$\vec{F}_{10} = +F_{10}\hat{i} = +\frac{k|q_1q_0|}{r_{10}^2}\hat{i} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9}\ \text{C})(20 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(3{,}5\ \text{m})^2}\hat{i}$$

$$= (0{,}37 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{i}$$

3. Hallar la fuerza ejercida por la carga q_2 sobre la q_0. Estas cargas se atraen por ser de diferente signo. La fuerza tiene la dirección del eje $-x$:

$$F_{20} = \frac{k|q_2q_0|}{r_{20}^2}$$

$$\vec{F}_{20} = -F_{20}\hat{i} = -\frac{k|q_2q_0|}{r_{20}^2}\hat{i} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10 \times 10^{-9}\ \text{C})(20 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(1{,}5\ \text{m})^2}\hat{i}$$

$$= -(0{,}80 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{i}$$

4. Sumar los resultados para obtener la fuerza neta:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \boxed{-(0{,}43 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{i}}$$

(*b*) 1. Dibujar la configuración geométrica de las cargas, definiendo las distancias r_{10} y r_{20} (figura 21.8*b*):

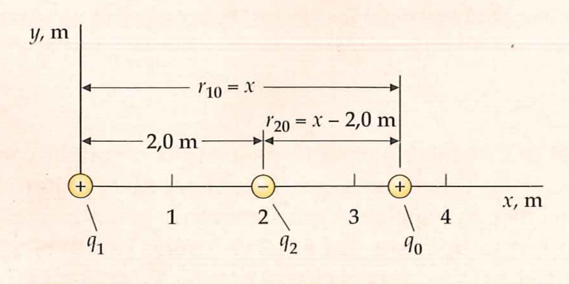


FIGURA 21.8*b*

2. Obtener una expresión para la fuerza debida a la carga q_1:

$$\vec{F}_{10} = \frac{k|q_1q_0|}{x^2}\,\hat{i}$$

3. Obtener una expresión para la fuerza debida a la carga q_2:

$$\vec{F}_{20} = -\frac{k|q_2q_0|}{(x - 2{,}0\ \text{m})^2}\,\hat{i}$$

4. Sumar los dos vectores resultantes obtenidos en 2 y 3, para obtener la fuerza neta:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \left(\frac{k|q_1q_0|}{x^2} - \frac{k|q_2q_0|}{(x - 2{,}0\ \text{m})^2}\right)\hat{i}$$

COMPROBACIÓN En los pasos 2, 3 y 4 de la parte (*b*), ambas fuerzas tienden a cero cuando x tiende a infinito, como era de esperar. Además, tal como estaba previsto, el módulo de la fuerza en el paso 3 tiende a infinito cuando x tiende a 2,0 m.

OBSERVACIÓN La carga q_2 está localizada entre la q_1 y q_0, lo cual podría inducir a pensar que la presencia de q_2 podría afectar a la fuerza $\vec{F}_{10}$ que ejerce la q_1 sobre la q_0. Sin embargo, esto no es así, ya que la presencia de q_2 no tiene influencia en la fuerza que ejerce la q_1 sobre la q_0. (Este hecho se denomina principio de superposición.) La figura 21.9 muestra la componente x de la fuerza F_x sobre q_0 como una función de su posición x en la región $2\ \text{m} < x < \infty$. Cerca de q_2 domina la fuerza debida a q_2, y como las cargas opuestas se atraen, la fuerza sobre q_0 está dirigida hacia el sentido negativo de las x. Para $x >> 2$ m, la fuerza está dirigida en el sentido positivo de las x porque la distancia entre q_1 y q_2 es despreciable, de modo que la fuerza debida a las dos cargas es casi la misma que si hubiese una única carga de +15 nC.

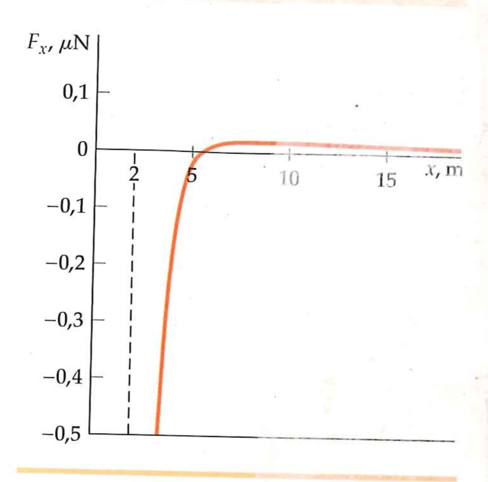


FIGURA 21.9

PROBLEMA PRÁCTICO 21.4 Si q_0 se encuentra en $x = 1$ m, determinar la fuerza neta que actúa sobre q_0.

Para que un sistema de cargas permanezca estacionario, deben existir otras fuerzas no eléctricas actuando sobre las cargas, de modo que la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre cada carga sea cero. En el ejemplo anterior y en los siguientes, supondremos la existencia de tales fuerzas, de modo que todas las cargas permanecen estacionarias.

Ejemplo 21.5 Fuerza neta en dos dimensiones

La carga $q_1 = +\ 25$ nC está en el origen, la carga $q_2 = -15$ nC está sobre el eje x en $x = 2$ m, y la carga $q_0 = +\ 20$ nC está en el punto $x = 2$ m, $y = 2$ m, como se indica en la figura 21.10. Determinar el vector de la fuerza resultante sobre q_0.

PLANTEAMIENTO La fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por cada una de las cargas sobre q_0. Calcularemos cada una de las fuerzas a partir de la ley de Coulomb y la escribiremos en función de sus componentes rectangulares.

SOLUCIÓN

1. Dibujar las posiciones de las tres cargas en un sistema de ejes coordenados. Mostrar la fuerza resultante $\vec{F}$ sobre la carga q_0 como suma vectorial de las fuerzas $\vec{F}_{10}$ debida a q_1 y $\vec{F}_{20}$ debida a q_2 (figura 21.10*a*):

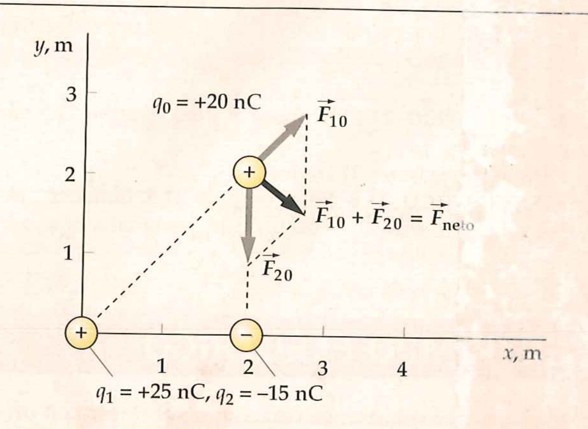


FIGURA 21.10*a*

2. La fuerza resultante $\vec{F}$ sobre q_0 es la suma de las fuerzas individuales:

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$$

así $\Sigma F_x = F_{10x} + F_{20x}$ y $\Sigma F_y = F_{10y} + F_{20y}$

3. La fuerza $\vec{F}_{10}$ está dirigida a lo largo de la línea dirigida de q_1 a q_0. Utilizar $r_{10} = 2{,}0\sqrt{2}$ m como distancia entre q_1 y q_0, para calcular el módulo de la fuerza:

$$F_{10} = \frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2{,}0\sqrt{2}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 5{,}62 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

4. Como $\vec{F}_{10}$ forma un ángulo de 45° con los ejes x e y, sus componentes x e y son iguales entre sí:

$$F_{10x} = F_{10y} = F_{10} \cos 45° = (5{,}62 \times 10^{-7}\mathrm{N}) \cos 45°$$

$$= 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

5. La fuerza $\vec{F}_{20}$ ejercida por q_2 sobre q_0 es atractiva en la dirección $-y$, como se muestra en la figura 21.10*a*:

$$\vec{F}_{20} = -\frac{k|q_2 q_0|}{r_{20}^2}\hat{j} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(15 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2{,}0\ \mathrm{m})^2}\hat{j}$$

$$= -(6{,}74 \times 10^{-7}\mathrm{N})\hat{j}$$

6. Calcular las componentes de la fuerza resultante:

$$F_x = F_{10x} + F_{20x} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + 0 = 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

$$F_y = F_{10y} + F_{20y} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + (-6{,}74 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})$$

$$F_y = -2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

7. Dibujar la fuerza resultante (figura 21.10*b*) y sus dos componentes:

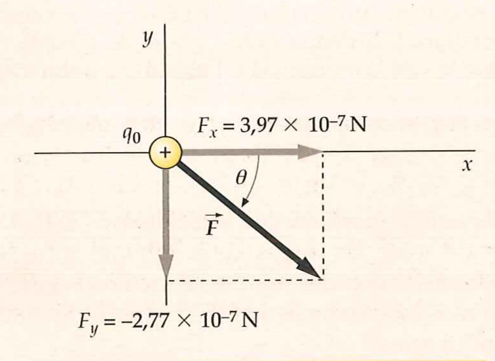


FIGURA 21.10*b*

8. El módulo de la fuerza resultante se determina a partir de sus componentes:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2 + (-2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2}$$

$$= 4{,}84 \times 10^{-7}\ \mathrm{N} = \boxed{4{,}8 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}}$$

9. La fuerza resultante apunta hacia la derecha y hacia abajo, como se muestra en la figura 21.10*b*, formando con el eje x un ángulo θ dado por:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2{,}77}{3{,}97} = -0{,}698$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\,(-0{,}698) = -34{,}9° = \boxed{-35°}$$

COMPROBACIÓN Comparando los resultados de los pasos 3 y 5, podemos constatar que los módulos de estas dos fuerzas son relativamente parecidos aunque $|q_1|$ es algo mayor que $|q_2|$, ya que la diferencia entre el valor de q_2 y q_0 es menor que la existente entre q_1 y q_0.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.5 Expresar $\hat{r}_{10}$ del ejemplo 21.5 en combinación lineal de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.6 En el ejemplo 21.5, donde x_{10} es la componente de $\hat{r}_{10}$, ¿la componente x de la fuerza $\vec{F}_{10} = (kq_1q_0/r_{10}^2)\hat{r}_{10}$ es igual a kq_1q_0/x_{10}^2?

21.4 EL CAMPO ELÉCTRICO

La fuerza eléctrica ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de acción a distancia, semejante a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa sobre otra. La idea de acción a distancia presenta un problema conceptual difícil. ¿Cuál es el mecanismo según el cual una partícula puede ejercer una fuerza sobre otra a través del espacio

vacío que existe entre las partículas? Supongamos que una partícula cargada situada en un punto determinado se mueve súbitamente. ¿Variaría instantáneamente la fuerza ejercida sobre otra partícula situada a la distancia r de la primera? Para evitar el problema de la acción a distancia se introduce el concepto de **campo eléctrico**. Una carga crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio y este campo ejerce una fuerza sobre la otra carga. La fuerza es así ejercida por el campo $\vec{E}$ existente en la posición de la segunda carga, más que por la propia primera carga que se encuentra a cierta distancia. Los cambios del campo se propagan a través del espacio con la velocidad de la luz, c. Así, si una carga se mueve súbitamente, la fuerza que ejerce sobre otra carga a la distancia r no se modifica hasta que transcurre el tiempo r/c.

La figura 21.11*a* muestra una serie de cargas puntuales, q_1, q_2 y q_3, dispuestas arbitrariamente en el espacio. Estas cargas producen un campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto del espacio. Si situamos una pequeña carga testigo q_0 en algún punto próximo, ésta experimentará la acción de una fuerza debido a las otras cargas. La fuerza resultante ejercida sobre q_0 es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre q_0 por cada una de las otras cargas del sistema. Como cada una de estas fuerzas es proporcional a q_0, la fuerza neta será proporcional a q_0. El campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto se define por esta fuerza dividida por q_0:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (q_0 \text{ pequeña}) \qquad 21.5$$

DEFINICIÓN: CAMPO ELÉCTRICO

La unidad del SI del campo eléctrico es el newton por coulomb (N/C). Además, la carga testigo q_0 ejercerá una fuerza sobre cada una de las otras cargas (figura 21.1*b*), produciéndoles movimiento; por ello, se debe considerar la carga q_0 tan pequeña como para que las fuerzas ejercidas sobre las otras cargas sean despreciables. De esta forma, el campo eléctrico en el lugar donde se coloca la carga q_0 se define mediante la ecuación 21.5 en el límite en el que la carga q_0 tiende a cero. En la tabla 21.2 se presentan las magnitudes de algunos de los campos eléctricos que encontramos en la naturaleza.

El campo eléctrico es un vector que describe la condición en el espacio creada por el sistema de cargas puntuales. Desplazando la carga testigo q_0 de un punto a otro, podemos determinar $\vec{E}$ en todos los puntos del espacio (excepto el ocupado por una carga q). El campo eléctrico $\vec{E}$ es, por lo tanto, una función vectorial de la posición. La fuerza ejercida sobre una carga testigo q_0 en cualquier punto está relacionada con el campo eléctrico en dicho punto por

$$\vec{F} = q_0\vec{E} \qquad 21.6$$

PROBLEMA PRÁCTICO 21.7

Cuando se coloca una carga testigo de 5 nC en un punto determinado, sufre la acción de una fuerza de 2×10^{-4} N en la dirección creciente de x. ¿Cuál es el campo eléctrico $\vec{E}$ en dicho punto?

PROBLEMA PRÁCTICO 21.8

¿Cuál es la fuerza que actúa sobre un electrón situado en el punto donde el campo eléctrico es $\vec{E} = (4{,}0 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{i}$?

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual q_i en la posición r_i puede calcularse a partir de la ley de Coulomb. Si situamos una pequeña carga testigo positiva q_0 en algún punto P a la distancia r_{iP} de la carga q_i, la fuerza que actúa sobre ella es

$$\vec{F}_{i0} = \frac{kq_iq_0}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP}$$

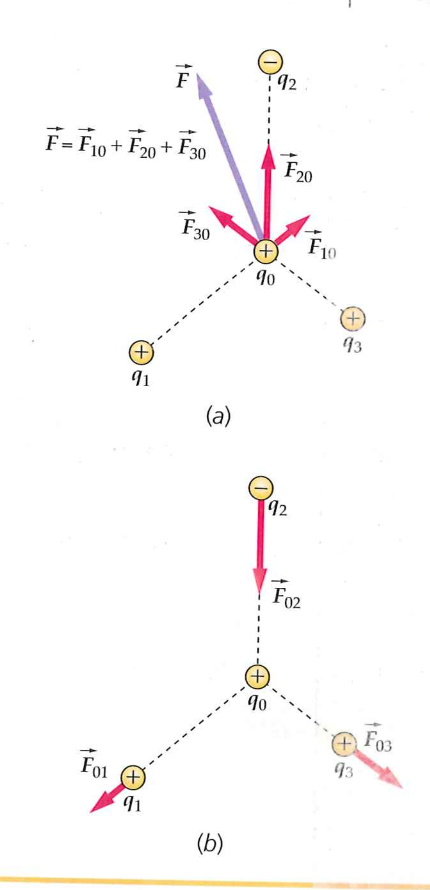


FIGURA 21.11 (*a*) Una pequeña carga testigo (o de prueba) q_0 en las proximidades de un sistema de cargas q_1, q_2, q_3,... experimenta una fuerza $\vec{F}$ proporcional a q_0. La relación $\vec{F}/q_0$ es el campo eléctrico en esa posición. (*b*) La carga testigo q_0 ejerce también una fuerza sobre cada una de las otras cargas que le rodean y cada una de estas fuerzas es proporcional a q_0.

Tabla 21.2 Algunos campos eléctricos de la naturaleza

	E, N/C
En los cables domésticos	10^{-2}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^2
En la luz solar	10^3
Bajo una nube tormentosa	10^4
En la descarga de un relámpago	10^4
En un tubo de rayos X	10^6
En el electrón de un átomo de hidrógeno	5×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	2×10^{21}

* Esta definición es semejante a la del campo gravitatorio terrestre, formulada en la sección 4.3 como la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre un cuerpo.

El campo eléctrico en el punto P debido a la carga q_i (figura 21.12) es, por lo tanto,

$$\vec{E}_{iP} = \frac{kq_i}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP} \qquad 21.7$$

LEY DE COULOMB PARA EL CAMPO $\vec{E}$

donde $\hat{r}_{iP}$ es un vector unitario que apunta desde el **punto fuente** i al punto de observación del campo o **punto campo** P.

El campo eléctrico resultante debido a una distribución de cargas puntuales se determina sumando los campos originados por cada carga separadamente:

$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{iP} \qquad 21.8$$

CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

Esto implica que el campo eléctrico satisface el principio de superposición.

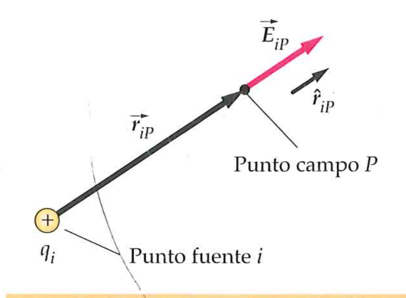


FIGURA 21.12 El campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto P debido a la carga q_i colocada en un punto i.

! Aunque la expresión del campo eléctrico (ecuación 21.7) depende de la localización del punto P, el campo no depende, sin embargo, de la carga testigo q_0; por ello, su valor no aparece en la ecuación 21.7.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo del campo eléctrico resultante

PLANTEAMIENTO Para calcular el campo eléctrico resultante $\vec{E}_P$ en un punto P generado por una distribución de cargas puntuales, se debe dibujar, en primer lugar, la configuración de las cargas. En el esquema hay que incluir los ejes de coordenadas y un punto arbitrario donde se desea calcular el campo.

SOLUCIÓN

1. Definir r_{iP} como el vector que tiene su origen en cualquier carga i y su final en el punto P, y $\vec{E}_{iP}$ como el vector del campo eléctrico generado por la carga i en el punto P.
2. Si el punto P y todas las cargas puntuales no están alineados, se deben fijar los ángulos que cada vector $\vec{E}_{iP}$ forma con los tres ejes.
3. Determinar las tres componentes de cada vector campo $\vec{E}_{iP}$ en los ejes y calcular las componentes del campo eléctrico resultante $\vec{E}_P$.

Ejemplo 21.6 Dirección del campo eléctrico — Conceptual

Se coloca una carga positiva $q_1 = +q$ en un punto del eje $x = a$, y otra $q_2 = -2q$ en $x = -a$, tal como muestra la figura 21.13. Dividimos el eje x en tres intervalos: región I ($x < -a$), región II ($-a < x < a$) y región III ($x > a$) ¿Existe algún punto en estas regiones donde el campo eléctrico sea igual a cero? ¿En qué regiones?

PLANTEAMIENTO Sean $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ los campos eléctricos generados por q_1 y q_2, respectivamente. Como q_1 es positiva, $\vec{E}_1$ apuntará en el sentido de alejamiento de la carga y, como q_2 es negativa, $\vec{E}_2$ apuntará hacia la correspondiente carga q_2. El campo eléctrico resultante $\vec{E}$ es la suma vectorial de ambos campos ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$). Por lo tanto, es igual a cero si los campos de cada una de las cargas son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos. Por otro lado, según nos vamos aproximando a dichas cargas, sus respectivos campos tienden a infinito. Además, en puntos muy alejados de ambas cargas, siempre sobre el eje x, el campo resultante se aproxima al ejercido por la carga suma de ambas, $q_1 + q_2$, localizada en el punto medio de ambas cargas, siendo un campo debido a una carga negativa, puesto que $q_1 + q_2$ tiene carga resultante negativa.

SOLUCIÓN

1. En la figura 21.13 se representa la configuración de cargas del problema, mostrando las dos cargas sobre el eje x, y el campo eléctrico, dibujado en forma esquemática, debido a cada una de las cargas en cada una de las regiones I, II y III, denominando los respectivos puntos campo arbitrarios de estas regiones como P_I, P_{II} y P_{III}.

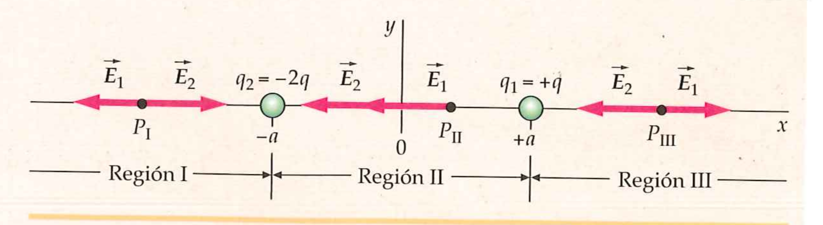


FIGURA 21.13

2. Analizar en qué puntos, de la región I, los campos son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos:

En todos los puntos de la región I, los dos campos eléctricos tienen sentidos opuestos, y el módulo E_2 es mayor que E_1 por dos razones: porque cualquier punto de la región I está más cerca de q_2 que de q_1 y, además, el valor absoluto de q_2 es doble que el de q_1. En consecuencia, en esta región el campo eléctrico resultante no es cero en ninguno de sus puntos.

3. Analizar en qué puntos, de la región II, los campos son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos:

En la región II, los dos campos tienen el mismo sentido y, por lo tanto, en ningún punto se puede anular la suma de ambos vectores.

4. Analizar en qué puntos, de la región III, los campos son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos:

En la región III, los dos campos tiene sentidos opuestos y, en puntos cercanos a $x = a$, E_1 es mayor que E_2 porque en estos puntos próximos a q_1, E_1 tiende a infinito. Por el contrario, en puntos alejados, donde $x >> a$, E_2 es mayor que E_1 porque a grandes distancias de las dos cargas, el sentido del campo viene determinado por el que crea la carga suma de ambas $q_1 + q_2$. Por consiguiente, habrá algún punto de dicha región en donde el campo resultante es igual a cero, puesto que el módulo de E_1 será en él igual al de E_2 y sus sentidos serán opuestos, por lo que se anularán.

COMPROBACIÓN El campo eléctrico resultante se anula en un punto de la región III. Esta anulación se produce porque la carga q_2 es mayor en módulo, está más alejada de todos los puntos de esta región que la q_1, y porque las dos cargas son de signo contrario. El resultado coincide con lo esperado.

Ejemplo 21.7 Campo eléctrico debido a dos cargas positivas en la recta que las une

Una carga positiva $q_1 = +8$ nC se encuentra en el origen y una segunda carga positiva $q_2 = +12$ nC está sobre el eje x a la distancia $a = 3$ m. Determinar el campo eléctrico resultante (a) en el punto A sobre el eje x en $x = 6$ m y (b) en el punto B sobre el eje x en $x = 2$ m.

PLANTEAMIENTO Sean $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ los campos creados por q_1 y q_2, respectivamente. El sentido del campo $\vec{E}_1$ se aleja de q_1 y el sentido del campo $\vec{E}_2$ se aleja de q_2, por ser ambas cargas positivas. El problema trata de determinar el campo resultante en todos los puntos del eje x, mediante la suma vectorial de $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

SOLUCIÓN

(a) 1. La configuración de las cargas viene dada en la figura 21.14. Se dibujan los campos debidos a cada una de las cargas en los puntos A y B:

FIGURA 21.14 Como q_1 y q_2 son cargas positivas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ apuntan en el sentido de alejamiento de las respectivas cargas tanto en A como en B.

2. Calcular $\vec{E}$ en el punto A, utilizando $r_{1A} = |x_A - x_1| = 6{,}0\text{ m} - (-1{,}0\text{ m}) = 7{,}0\text{ m}$ y $r_{2A} = |x_A - x_2| = 6{,}0\text{ m} - (3{,}0\text{ m}) = 3{,}0\text{ m}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{r_{1A}^2}\hat{r}_{1A} + \frac{kq_2}{r_{2A}^2}\hat{r}_{2A} = \frac{kq_1}{(x_A - x_1)^2}\hat{i} + \frac{kq_2}{(x_A - x_2)^2}\hat{i}$$

$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8{,}0 \times 10^{-9}\text{ C})}{(7{,}0\text{ m})^2}\hat{i} + \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9}\text{ C})}{(3{,}0\text{ m})^2}\hat{i}$$

$$= (1{,}47\text{ N/C})\hat{i} + (12{,}0\text{ N/C})\hat{i} = \boxed{(13\text{ N/C})\hat{i}}$$

(*b*) Calcular $\vec{E}$ en el punto *B*, donde $r_{1B} = |x_B - x_1| = 2{,}0\text{ m} - (-1{,}0\text{ m}) = 3{,}0\text{ m}$ y $r_{2B} = |x_B - x_2| = |2{,}0\text{ m} - (3{,}0\text{ m})| = 1{,}0\text{ m}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{r_{1B}^2}\hat{r}_{1B} + \frac{kq_2}{r_{2B}^2}\hat{r}_{2B} = \frac{kq_1}{(x_B - x_1)^2}\hat{i} + \frac{kq_2}{(x_B - x_2)^2}(-\hat{i})$$

$$= \frac{(8{,}99\times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8{,}0\times 10^{-9}\text{ C})}{(3{,}0\text{ m})^2}\hat{i} - \frac{(8{,}99\times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12\times 10^{-9}\text{ C})}{(1{,}0\text{ m})^2}\hat{i}$$

$$= (7{,}99\text{ N/C})\hat{i} - (108\text{ N/C})\hat{i} = \boxed{-(100\text{ N/C})\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN El campo en la parte (*b*) es grande en la dirección de las *x* negativas. Esto es así porque el punto *B* está más cercano de la carga q_2 que de la q_1, siendo q_2 (12 nC) la mayor de las dos.

OBSERVACIÓN El campo eléctrico $\vec{E}_1$ predomina en el campo resultante en los puntos cercanos a $q_1 = 8$ nC. Existe un punto entre q_1 y q_2 en el que el campo total es cero. Una carga testigo puesta en ese punto no experimentaría fuerza alguna. En la figura 21.15, se representa E_x, que es el módulo de campo resultante en el eje *x*, en función de esta coordenada.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.9 A partir de los datos del ejemplo 21.7, localizar el punto del eje *x* donde el campo eléctrico es igual a cero.

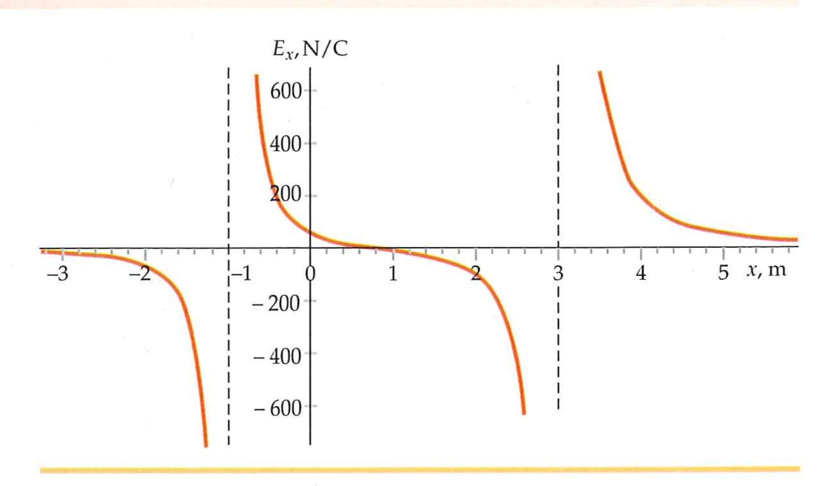


FIGURA 21.15

Ejemplo 21.8 Campo eléctrico en puntos del eje *y* debido a cargas puntuales colocadas en el eje *x*

Inténtelo usted mismo

Una carga puntual $q_1 = +8{,}0$ nC está situada en el origen y una segunda carga $q_2 = +12{,}0$ nC en $x = 4{,}0$ m. Determinar el campo eléctrico en $y = 3{,}0$ m.

PLANTEAMIENTO Como en el ejemplo 21.7, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en puntos del eje *y* debido a la carga q_1 tiene la propia dirección de dicho eje, y el $\vec{E}_2$ debido a q_2 se encuentra en el segundo cuadrante del plano. Para determinar el vector campo $\vec{E}$, lo haremos calculando primero por separado sus componentes *x* e *y*.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. En la figura 21.16*a*, están colocadas las cargas en el sistema de coordenadas y se propone un punto arbitrario del eje donde se dibuja el campo debido a cada una de las cargas; se indican las distancias y ángulos de forma apropiada.

Respuestas

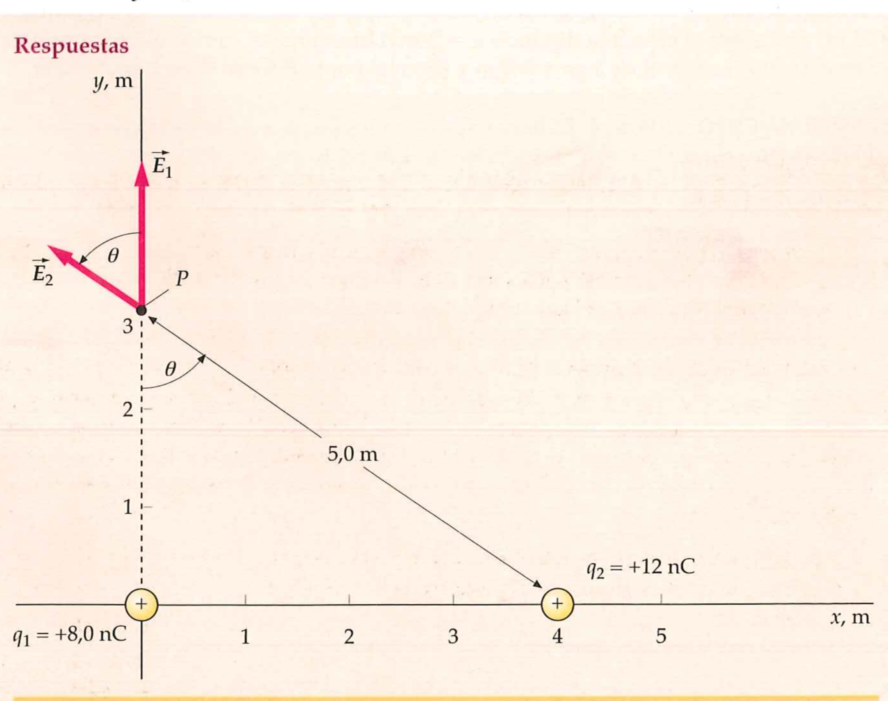


FIGURA 21.16*a*

2. Calcular el módulo del campo $\vec{E}_1$ debido a q_1 en el punto (0, 3,0 m). Hallar las componentes sobre los ejes x e y de este campo. — $E_1 = kq_1/y^2 = 7{,}99$ N/C; $E_{1x} = 0$, $E_{1y} = E_1 = 7{,}99$ N/C

3. Calcular el módulo del campo $\vec{E}_2$ debido a q_2. — $E_2 = 4{,}32$ N/C

4. Expresar las componentes x e y de $\vec{E}_2$ en función del ángulo θ. — $E_{2x} = -E_2 \operatorname{sen}\theta$; $E_{2y} = E_2 \cos\theta$

5. Calcular sen θ y cos θ. — $\operatorname{sen}\theta = 0{,}80$; $\cos\theta = 0{,}60$

6. Calcular E_{2x} y E_{2y}. — $E_{2x} = -3{,}46$ N/C; $E_{2y} = 2{,}59$ N/C

7. En la figura 21.16*b*, se dibujan las componentes del campo resultante, incluyendo el vector $\vec{E}$ y el ángulo que forma este vector con el eje x.

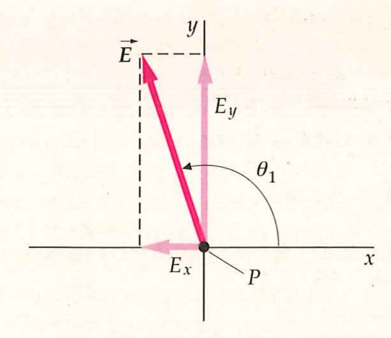


FIGURA 21.16*b*

8. Determinar las componentes x e y del campo resultante $\vec{E}$. — $E_x = E_{1x} + E_{2x} = -3{,}46$ N/C; $E_y = E_{1y} + E_{2y} = 10{,}6$ N/C

9. Calcular el módulo de $\vec{E}$ a partir de sus componentes. — $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 11{,}2 \text{ N/C} = \boxed{11 \text{ N/C}}$

10. Determinar el ángulo θ_1 formado por $\vec{E}$ con el eje x. — $\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \boxed{108°}$

COMPROBACIÓN Tal como era de esperar, el módulo de E es mayor que el de E_1 y el de E_2, pero menor que la suma de ambos. (Este resultado es lógico porque el ángulo entre $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ es diferente de cero.)

Ejemplo 21.9 Campo eléctrico debido a dos cargas del mismo módulo y signo contrario

Una carga $+q$ se encuentra en $x = a$ y una segunda carga $-q$ en $x = -a$ (figura 21.17). (*a*) Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en un punto arbitrario $x > a$. (*b*) Determinar la forma límite del campo eléctrico para $x >> a$.

PLANTEAMIENTO Usando el principio de superposición, $\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P}$, calculamos el campo eléctrico en el punto P. Para $x > a$, el campo eléctrico $\vec{E}_+$ debido a la carga positiva tiene la dirección de las x positivas y el $\vec{E}_-$ debido a la carga negativa la de las x negativas. La distancia del punto P a la carga positiva es $x - a$, y a la carga negativa $x - (-a) = x + a$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La figura 21.17 muestra la distribución de las cargas y sus respectivas distancias al punto en el que se mide el campo:

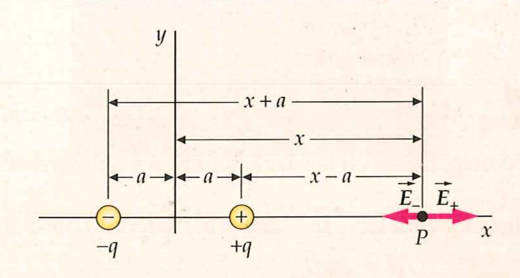


FIGURA 21.17

2. Calcular el campo $\vec{E}$ debido a las dos cargas para $x > a$: (*Observación*: la ecuación de la derecha es válida sólo para $x > a$.):

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{kq}{[x-a]^2}\hat{i} + \frac{kq}{[x-(-a)]^2}\left(-\hat{i}\right)$$
$$= kq\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right]\hat{i}$$

3. Poner los términos incluidos entre corchetes bajo un denominador común y simplificar:

$$\vec{E} = kq\left[\frac{(x+a)^2-(x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}\right]\hat{i} = \boxed{kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\hat{i} \qquad x > a}$$

(*b*) En el límite $x >> a$, podemos despreciar a^2 comparado con x^2, y simplificar así el denominador:

$$\vec{E} = kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\hat{i} \approx kq\frac{4ax}{x^4}\hat{i} = \boxed{\frac{4kqa}{x^3}\hat{i} \qquad x \gg a}$$

COMPROBACIÓN Los dos resultados de los recuadros tienden a cero cuando x tiende a infinito, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN La figura 21.18 muestra E_x en función de x para todo valor de x, para q = 1 nC y a = 1 cm. Lejos de las cargas, el campo viene dado por

$$\vec{E} = \frac{4kqa}{|x|^3}\hat{i} \qquad |x| \gg a$$

Entre las cargas, la contribución de cada una de ellas se verifica en la dirección negativa. Una expresión válida para todo valor de x es

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-a)^2}\hat{e}_+ + \frac{k(-q)}{(x+a)^2}\hat{e}_- \qquad -a < x < a$$

donde el vector unitario $\hat{e}_+$ tiene el sentido de las x positivas para x mayor o igual que a, y el vector $\hat{e}_-$ el de las x negativas para x menor que $-a$. (Todo ello con la excepción de $x = -a$.) (Obsérvese que $\hat{e}_+ = \frac{x-a}{|x-a|}\hat{i}$ y $\hat{e}_- = \frac{x+a}{|x+a|}\hat{i}$.)

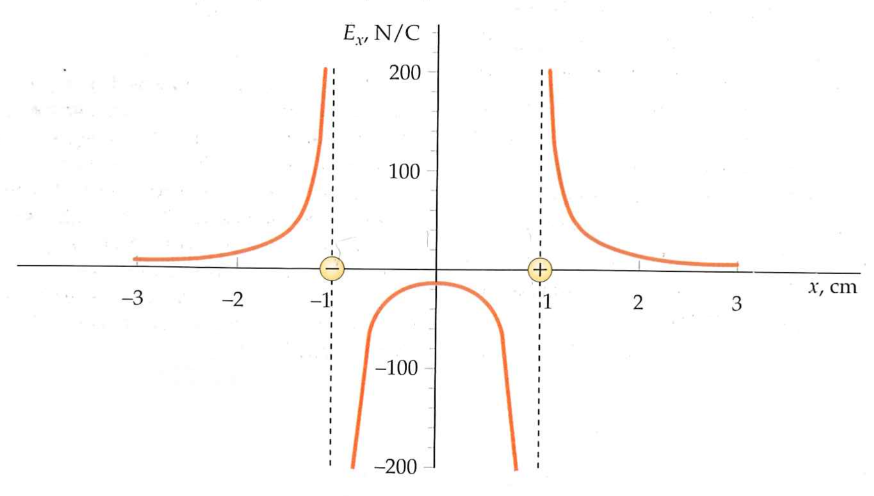


FIGURA 21.18 Gráfica de E_x versus x para la distribución de carga del ejemplo 21.9.

DIPOLOS ELÉCTRICOS

Un sistema de dos cargas iguales y opuestas q separadas por una pequeña distancia L se denomina **dipolo eléctrico**. Su intensidad y su orientación se describen mediante el **momento dipolar eléctrico** $\vec{p}$, un vector que apunta de la carga negativa a la positiva y cuyo módulo es el producto $q\vec{L}$ (figura 21.19):

$$\vec{p} = q\vec{L} \qquad 21.9$$

DEFINICIÓN: MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO

$\vec{p}$ $\quad \vec{p} = q\vec{L}$

$\vec{L}$

$-q$ ⊖ ⊕ $+q$

FIGURA 21.19 Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas iguales y opuestas separadas por una pequeña distancia L. El módulo del momento dipolar es $\vec{p} = q\vec{L}$, donde q es el valor absoluto de una de las cargas y $\vec{L}$ es el módulo del vector posición de la carga positiva respecto de la negativa.

donde $\vec{L}$ es un vector cuyo origen está en la carga negativa y su extremo en la carga positiva.

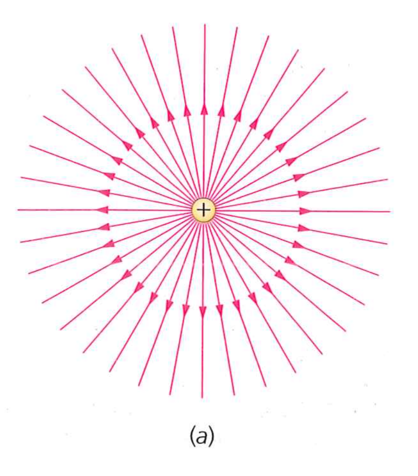
Para la configuración de la figura 21.17, $\vec{L} = 2a\hat{i}$ y el momento dipolar eléctrico es

$$\vec{p} = 2aq\hat{i}$$

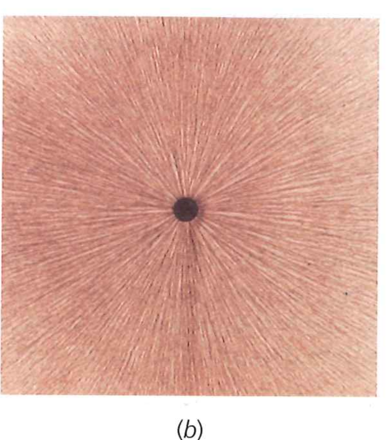
En función del momento dipolar $\vec{p}$, el campo eléctrico sobre el eje del dipolo en un punto a gran distancia $|x|$ posee la dirección y sentido del momento dipolar y su magnitud es

$$E = \frac{2kp}{|x|^3} \qquad 21.10$$

(Véase el ejemplo 21.9). En un punto alejado de un dipolo en cualquier dirección, el módulo del campo eléctrico es proporcional al momento dipolar y decrece con el cubo de la distancia. Cuando un sistema tiene una carga neta distinta de cero, el campo eléctrico disminuye según $1/r^2$ a grandes distancias. En un sistema con carga neta nula, el campo eléctrico disminuye con mayor rapidez con la distancia. En el caso de un dipolo eléctrico, el campo disminuye según $1/r^3$ en todas las direcciones.



(*a*)



(*b*)

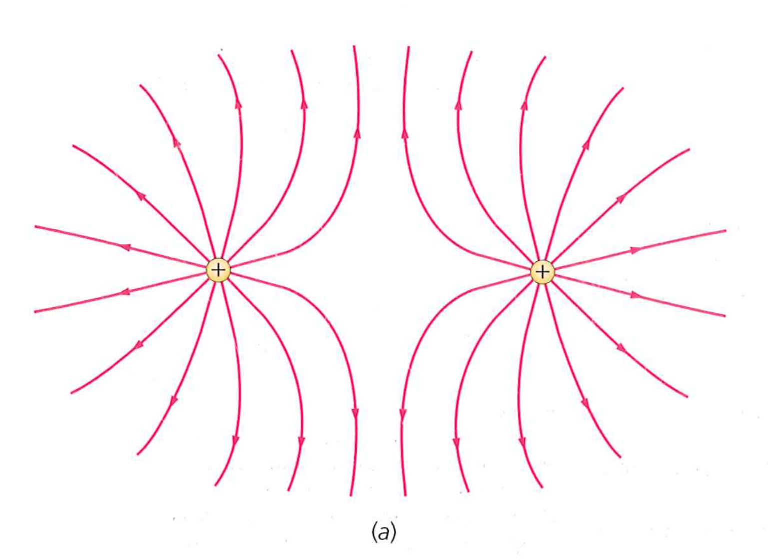
FIGURA 21.20 (*a*) Líneas de campo eléctrico o líneas de fuerza de una sola carga puntual positiva. Si la carga fuera negativa, las flechas invertirían su dirección. (*b*) Las mismas líneas de campo eléctrico puestas de manifiesto por hebras de hilo suspendidas en aceite. El campo eléctrico del objeto cargado en el centro induce cargas opuestas en los extremos de cada trocito de hilo, haciendo que se alineen por sí mismos paralelamente al campo. *(Harold M. Waage.)*

21.5 LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

El campo eléctrico puede representarse dibujando líneas que indiquen su dirección. En cualquier punto, el vector campo $\vec{E}$ es tangente a las líneas de campo eléctrico, que se llaman también **líneas de fuerza** porque muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva. En cualquier punto próximo a una carga positiva, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la carga; por lo tanto, cerca de una carga positiva las líneas de campo eléctrico también apuntan alejándose de ésta. Igualmente, las líneas del campo eléctrico convergen hacia un punto ocupado por una carga negativa.

La figura 21.20 muestra las líneas de campo eléctrico de una sola carga puntual positiva. El espaciado de las líneas está relacionado con la intensidad del campo eléctrico. A medida que nos alejamos de la carga, el campo eléctrico se debilita y las líneas se separan. Consideremos una superficie esférica de radio r con su centro en la carga. Su área es $4\pi r^2$. Así, cuando r crece, la densidad de las líneas de campo (el número de líneas por unidad de superficie) decrece según $1/r^2$, es decir, del mismo modo que decrece E. Por lo tanto, si adoptamos el convenio de dibujar un número fijo de líneas desde una carga puntual, siendo proporcional dicho número a la carga q, y si dibujamos las líneas simétricamente alrededor de la carga puntual, la intensidad del campo vendrá indicada por la densidad de las líneas. Cuanto más próximas se encuentran las líneas, más intenso es el **campo eléctrico**.

La figura 21.21 muestra las líneas de fuerza para dos cargas puntuales positivas iguales, q, separadas por una distancia pequeña. En un punto próximo a una de las cargas, el campo es debido prácticamente sólo a esta carga, pues la otra está tan alejada que podemos despreciar su contribución al campo. En consecuencia, las líneas de campo próximas a una cualquiera de las cargas son radiales e igualmente espa-



(*a*)



(*b*)

FIGURA 21.21 (*a*) Líneas de campo eléctrico correspondientes a dos cargas puntuales positivas. Las flechas se invertirían si ambas cargas fueran negativas. (*b*) Las líneas del mismo campo eléctrico puestas de manifiesto con hebras de hilo suspendidas en aceite. *(Harold M. Waage.)*

ciadas. Puesto que las cargas son iguales, dibujaremos un número igual de líneas saliendo de cada una de ellas. A una distancia muy grande de las cargas, los detalles del sistema carecen de importancia y el sistema se comporta como una carga puntual de magnitud $2q$. (Por ejemplo, si las dos cargas estuvieran separadas 1 mm y las observásemos desde un punto situado a 100 km, parecerían una carga única.) Así, lejos de las cargas, el campo es aproximadamente igual que el generado por una carga puntual de magnitud $2q$ y las líneas están igualmente espaciadas, aproximadamente. Observando la figura 21.21 podemos deducir que el campo eléctrico que existe en el espacio entre las dos cargas es más débil, ya que el número de líneas en esta región es muy inferior al número de líneas que existe a la derecha o a la izquierda de las cargas, en donde las líneas están más juntas. Por supuesto, esta información también puede obtenerse mediante el cálculo directo del campo en los puntos de estas regiones.

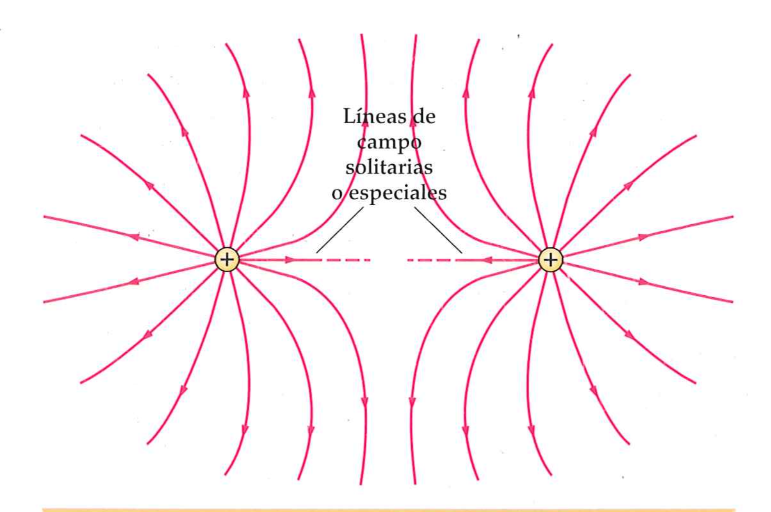


FIGURA 21.22 Existen infinitas líneas de campo que salen de las dos cargas, dos de las cuales son líneas especiales que denominamos líneas de campo solitarias. Estas dos líneas deberían terminar en el punto medio de separación entre las dos cargas, donde, al anularse el campo, las líneas de campo desaparecen.

El razonamiento utilizado en los ejemplos precedentes puede aplicarse para dibujar las líneas de fuerza de cualquier sistema de cargas puntuales. En un lugar próximo a cada una de las cargas, las líneas del campo poseen la misma separación y según el signo de la carga entran en ella o salen radialmente. Lejos de todas las cargas, los detalles de la estructura del sistema no son importantes, y las líneas del campo son las mismas que las correspondientes a una única carga puntual igual a la carga neta del sistema. Resumimos a continuación las reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

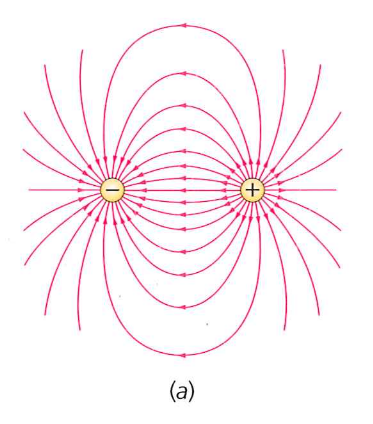
Dibujar líneas de campo

PLANTEAMIENTO Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas (o en el infinito) y terminan en las negativas (o en el infinito).*

SOLUCIÓN

1. Las líneas se dibujan uniformemente espaciadas, y saliendo o entrando en la carga.
2. El número de líneas que abandonan una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional al módulo de la carga.
3. La densidad de líneas (número de ellas por unidad de área perpendicular a las mismas) en un punto es proporcional al valor del módulo del campo en dicho punto.
4. A grandes distancias de un sistema de cargas, las líneas de campo están igualmente espaciadas y son radiales, como si procediesen de una sola carga puntual igual a la carga neta del sistema.

COMPROBACIÓN No pueden cortarse nunca dos líneas de campo. (Si dos líneas de campo se cruzaran, ésto indicaría dos direcciones para $\vec{E}$ en el punto de intersección, lo cual es imposible.)



(*a*)



(*b*)

FIGURA 21.23 (*a*) Líneas de campo en un dipolo eléctrico. (*b*) Las mismas líneas puestas de manifiesto con hebras de hilo en aceite. *(Harold M. Waage.)*

En la figura 21.23, se muestran las líneas de campo eléctrico para un dipolo eléctrico. Muy cerca de la carga positiva, las líneas son radiales y dirigidas hacia fuera. Muy cerca de la carga negativa, las líneas son radiales y dirigidas hacia dentro.

* Definimos líneas de campo solitarias como aquellas que no siguen la regla general, ya que salen de cualquiera de las cargas positivas, tal como se representa en la figura 21.22, y aunque se dirigen a la otra carga acaban en el punto medio de la distancia entre las dos cargas en donde el campo total es nulo. Entre estas dos cargas positivas existen infinitas líneas de campo, dos de las cuales son líneas solitarias.

Puesto que las cargas tienen el mismo valor, el número de líneas que empiezan en la carga positiva es igual al número de las que terminan en la carga negativa. En este caso, el campo es más intenso en la región entre las cargas, como indica el hecho de que la densidad de líneas del campo en esta región sea muy elevada.

La figura 21.24*a* muestra las líneas de campo eléctrico para una carga negativa $-q$ situada a una distancia pequeña de otra positiva $+2q$. De la carga positiva salen el doble de líneas de las que entran en la carga negativa. Es decir, la mitad de las líneas que comienzan en la carga positiva $+2q$ entran en la carga negativa $-q$ y la otra mitad abandonan el sistema. Muy lejos de las cargas (figura 21.24*b*), las líneas que abandonan el sistema están espaciadas prácticamente de forma simétrica y apuntan radialmente hacia fuera, como si se tratara de una sola carga puntual positiva $+q$.

FIGURA 21.24 (*a*) Líneas de campo eléctrico correspondientes a una carga puntual $+ 2q$ y otra segunda carga puntual $-q$. (*b*) A grandes distancias de las cargas, las líneas son similares a las que se obtienen con una sola carga $+q$ localizada en el centro del sistema de cargas.

Ejemplo 21.10 Líneas de campo eléctrico para dos esferas conductoras

Conceptual

En la figura 21.25 se muestran las líneas de campo correspondientes a dos esferas conductoras. ¿Cuál es el signo y el valor relativo de las cargas sobre las dos esferas?

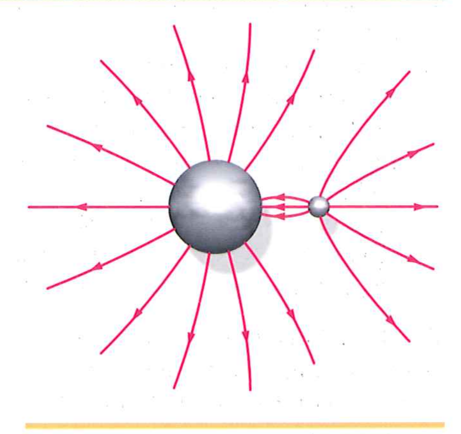


FIGURA 21.25

PLANTEAMIENTO La carga sobre una esfera es positiva si salen más líneas que entran, y negativa si entran más líneas que salen. La relación de los módulos de las cargas es igual a la relación del número neto de líneas que entran o salen.

SOLUCIÓN

1. Contar el número de líneas que salen de la esfera grande: Como 11 líneas de campo eléctrico salen de la esfera grande de la izquierda y 3 entran, el número neto de líneas que salen es 8.

2. Contar el número de líneas que salen de la esfera pequeña: De la esfera pequeña salen 8 líneas de campo eléctrico y ninguna línea acaba en ella; en consecuencia, las líneas totales que salen de esta esfera son 8.

3. Determinar el signo de la carga de cada esfera: Dado que de ambas esferas salen más líneas de campo eléctrico de las que entran, **ambas esferas están cargadas positivamente.**

4. Determinar los valores absolutos de las cargas de las dos esferas: Dado que de ambas esferas sale el mismo número total de líneas de campo eléctrico, **los valores absolutos de las cargas de las dos esferas son iguales.**

La relación establecida entre la intensidad del campo eléctrico y las líneas de campo eléctrico es válida porque el campo varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a una carga puntual. Como el campo gravitatorio de una masa puntual también varía inversamente con el cuadrado de la distancia, el concepto de líneas de fuerza también es útil para dibujar el campo gravitatorio. Cerca de una masa puntual, las líneas de campo gravitatorio convergen hacia la masa, del mismo modo que las líneas de campo eléctrico convergen hacia una carga negativa. Sin embargo, no hay puntos en el espacio en donde las líneas del campo gravitatorio diverjan como lo hacen las líneas de campo eléctrico cerca de una carga positiva, pues la fuerza gravitatoria es siempre atractiva y nunca repulsiva.

21.6 ACCIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO SOBRE LAS CARGAS

Un campo eléctrico uniforme puede ejercer una fuerza sobre una partícula cargada y también puede ejercer una fuerza y un momento de ésta sobre un dipolo eléctrico.

MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES EN CAMPOS ELÉCTRICOS

Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico $\vec{E}$, experimenta la acción de una fuerza $q\vec{E}$. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, ésta adquiere una aceleración

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

siendo m la masa de la partícula. (Con frecuencia la velocidad de un electrón en un campo eléctrico es una fracción importante de la velocidad de la luz; en este caso, las leyes de Newton del movimiento deben sustituirse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.) Si se conoce el campo eléctrico, la relación carga-masa de la partícula puede determinarse midiendo su aceleración. La desviación de los electrones en un campo eléctrico uniforme fue utilizada por J. J. Thomson en 1897 para demostrar la existencia de los electrones y para medir su relación carga/masa. El osciloscopio, el monitor del ordenador y el tubo de rayos catódicos de un televisor son ejemplos de aparatos basados en el movimiento de los electrones en campos eléctricos.



Dibujo esquemático de un tubo de rayos catódicos utilizado en la televisión de color. Los haces de electrones procedentes del cañón electrónico, a la derecha, activan sustancias fosforescentes sobre la pantalla de la izquierda, dando lugar a puntos brillantes cuyos colores dependen de la intensidad relativa de cada haz. Los campos eléctricos establecidos entre las placas deflectoras del cañón (o bien campos magnéticos creados por bobinas) desvían los haces. Éstos barren la pantalla siguiendo una línea horizontal, se desvían hacia abajo y barren otra línea. La pantalla entera es barrida cada 1/30 s. *(Gentileza de Hulon Forrester/Video Display Corporation, Tucker Georgia.)*

Ejemplo 21.11 Electrón moviéndose paralelamente a un campo eléctrico uniforme

Un electrón se proyecta en un campo eléctrico uniform $\vec{E} = (1000\ \text{N/C})\hat{i}$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (2{,}00 \times 10^6\ \text{m/s})\hat{i}$ en la dirección del campo (figura 21.26). ¿Qué distancia recorrerá el electrón antes de que momentáneamente quede en reposo?

PLANTEAMIENTO Como la carga del electrón es negativa, la fuerza $\vec{F} = -e\vec{E}$ que actúa sobre él posee un sentido opuesto al del campo. Como $\vec{E}$ es constante, la fuerza también lo es y, por lo tanto, podemos utilizar las fórmulas del movimiento con aceleración constante del capítulo 2. Suponemos que el campo tiene la dirección positiva de x.

$\vec{E}$ · $\vec{v}_0$ · $-e$

FIGURA 21.26

SOLUCIÓN

1. El desplazamiento Δx está relacionado con las velocidades inicial y final: $$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x$$
2. La aceleración se obtiene de la segunda ley de Newton: $$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-eE_x}{m}$$
3. Cuando $v_x = 0$, el desplazamiento es: $$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{0 - v_{0x}^2}{2(-eE_x/m)} = \frac{mv_0^2}{2eE} = \frac{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2{,}00 \times 10^6\ \text{m/s})^2}{2(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1000\ \text{N/C})}$$ $$= 1{,}14 \times 10^{-2}\ \text{m} = \boxed{1{,}14\ \text{cm}}$$

COMPROBACIÓN EL desplazamiento Δx es positivo, tal como era de esperar para cualquier objeto moviéndose en la dirección positiva de las x.

Ejemplo 21.12 Electrón moviéndose perpendicularmente a un campo eléctrico uniforme

Un electrón se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniform $\vec{E} = (-2{,}0 \text{ kN/C})\hat{j}$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (1{,}0 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$ en dirección perpendicular al campo (figura 21.27). (*a*) Comparar la fuerza gravitatoria que existe sobre el electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él. (*b*) ¿Cuánto se habrá desviado el electrón si ha recorrido 1 cm en la dirección x?

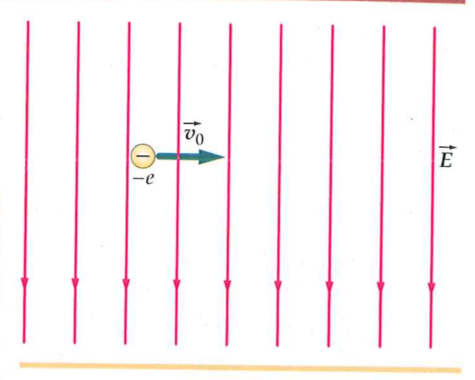


FIGURA 21.27

PLANTEAMIENTO (*a*) Calcular la relación entre la fuerza eléctrica $|q|E = eE$ y la fuerza gravitatoria mg. (*b*) Como mg es despreciable, la fuerza sobre el electrón es $-eE$ verticalmente hacia arriba. El electrón se mueve, por lo tanto, con velocidad horizontal constante v_x y se desvía hacia arriba una distancia $\Delta y = \frac{1}{2}at^2$, donde t es el tiempo invertido en recorrer 1 cm en la dirección x.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular la relación entre el módulo de la fuerza eléctrica, F_e, y el módulo de la fuerza gravitatoria, F_g:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg})(9{,}81 \text{ N/kg})} = \boxed{3{,}6 \times 10^{13}}$$

(*b*) 1. Expresar la desviación vertical en función de la aceleración a y el tiempo t:

$$\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

2. El tiempo necesario para que el electrón se desplace una distancia x con velocidad horizontal constante v_0 es:

$$t = \frac{\Delta x}{v_0}$$

3. Para calcular Δy, usar $a_y = eE/m$, y el valor obtenido de t:

$$\Delta y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{\Delta x}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg}}\left(\frac{0{,}010 \text{ m}}{10^6 \text{ m/s}}\right)^2$$

$$= \boxed{1{,}8 \text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 4 es positivo, hacia arriba, como era de esperar para un objeto acelerándose hacia arriba y que inicialmente se movía horizontalmente.

OBSERVACIÓN (*a*) Como es usual, la fuerza eléctrica es enorme comparada con la fuerza gravitatoria. Así, no es necesario considerar la gravedad al diseñar un tubo de rayos catódicos, por ejemplo, ni para calcular la desviación del electrón en el ejemplo anterior. De hecho, un tubo de imágenes de televisión funciona igualmente bien aunque esté invertido, como si la gravedad no existiera. (*b*) La trayectoria de un electrón que se mueve en un campo eléctrico uniforme es una parábola, análogamente a la trayectoria de una masa que se mueve en un campo gravitatorio uniforme.

Ejemplo 21.13 Campo eléctrico en una impresora de inyección de tinta

Póngalo en su contexto

Supongamos que acabamos de imprimir un extenso trabajo (para su profesor de inglés). Una pregunta que podría surgirnos de inmediato sería cuál es el mecanismo con el que la impresora coloca la tinta en el lugar apropiado. Realizamos una búsqueda en Internet y encontramos un esquema similar al de la figura 21.28. En dicho esquema, se muestra que las gotas de tinta se cargan y se hacen pasar por el campo eléctrico uniforme generado por dos placas de metal que tienen cargas de signos opuestos. Con los conocimientos estudiados en este tema, podríamos determinar cuál debe ser el campo eléctrico necesario entre las placas de este tipo de impresora. Prosiguiendo un poco más la búsqueda, encontramos que las gotas de tinta, de 40 micras de diámetro, tienen una velocidad inicial de 40 m/s, y que cuando una de ellas tiene una carga 2 nC se desvía 3 mm hacia arriba en un recorrido entre las placas de 1 cm. Determinar el campo eléctrico despreciando los efectos de la gravedad en el movimiento de las gotas.

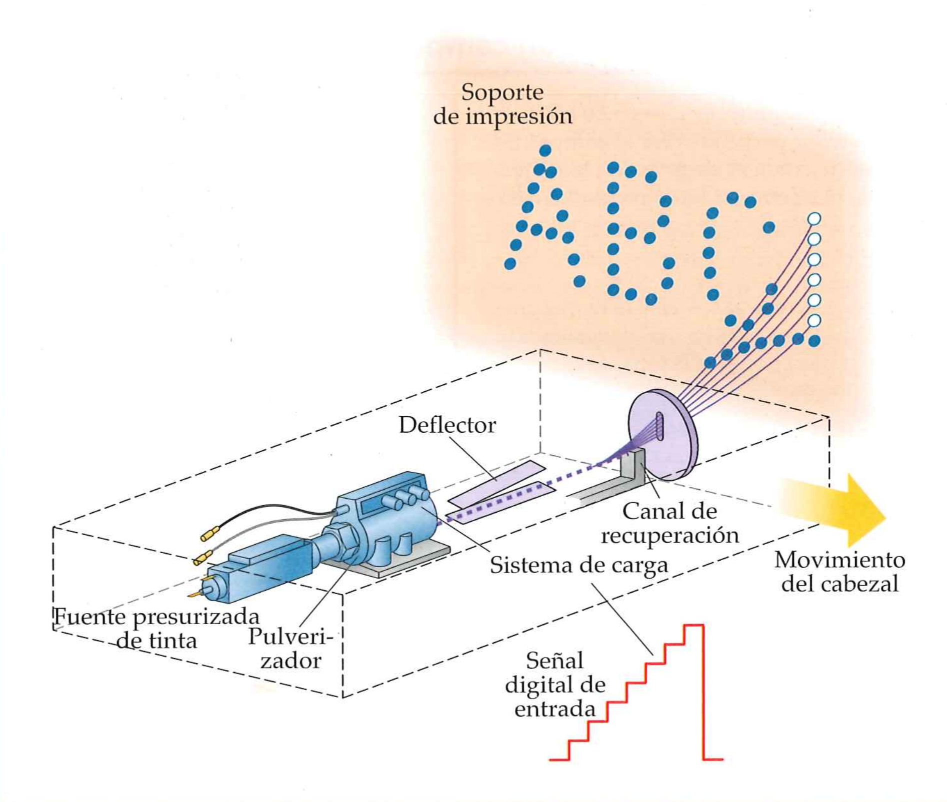


FIGURA 21.28 Impresora de inyección de tinta. La tinta sale del pulverizador en pequeñas gotas bien diferenciadas. A cada una de estas pequeñas gotas, que formarán un punto en la imagen, se le introduce una determinada cantidad de carga. Las placas con cargas opuestas constituyen el mecanismo para desviar las gotas. Cuanto mayor sea la carga adquirida por las gotas mayor será la desviación sufrida por las mismas al pasar entre las placas. Las gotas que no se desvían hacia arriba por no haber adquirido carga se drenan, retornando al depósito de tinta. *(Gentileza de Videojet Systems International.)*

PLANTEAMIENTO El campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas ejerce sobre la gota de tinta una fuerza eléctrica constante $\vec{F}$ siendo $\vec{F} = q\vec{E}$. El objetivo es determinar E. La fuerza $\vec{F}$ queda fijada mediante la ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. Por cinemática se puede calcular la aceleración, y la masa de la gota se puede determinar considerando el valor del radio y sabiendo que la densidad de la tinta es de 1000 kg/m³, es decir, idéntica a la del agua.

SOLUCIÓN

1. El campo eléctrico es igual a la fuerza dividida por la carga: $E = \dfrac{F}{q}$
2. La fuerza, dirigida hacia arriba en el sentido y, es igual a la masa por la aceleración: $F = ma_y$
3. El desplazamiento vertical se obtiene mediante las fórmulas de la cinemática, con aceleración constante y velocidad inicial $v_{0y} = 0$: $\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + \frac{1}{2}a_y t^2$
4. El tiempo de movimiento horizontal de la gota entre las placas es el que tarda en recorrer 1 cm a la velocidad de 40 m/s: $\Delta x = v_{0x}t = v_0 t$ por tanto, $t = \Delta x/v_0$
5. Despejando a_y, se obtiene: $a_y = \dfrac{2\Delta y}{t^2} = \dfrac{2\Delta y}{(\Delta x/v_0)^2} = \dfrac{2v_0^2\Delta y}{(\Delta x)^2}$
6. La masa es igual a la densidad por el volumen: $m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$
7. El módulo del campo E viene dado por:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{q} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{q}\frac{2v_0^2\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{\rho r^3 v_0^2\Delta y}{q(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\frac{(1000\ \text{kg/m}^3)(20{,}0\times10^{-6}\ \text{m})^3(40{,}0\ \text{m/s})^2(3{,}00\times10^{-3}\ \text{m})}{(2{,}00\times10^{-9}\ \text{C})(0{,}0100\ \text{m})^2} = \boxed{1{,}61\ \text{kN/C}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades en la última línea del paso 7 son kg · m/(C · s²). Coincide con lo esperado, ya que 1 N = 1 kg · m/s².

OBSERVACIÓN El mecanismo de inyección de tinta de este ejemplo se denomina de desviación múltiple continua. Se usa en algunas impresoras industriales. Las impresoras para ordenadores personales no usan este mecanismo de desviación de las trayectorias de las gotas cargadas mediante un campo eléctrico.

DIPOLOS ELÉCTRICOS EN CAMPOS ELÉCTRICOS

En el ejemplo 21.9, analizamos el campo eléctrico producido por un dipolo, es decir, un sistema formado por dos cargas iguales y opuestas muy próximas entre sí. Aquí consideramos el comportamiento de un dipolo en un campo eléctrico externo. Ciertas moléculas poseen momentos dipolares eléctricos permanentes debido a una distribución no uniforme de carga dentro de la molécula. Tales moléculas se llaman **moléculas polares**. Un ejemplo es la molécula HCl, formada esencialmente por un ion de hidrógeno positivo de carga $+e$ combinado con un ion de cloro negativo de carga $-e$. El centro de carga del ion positivo no coincide con el centro de carga del ion negativo, de modo que la molécula posee un momento dipolar permanente. Otro ejemplo es el agua (figura 21.29).

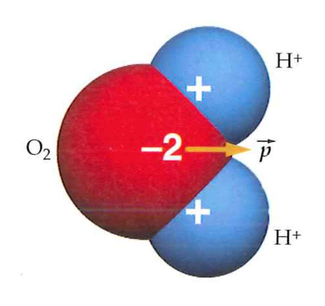


FIGURA 21.29 Una molécula H_2O posee un momento dipolar eléctrico permanente dirigido desde el centro de la carga negativa al centro de la carga positiva.

Un campo eléctrico externo uniforme no ejerce una fuerza neta sobre un dipolo, pero aparece un par de fuerzas que tiende a alinear el dipolo en la dirección del campo. En la figura 21.30, vemos que el módulo del momento de las fuerzas ejercidas sobre las cargas es $F_1 L$ sen $\theta = qEL$ sen $\theta = pE$ sen θ.* El momento está dirigido perpendicularmente al papel, hacia dentro, de tal modo que tiende a situar el momento dipolar $\vec{p}$ en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$. El momento del par puede escribirse convenientemente como el producto vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad 21.11$$

Cuando el dipolo gira un ángulo $d\theta$, el campo eléctrico realiza un trabajo

$$dW = -\tau d\theta = -pE \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

(El signo menos es debido a que el momento tiende a disminuir θ.) Igualando este trabajo con la disminución de energía potencial, resulta

$$dU = -dW = +pE \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

e integrando,

$$U = -pE \cos\theta + U_0$$

Si tomamos como cero de energía potencial la que corresponde a $\theta = 90°$, entonces la energía potencial del dipolo es

$$U = -pE \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \qquad 21.12$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN DIPOLO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Los hornos de microondas están basados en el momento dipolar eléctrico del agua para cocer alimentos. Como todas las ondas electromagnéticas, las microondas poseen campos eléctricos oscilantes que ejercen momentos sobre los dipolos eléctricos, provocando que las moléculas de agua giren con una energía cinética rotacional considerable. De este modo, se transfiere energía desde la radiación de microondas a las moléculas de agua de la comida a gran velocidad, gracias a lo cual el tiempo de cocción en un horno de microondas se reduce de forma significativa.

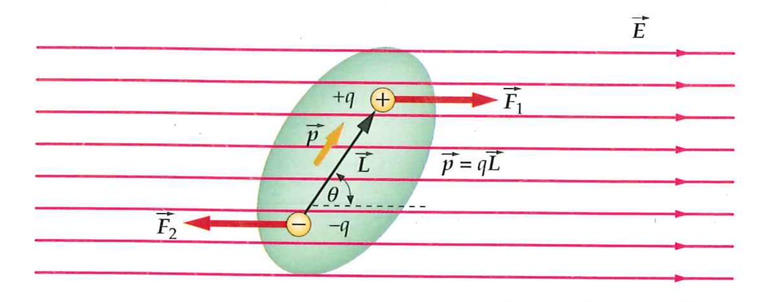


FIGURA 21.30 Un dipolo en un campo eléctrico uniforme experimenta fuerzas iguales y opuestas que tienden a girar el dipolo, de modo que su momento dipolar $\vec{p}$ tiende a alinearse con el campo eléctrico $\vec{E}$.

* El momento producido por dos fuerzas iguales y opuestas (sistema llamado par) es el mismo alrededor de cualquier punto del espacio.

Las **moléculas no polares** no poseen momento dipolar eléctrico permanente. Sin embargo, todas las moléculas neutras contienen cantidades iguales de carga positiva y negativa. En presencia de un campo eléctrico externo $\vec{E}$, las cargas se separan espacialmente. Las cargas positivas se mueven en la dirección de $\vec{E}$ y las negativas en dirección opuesta. La molécula adquiere de este modo un momento dipolar inducido paralelo al campo eléctrico externo y se dice entonces que está **polarizada**.

En un campo eléctrico no uniforme, un dipolo eléctrico experimenta una fuerza neta, ya que el campo eléctrico tiene módulos distintos en los centros de la carga positiva y negativa. La figura 21.31 muestra cómo una carga puntual positiva polariza a una molécula no polar y después la atrae. Un ejemplo conocido es la atracción que mantiene un globo electrostáticamente cargado pegado contra una pared. El campo no uniforme producido por la carga sobre el globo polariza las moléculas de la pared y las atrae. Una fuerza igual y opuesta se ejerce por las moléculas de la pared sobre el globo.

El diámetro de un átomo o molécula es del orden de 10^{-12} m = 0,1 nm. Una unidad adecuada para el momento dipolar eléctrico de los átomos y moléculas es la carga electrónica fundamental e multiplicada por la distancia de 1 pm. Por ejemplo, el momento dipolar del H_2O en estas unidades posee un módulo de unos 0,04 $e \cdot$ pm.

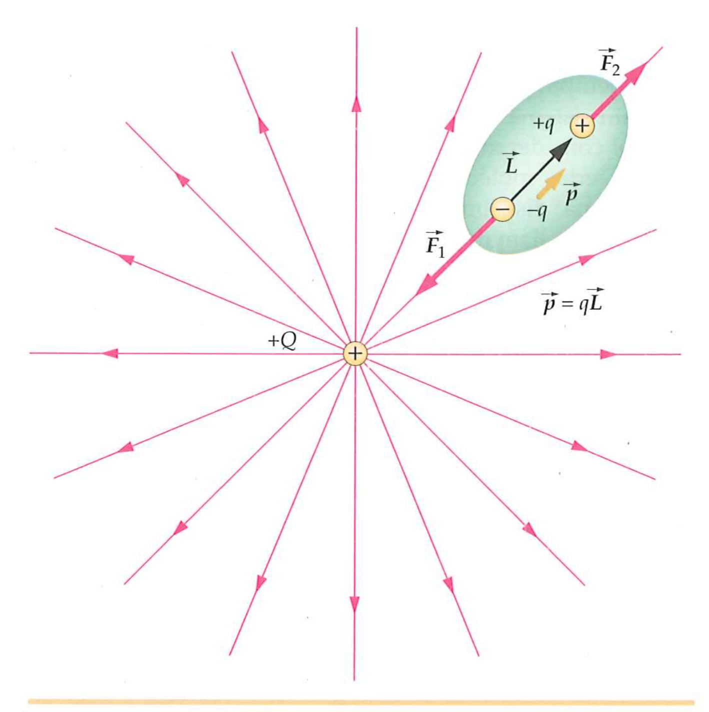


FIGURA 21.31 Una molécula no polar en un campo eléctrico no uniforme creado por una carga puntual $+Q$. La carga puntual atrae a las cargas negativas (los electrones) de la molécula y repele a las positivas (los protones). Como resultado de este hecho, el centro de "gravedad" de la carga $-q$ está más próximo a la carga $+Q$ que lo que está la carga positiva $+q$, y como consecuencia se induce un momento dipolar $\vec{p}$ paralelo al campo creado por la carga puntual $+Q$. Como $-q$ está más próximo a $+Q$ que $+q$, F_1 es mayor que F_2 y la molécula es atraída por la carga puntual. Además, si la carga puntual fuera negativa, el dipolo inducido sería el inverso y la molécula sería también atraída por la carga puntual.

Ejemplo 21.14 Momento de una fuerza debida al campo eléctrico y energía potencial

Un dipolo con un momento de módulo 0,02 $e \cdot$ pm forma un ángulo de 20° con un campo eléctrico uniforme de módulo 3×10^3 N/C (figura 21.32). Determinar (*a*) el módulo del momento que actúa sobre el dipolo y (*b*) la energía potencial del sistema.

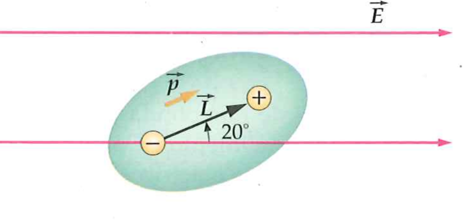


FIGURA 21.32

PLANTEAMIENTO El momento se deduce de la expresión $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ y la energía potencial de $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

SOLUCIÓN

1. Calcular el módulo del momento:

$$\tau = |\vec{p} \times \vec{E}| = pE\,\text{sen}\,\theta = (20\,e\cdot\text{pm})(3 \times 10^3\ \text{N/C})(\text{sen}\ 20°)$$
$$= (0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-9}\ \text{m})(3 \times 10^3\ \text{N/C})(\text{sen}\ 20°)$$
$$= \boxed{3{,}3 \times 10^{-27}\ \text{N}\cdot\text{m}}$$

2. Calcular la energía potencial:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\theta$$
$$= -(0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-9}\ \text{m})(3 \times 10^3\ \text{N/C})\cos 20°$$
$$= \boxed{-9{,}0 \times 10^{-27}\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN El signo de la energía potencial es negativo. Esto es así porque la orientación de referencia de la función energía potencial $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ es $U = 0$ para $\theta = 90°$. Para $\theta = 20°$ la energía potencial es menor que cero. El sistema tiene más energía potencial si $\theta = 20°$ que cuando $\theta = 90°$.

Temas de actualidad en Física

Recubrimiento industrial con polvo electrostático

Los niños de todo el mundo se han beneficiado de las propiedades triboeléctricas. La empresa americana Ohio Art Company lanzó al mercado el grabador de dibujos "Etch A Sketch" alrededor de 1960.[1] Las cuentas de "stirene" proveen de carga al polvo fino de aluminio cuando se agita. La pantalla translúcida del juguete atrae al polvo cargado y con un punzón o estilo se puede dibujar trazando líneas sobre el polvo. El juguete se basa en que la pantalla y el polvo de aluminio se atraen mutuamente por tener cargas opuestas.



El polvo fino es atraído hacia el reverso de la pantalla por efecto electrostático. Girando los botones se hace desaparecer el dibujo por una pequeña barrita. *(Gentileza de The Ohio Art Company.)*

Aunque el polvo cargado puede ser un juguete, también puede servir para actividades industriales serias. Los metales tienden a corroerse si no se les proporciona protección. Para prevenir la corrosión, las partes metálicas de los automóviles, aparatos metálicos y otros objetos de metal deben ser recubiertas. En el pasado, estos recubrimientos se realizaban mediante lacas, barnices y esmaltes que se aplicaban en forma líquida y se dejaban secar. Estos líquidos tienen inconvenientes.[2] Los disolventes tardan tiempo en secarse y emanan fluidos volátiles indeseables. Las superficies con protuberancias se suelen recubrir de forma no uniforme. Los pulverizadores producen residuos que no son fáciles de reciclar. El recubrimiento con polvo electrostático reduce todos estos problemas.[3] Este método de recubrimiento se usó por primera vez en la década de 1950, y actualmente es muy utlizado por los fabricantes, cada vez más comprometidos en cumplir los convenios medioambientales de reducción de emisión de productos químicos volátiles.

El polvillo protector se aplica suministrándole una carga eléctrica al objeto que se ha de recubrir.[4] Esto es mucho más fácil si el objeto a recubrir es conductor. Entonces, partículas[5] muy pequeñas de polvo, entre 1 μm y 100 μm, adquieren cargas de signo opuesto. Estas partículas son atraídas por el objeto que se desea cubrir, de tal forma que las partículas que quedan sueltas son fácilmente reciclables. Cuando las partículas ya están en el objeto, se fija el recubrimiento mediante luz ultravioleta o con tratamiento térmico. El tratamiento de fijado inmoviliza las moléculas del polvo protector y las partículas entonces pierden sus cargas.

Las partículas se cargan mediante una descarga de corona o mediante un proceso de carga triboeléctrico.[6] La descarga de corona insufla las partículas a través del plasma electrónico cargándolas negativamente. El proceso de carga tribológico aplica las partículas a través de un tubo construido de un material que está en el extremo opuesto del espectro triboleléctrico; con frecuencia se utiliza teflón. A las partículas de recubrimiento se les suministra carga positiva mediante un contacto rápido. Al objeto que hay que recubrir se le suministra carga cuyo signo depende del procedimiento seguido para recubrirlo. En función del recubrimiento y de los aditivos, las cargas que se suministran a los objetos varían entre 500 y 1000 μC/kg.[7] El proceso de fijación depende del material utilizado en el recubrimiento y del objeto a recubrir. El tiempo de fijado puede durar entre 1 y 30 minutos.[8]

Aunque el polvo del recubrimiento es económico y preserva el medio ambiente, presenta algunos inconvenientes. La capacidad de las partículas del polvo protector para mantener la carga[9] depende de la humedad, la cual deberá ser cuidadosamente controlada.[10] Si el campo eléctrico creado por la descarga de corona es demasiado fuerte, el polvo se lanza demasiado rápidamente hacia el objeto a recubrir, dejando motas al descubierto en el centro de círculos que dan un aspecto de "peladura de naranja".[11] El polvo electrostático puede ser juego de niños, pero también puede servir para complejos procesos de producción.

[1] Grandjean, A., "Tracing Device." *U.S. Patent No. 3,055,113*, Sept. 25, 1962.
[2] Matheson, R. D. "20th- to 21st-Century Technological Challenges in Soft Coatings." *Science*, Aug. 9, 2002, Vol. 297, No. 5583, pp. 976–979.
[3] Hammerton, D., and Buysens, K., "UV-Curable Powder Coatings: Benefits and Performance." *Paint and Coatings Industry*, Aug. 2000, p. 58.
[4] Zeren, S., and Renoux, D., "Powder Coatings Additives." *Paint and Coatings Industry*, Oct. 2002, p. 116.
[5] Hemphill, R., "Deposition of $BaTiO_3$ Nanoparticles by Electrostatic Spray Powder Charging." *Paint and Coatings Industry*, Apr. 2006, pp. 74–78.
[6] Czyzak, S. J., and Williams, D. T., "Static Electrification of Solid Particles by Spraying." *Science*, Jul. 20, 1951, Vol 14, pp. 66–68.
[7] Zeren, S., and Renoux, D., op. cit.
[8] Hammerton, D., and Buysens, K., op. cit.
[9] O'Konski, C. T., "The Exponential Decay Law in Spray De-electrification." *Science*, Oct. 5, 1951, Vol. 114, p. 368.
[10] Sharma, R., et al., "Effect of Ambient Relative Humidity and Surface in Modification on the Charge Decay Properties of Polymer Powders in Powder Coating." *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jan./Feb. 2003, Vol. 39, No. 1, pp. 87–95.
[11] Wostratzky, D., Lord, S., and Sitzmann, E. V., "Power!" *Paint and Coatings Industry*, Oct. 2000, p. 54.

Resumen

1. Cuantización y conservación son propiedades fundamentales de la carga eléctrica.
2. La ley de Coulomb es la ley fundamental de la interacción entre las cargas en reposo.
3. El campo eléctrico describe la condición establecida en el espacio por una distribución de cargas.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. **Carga eléctrica**	Existen dos clases de carga eléctrica, llamadas positiva y negativa. Cargas del mismo signo se repelen y de signo contrario se atraen.	
Cuantización	La carga eléctrica está cuantizada: siempre se presenta por múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga e. La carga del electrón es $-e$ y la del protón $+e$.	
Magnitud	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$	
Conservación	La carga se conserva, es decir, en cualquier proceso, la carga ni se crea ni se destruye; simplemente se transfiere.	
2. **Conductores y aislantes**	En los conductores, aproximadamente un electrón por átomo posee libertad de movimiento en todo el material. En los aislantes, todos los electrones están ligados a los átomos próximos.	
Tierra	Así se llama un conductor muy extenso que puede suministrar una cantidad ilimitada de carga (tal como el suelo terrestre).	
3. **Carga por inducción**	Carga de un conductor por inducción. Se conecta a tierra el conductor, y se mantiene una carga externa cerca de él para atraer o repeler electrones de conducción. Seguidamente, se desconecta el conductor de tierra y, por último, se aleja la carga externa del conductor.	
4. **Ley de Coulomb**	La fuerza ejercida por una carga q_1 sobre q_2 a una distancia r_{12} viene dada por $$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$ donde $\hat{r}_{12}$ es un vector unitario dirigido de q_1 a q_2.	21.4
Constante de Coulomb	$k = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$	21.3
5. **Campo eléctrico**	El campo eléctrico debido a un sistema de cargas en un punto se define como la fuerza neta $\vec{F}$, ejercida por aquellas cargas sobre una carga testigo positiva q_0, dividida por q_0: $$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$	21.5
Debido a una carga puntual	$$\vec{E}_{iP} = \frac{kq_i}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP}$$	21.7
Debido a un sistema de cargas puntuales	El campo eléctrico debido a varias cargas es la suma vectorial de los campos debidos a las cargas individuales: $$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{iP}$$	21.8
6. **Líneas de campo eléctrico**	El campo eléctrico puede representarse mediante líneas del campo eléctrico o de fuerza que se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. La intensidad del campo eléctrico viene indicada por la densidad de las líneas de fuerza.	
7. **Dipolo eléctrico**	Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales, pero opuestas, separadas por una distancia pequeña.	
Momento dipolar	$$\vec{p} = q\vec{L}$$ donde $\vec{L}$ apunta de la carga negativa a la positiva.	21.9
Campo debido a un dipolo	El campo eléctrico en un punto alejado de un dipolo es proporcional al momento dipolar y disminuye con el cubo de la distancia.	
Momento sobre un dipolo	En un campo eléctrico uniforme, la fuerza neta que actúa sobre un dipolo es cero, pero existe un momento τ dado por $$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$	21.11

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Energía potencial de un dipolo	$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} + U_0$ donde U_0 suele considerarse nulo.	21.12
8. Moléculas polares y no polares	Las moléculas polares, tales como H_2O poseen momentos dipolares permanentes, ya que en ellas no coinciden los centros de la carga positiva y negativa. Se comportan como simples dipolos en un campo eléctrico. Las moléculas no polares carecen de momentos dipolares permanentes, pero adquieren momentos dipolares inducidos en presencia de un campo eléctrico.	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

21.1 (*a*) $+\frac{1}{2}Q$. Como las esferas son idénticas, deberán compartir la carga total a partes iguales. (*b*) $+2Q$, que es necesario para satisfacer la conservación de la carga.

21.2 $Q_1 = +Q/2$, $Q_2 = -Q/4$, y $Q_3 = -Q/4$

Respuestas a los problemas prácticos

21.1 $N = Q/e = (50 \times 10^{-9}\,\text{C})/(1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}) = 3{,}1 \times 10^{11}$. La cuantización de la carga no se puede detectar en una carga de esta dimensión; incluso añadiendo o quitando un millón de electrones no se produce un efecto apreciable.

21.2 Alrededor de $3{,}5 \times 10^{-8}$ por ciento

21.3 $2{,}25 \times 10^{-3}$ N

21.4 $+(6{,}3\,\mu\text{N})\hat{i}$

21.5 $\hat{r}_{10} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$

21.6 No, pero supongamos que así fuera: como la componente x de $\vec{r}_{10}$ es menor que el módulo de $\vec{r}_{10}$, tal denominador de kq_1q_0/x_{10}^2 es menor que el de kq_1q_0/r_{10}^2. Esto implicaría que la componente x de $\vec{F}_{10}$ es mayor que el módulo de $\vec{F}_{10}$, lo cual es imposible porque la componente de un vector nunca puede ser mayor que su módulo. En consecuencia, la componente x de la fuerza $\vec{F}_{10} = (kq_1q_0/r_{10}^2)\hat{r}_{10}$ no es necesariamente igual a $F_{10x} = kq_1q_0/x_{10}^2$.

21.7 $\vec{E} = \vec{F}/q_0 = (4{,}0 \times 10^4\,\text{N/C})\hat{i}$

21.8 $\vec{F} = -(6{,}4 \times 10^{-15}\,\text{N})\hat{i}$

21.9 $x = 1{,}80$ m

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*
- Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Los objetos se componen de átomos que a su vez están compuestos de partículas cargadas (protones y electrones); sin embargo, es rara la ocasión en la que se observa la fuerza electrostática. Explicar por qué no se suelen observar estos efectos.

2 • Un átomo de carbono se convierte en ion si se le quitan uno o más electrones en un proceso de ionización ¿Cuál es la carga del átomo de carbono al que se le han quitado dos de sus electrones? (*a*) $+e$. (*b*) $-e$. (*c*) $+2e$. (*d*) $-2e$.

3 •• En una clase de Física, se realiza un experimento con el que, aparentemente, se refuta la ley de Coulomb. Se pasa un peine de goma o caucho por el pelo y después se observa cómo atrae pequeñas trocitos de papel. Entonces, quien hace la experiencia argumenta que la ley de Coulomb establece que para que haya fuerzas electrostáticas de atracción entre dos objetos, ambos tienen que estar cargados. Sin embargo, el papel no lo estaba y, por consiguiente, de acuerdo con la ley de Coulomb, no debería haber fuerzas atractivas entre el peine y el papel como claramente existían en la demostración. (*a*) ¿Qué hay de erróneo en esta argumentación? (*b*) ¿Es necesario para que exista fuerza de atracción entre papel y peine que éste tenga carga neta negativa? Explicar las respuestas.

4 •• Se tienen dos esferas metálicas y una barra de aislante cargada positivamente sobre una mesa. ¿Cómo se puede utilizar la barra para inducir sobre las esferas carga negativa? ¿Y positiva?

5 •• Dos partículas cargadas de $+4q$ y $-3q$ se encuentran a una distancia d. Dibujar las líneas de campo en (*a*) las proximidades del sistema, y (*b*) puntos localizados a distancias de las cargas mucho mayores que d.

6 •• Se carga positivamente una esfera metálica. ¿Es posible que ésta atraiga a una bola cargada positivamente también? Razonar la respuesta.

7 •• Se puede hacer una simple demostración de la fuerza atractiva electrostática haciendo oscilar una bola de papel de aluminio arrugada colgando de una cuerda y acercando una barrita cargada cerca de la bola. Inicialmente, la barra atraerá a la bola, pero si la bola toca a la barra, ésta la repelerá bruscamente. Explicar todo ello.

8 •• Se coloca una carga puntual positiva en $x = 0{,}00$ y otra igual en $x = 1{,}00$ m, ambas sobre el eje x. Se pone una tercera carga puntual y positiva en una posición de equilibrio. (*a*) ¿Cuál es esa posición? (*b*) ¿Es estable dicho equilibrio si la tercera carga queda obligada a moverse, en su caso, paralela al eje x? (*c*) ¿Y si la carga estuviera constreñida a moverse a lo largo del eje y? Explicar las respuestas.

9 •• Dos esferas conductoras sin carga con sus superficies conductoras en contacto, están apoyadas sobre una gran tabla de madera bien aislada. Una barra cargada positivamente se aproxima a una de las esferas por el lado opuesto a su punto de contacto con la otra esfera. (*a*) Describir las cargas inducidas sobre las dos esferas conductoras y representar las distribuciones de carga sobre ellas. (*b*) Las dos esferas se alejan entre sí y la barra cargada se separa. Dibujar las distribuciones de carga sobre las esferas separadas.

10 •• Tres cargas, $+q$, $+Q$ y $-Q$, se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero, como muestra la figura 21.33. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga $+q$ debida a las otras dos cargas? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta total del sistema de tres cargas?

FIGURA 21.33 Problema 10

11 •• Una carga positiva es libre de moverse en una región donde hay un campo eléctrico $\vec{E}$. ¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?

(*a*) La partícula se acelerará en la dirección perpendicular al campo $\vec{E}$.
(*b*) La partícula se acelerará en la dirección paralela al campo $\vec{E}$.
(*c*) Se moverá en la dirección del campo $\vec{E}$.
(*d*) Podría estar momentáneamente en reposo.
(*e*) La fuerza que recibe la partícula es opuesta a la dirección del campo $\vec{E}$.
(*f*) La partícula se moverá en dirección opuesta al campo $\vec{E}$.

12 •• Si cuatro cargas están localizadas en los vértices de un cuadrado, como indica la figura 21.34, el campo $\vec{E}$ es cero en:

(*a*) Todos los puntos situados sobre los lados del cuadrado que están a mitad de camino entre las dos cargas.
(*b*) El punto central del cuadrado.
(*c*) El punto a mitad de camino entre las dos cargas superiores y en el punto a mitad de camino entre las dos cargas inferiores.

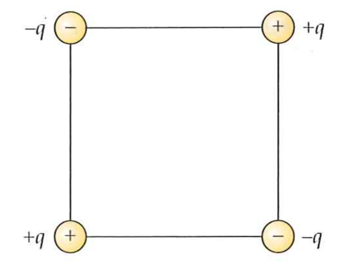


FIGURA 21.34 Problema 12

13 •• Dos partículas cargadas de $+q$ y $-3q$ se separan una distancia d. Dibujar las líneas de campo (*a*) en la proximidades del sistema y (*b*) en puntos localizados a distancias de las cargas mucho mayores que d. SSM

14 •• Tres cargas puntuales positivas están fijas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. El origen de coordenadas está en la mitad de un lado de un triángulo, el centro del triángulo en $x = x_1$, y el vértice opuesto al origen en $x = x_2$. (*a*) Expresar x_1 y x_2 en función de a. (*b*) Dar una expresión del campo eléctrico en el eje x en el intervalo entre 0 y x_2. (*c*) Demostrar que la expresión obtenida en (*b*) da los resultados esperados para $x = 0$ y $x = x_1$.

15 •• Una molécula de momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ está orientada de modo que $\vec{p}$ forma un ángulo θ con un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. El dipolo puede moverse libremente en respuesta a la fuerza ejercida por el campo. Describir el movimiento del dipolo.

16 •• Verdadero o falso:

(*a*) El campo eléctrico de una carga puntual tiene un sentido siempre de alejamiento de la carga.
(*b*) La fuerza eléctrica sobre una partícula cargada en un campo eléctrico tiene siempre el mismo sentido que el campo.
(*c*) Las líneas de campo eléctrico nunca pueden cortarse en un punto del espacio.
(*d*) Todas las moléculas poseen momentos dipolares eléctricos en presencia de un campo eléctrico externo.

17 •• Dos moléculas tienen momentos dipolares cuyos módulos son iguales y cuyas orientaciones se muestran en la figura 21.35. Determinar la dirección del campo eléctrico en cada uno de los puntos numerados en la figura. SSM

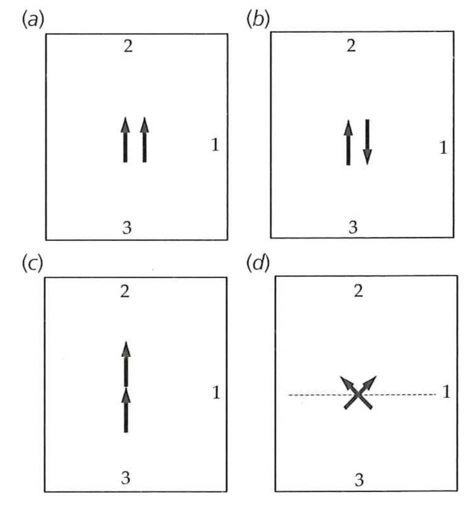


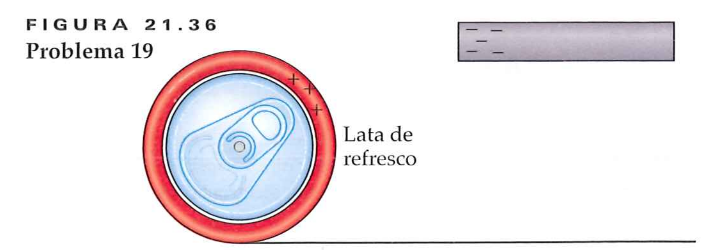
FIGURA 21.35 Problema 17

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 •• Hacer una estimación de la fuerza requerida para enlazar dos protones en un núcleo de helio. *Ayuda: considerar los protones como cargas puntuales haciendo una estimación aproximada de la separación de ambos.*

19 •• Una conocida demostración práctica consiste en frotar con un trozo de piel una varilla (mágica?) de plástico con objeto de cargarla, y seguidamente acercarla a una lata vacía (ver figura 21.36). Explicar por qué la lata rodará hacia la barra.

FIGURA 21.36 Problema 19



20 •• Las descargas eléctricas (chispas) se producen en el aire cuando un campo eléctrico acelera los iones libres hasta velocidades suficientemente altas como para ionizar las moléculas de un gas mediante su impacto con ellas. (*a*) Asumiendo que cada ion, en promedio, se desplaza en el gas un espacio denominado *recorrido medio libre* antes de chocar con una molécula y que este ion necesita, aproximadamente, 1 eV de energía para poder ionizarla, estimar la intensidad del campo necesaria

para producir la rotura dieléctrica del aire, a una presión y temperatura de 105 N/m^2 y 300 K, respectivamente. Considerando que el área de la sección trasversal de una molécula de nitrógeno es de 0,1 nm^2, (*b*) ¿cómo variará el potencial de rotura dieléctrica con la temperatura? ¿Y con la presión?

CARGA ELÉCTRICA

21 • Al frotar una barra de plástico con un paño de lana, aquella adquiere una carga de $-0,8$ μC. ¿Cuántos electrones se transfieren del paño de lana a la barra de plástico?

22 • Una carga igual a la de un número de Avogadro ($N_A = 6,02 \times 10^{23}$) de protones se denomina un *faraday*. Calcular el número de coulombs que hay en un faraday.

23 • ¿Cuál es la carga total de todos los protones de 1,00 kg de carbono? SSM

24 •• Suponer un cubo de aluminio de 1,00 cm de lado que acumula una carga neta de +2,50 pC. (*a*) ¿Cuál es el porcentaje de electrones que se ha eliminado? (*b*) ¿Qué porcentaje de masa se le ha extraído?

25 •• Durante un proceso denominado *efecto fotoeléctrico*, se utiliza luz altravioleta para cargar una pieza de metal. (*a*) Si esa luz incide en una lámina de metal y los electrones son extraídos con suficiente energía como para que salgan de la superficie del metal, ¿cuánto tiempo tardará éste en adquirir 1,5 nC si son extraídos $1,00 \times 10^6$ electrones por segundo? (*b*) Si se necesitan 1,3 eV para extraer un electrón de la superficie, ¿que potencia debe tener el rayo luminoso asumiendo que en todo el proceso la eficiencia es del 100%?

LEY DE COULOMB

26 • Una carga $q_1 = 4,0$ μC está en el origen y otra carga $q_2 = 6,0$ μC está sobre el eje x en el punto $x = 3,0$ m. (*a*) Hallar la fuerza ejercida sobre la carga q_2. (*b*) Hallar la fuerza ejercida sobre q_1. (*c*) ¿En qué diferirán estas respuestas, (*a*) y (*b*), si q_2 vale $-6,0$ μC?

27 • Tres cargas puntuales están en el eje x; $q_1 = -6,0$ μC está en $x = -3,0$ m, $q_2 = 4,0$ μC está en el origen y $q_3 = -6,0$ μC está en $x = 3,0$ m. Hallar la fuerza ejercida sobre q_1. SSM

28 •• Dos cargas puntuales de 2 y 4 μC, respectivamente, están separadas una distancia L. ¿Dónde se debería poner una tercera carga para que la fuerza eléctrica sobre ella fuera nula?

29 •• Dos cargas puntuales de -2 y 4 μC, respectivamente, están separadas una distancia L. ¿Dónde se debería poner una tercera carga para que la fuerza eléctrica sobre ella fuera nula?

30 •• Tres cargas, cada una de módulo 3 nC, están en los vértices de un cuadrado de lado 5 cm. Las dos cargas de los vértices opuestos son positivas y la otra es negativa. Determinar la fuerza ejercida por estas cargas sobre una cuarta carga $q_4 = +3$ nC situada en el vértice restante.

31 •• Una carga de 5 μC se encuentra sobre el eje y en $y = 3$ cm y una segunda carga de $-5,0$ μC está sobre el eje y en $y = -3$ cm. Determinar la fuerza ejercida sobre una carga de 2 μC situada sobre el eje x en $x = 8$ cm.

32 •• Una carga puntual de $-2,5$ μC está localizada en el origen. Una segunda carga puntual de 6 μC se encuentra en $x = 1$ m, $y = 0,5$ m. Determinar las coordenadas x e y de la posición en la cual un electrón estaría en equilibrio.

33 •• Una carga de $-1,0$ μC está localizada en el origen, una segunda carga de 2,0 μC está localizada en $x = 0$, $y = 0,1$ m y una tercera de 4,0 μC en $x = 0,2$ m, $y = 0$. Calcular las fuerzas que actúan sobre cada una de las tres cargas.

34 •• Una carga de 5,0 μC está localizada en $x = 0$, $y = 0$. Otra carga q está localizada en $x = 4,0$ cm, $y = 0$. La fuerza que actúa sobre una carga de 2 μC en $x = 8,0$ cm, $y = 0$ es 19,7 N, apuntando en la dirección x negativa. Cuando esta carga de 2 μC se sitúa en $x = 17,75$ cm, $y = 0$, la fuerza que actúa sobre ella es nula. Determinar el valor de la carga q.

35 ••• Cinco cargas iguales Q están igualmente espaciadas en un semicírculo de radio R como indica la figura 21.37. Determinar la fuerza (en función de k, Q y R) que se ejerce sobre una carga q localizada equidistante de las otras cargas en el centro del semicírculo. SSM

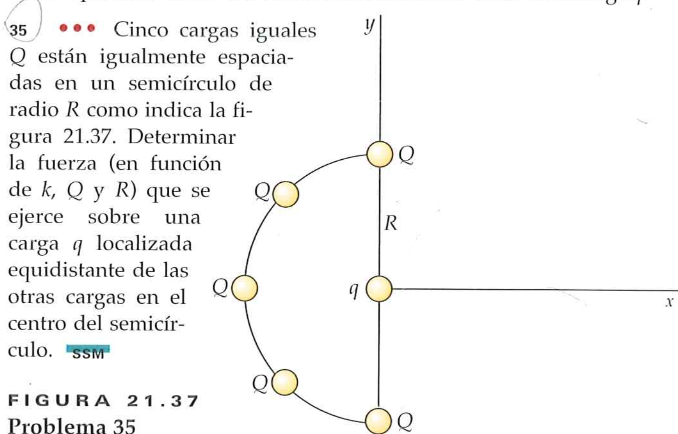


FIGURA 21.37
Problema 35

36 ••• La configuración de la molécula de amoníaco (NH_3) es, aproximadamente, la de un tetraedro regular con tres iones H^+ formando la base y un ion N^{3-} en el vértice del tetraedro. La longitud de cada lado es $1,64 \times 10^{-10}$ m. Calcular la fuerza que actúa sobre cada ion.

EL CAMPO ELÉCTRICO

37 • Una carga de 4,0 μC está en el origen. ¿Cuál es el módulo y sentido del campo eléctrico sobre el eje x en (*a*) $x = 6$ m y (*b*) $x = -10$ m? (*c*) Hacer un esquema de la función E_x respecto a x tanto para valores positivos como negativos de x. (Recuérdese que E_x es negativo cuando $\vec{E}$ señala en el sentido negativo de las x.) SSM

38 • Dos cargas puntuales, cada una de ellas de +4 μC, están sobre el eje x, una en el origen y la otra en $x = 8$ m. Hallar el campo eléctrico sobre el eje x en (*a*) $x = -2$ m, (*b*) $x = 2$ m, (*c*) $x = 6$ m y (*d*) $x = 10$ m. (*e*) ¿En qué punto del eje x es cero el campo eléctrico? (*f*) Hacer un esquema de E_x en función de x en el intervalo $-3,0 \text{ m} < x < 11$ m.

39 • Cuando se coloca una carga testigo $q_0 = 2$ nC en el origen, experimenta la acción de una fuerza de $8,0 \times 10^{-4}$ N en la dirección positiva del eje de las y. (*a*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen? (*b*) ¿Cuál sería la fuerza que se ejercería sobre una carga de -4 nC situada en el origen? (*c*) Si esta fuerza fuera debida a una carga situada sobre el eje y en $y = 3$ cm, ¿cuál sería el valor de dicha carga?

40 • La Tierra tiene un campo eléctrico cerca de su superficie que es de, aproximadamente, 150 N/C y que está dirigido hacia abajo. (*a*) Comparar la fuerza eléctrica ascendente ejercida sobre un electrón con la fuerza gravitatoria dirigida hacia abajo. (*b*) ¿Qué carga debería suministrarse a una moneda de 3 g para que el campo eléctrico equilibrase su peso cerca de la superficie de la Tierra?

41 •• Dos cargas iguales positivas de valor $q_1 = q_2 = 6,0$ nC están sobre el eje y en puntos $y_1 = +3$ cm e $y_2 = -3$ cm. (*a*) ¿Cuál es el valor y sentido del campo eléctrico sobre el eje x en $x = 4$ cm? (*b*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre una tercera carga $q_0 = 2$ nC situada en el punto $x = 4$ cm? SSM

42 •• Una carga puntual de + 5 μC está localizada en $x = -3,0$ cm y una segunda carga puntual de -8 μC está localizada en $x = +4,0$ cm. ¿Dónde debe situarse una tercera carga de 6 μC para que el campo eléctrico en $x = 0$ sea cero?

43 •• Una carga puntual de $-5\ \mu C$ está localizada en $x = 4$ m, $y = -2$ m. Una segunda carga puntual de 12 μC está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m. (*a*) Determinar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en $x = -1$ m, $y = 0$. (*b*) Calcular el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza sobre un electrón situado en $x = -1$ m, $y = 0$.

44 •• Dos cargas positivas iguales q están en el eje y; una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. (*a*) Demostrar que el campo eléctrico en el eje x está dirigido a lo largo de dicho eje con $E_x = 2kqx/(x^2 + a^2)^{3/2}$. (*b*) Demostrar que en las proximidades del origen, donde x es mucho menor que a, $E_x \approx 2kqx/a^3$. (*c*) Demostrar que para x mucho mayor que a, $E_x \approx 2kq/x^2$. Explicar por qué debería esperarse este resultado incluso antes de ser calculado.

45 •• Una carga puntual de 5 μC está localizada en $x = 1$ m, $y = 3$ m y otra carga de $-4\ \mu C$ está localizada en $x = 2$ m, $y = -2$ m. (*a*) Determinar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en $x = -3$ m, $y = 1$ m. (*b*) Determinar el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza sobre un protón en $x = -3$ m, $y = 1$ m.

46 •• Dos cargas Q puntuales positivas están en $y = +a$ y en $y = -a$. (*a*) Demostrar que el campo eléctrico para la distribución de cargas tiene su máximo valor en los puntos $x = a/\sqrt{2}$ y $x = -a/\sqrt{2}$ calculando $\partial E_x/\partial x$ y haciendo la derivada igual a cero. (*b*) Hacer un esquema de la función E_x en función de x utilizando los resultados del apartado (*a*) de este problema y considerando que E_x es, aproximadamente, $2kqx/a^3$ cuando $x << a$, y que E_x es, aproximadamente, $2kq/x^2$ cuando $x >> a$.

47 •• Dos partículas puntuales con carga q cada una de ellas se colocan en la base de un triángulo equilátero de lado L (figura 21.38). Una tercera partícula puntual de carga $2q$ se coloca en el otro vértice ¿Dónde deberíamos colocar una cuarta carga puntual q para que el campo eléctrico en el centro del triángulo fuera cero? (El centro está en el plano del triángulo y equidistante de los tres vértices.) SSM

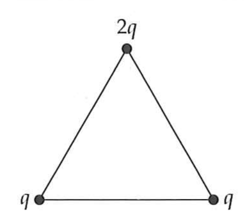


FIGURA 21.38 Problemas 47 y 48

48 •• Dos partículas puntuales con carga q cada una de ellas se colocan en la base de un triángulo equilátero de lado L (figura 21.38). Una tercera partícula puntual de carga $2q$ se coloca en el otro vértice. Se coloca una cuarta carga puntual q' en el punto medio de la base, de tal forma que la carga eléctrica en el centro del triángulo es cero. ¿Cuál es el valor de q'? (El centro está en el plano del triángulo y equidistante de los tres vértices.)

49 •• Dos cargas positivas iguales $+q$ están en el eje y; una de ellas en $y = +a$ y la otra en $y = -a$. El campo eléctrico se anula en el origen. Una carga de prueba q_0 situada en el origen estará por lo tanto en equilibrio. (*a*) Estudiar la estabilidad del equilibrio para una carga de prueba positiva considerando desplazamientos pequeños del equilibrio a lo largo del eje x y desplazamientos pequeños a lo largo del eje y. (*b*) Repetir el apartado (*a*) para una carga de prueba negativa. (*c*) Hallar el valor y signo de una carga q_0 que puede situarse en el origen de modo que la fuerza neta sobre cada una de las tres cargas sea cero. (*d*) Explicar qué ocurre si cualquiera de las cargas se desplaza ligeramente del equilibrio.

50 ••• Dos cargas puntuales positiva $+q$ están sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$. Una cuenta de collar de masa m con una carga negativa $-q$ se desliza sin rozamiento a lo largo de una cuerda situada sobre el eje x. (*a*) Demostrar que para pequeños desplazamientos $x << a$, la cuenta experimenta una fuerza de restitución proporcional a x, y que, por lo tanto, experimenta un movimiento armónico simple. (*b*) Determinar el periodo del movimiento.

MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES EN CAMPOS ELÉCTRICOS

51 •• La aceleración de una partícula en un campo eléctrico depende de la relación carga/masa de la partícula. (*a*) Calcular e/m para un electrón. (*b*) ¿Cuál es el módulo y dirección de la aceleración de un electrón en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C? (*c*) Cuando la velocidad de un electrón se aproxima a la velocidad de la luz c, debe utilizarse la mecánica relativista para determinar su movimiento; sin embargo, a velocidades bastante menores que c puede utilizarse la mecánica newtoniana. Calcular, con la mecánica de Newton, el tiempo que tarda un electrón, partiendo del reposo en el interior de un campo eléctrico de valor 100 N/C, en alcanzar una velocidad de 0,01 c. (*d*) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en este tiempo? SSM

52 • La aceleración de una partícula en un campo eléctrico depende de su relación carga/masa. (*a*) Calcular e/m para un protón y hallar su aceleración en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C. (*b*) Hallar el tiempo que tarda un protón inicialmente en reposo en dicho campo en alcanzar la velocidad de 0,01c (siendo c la velocidad de la luz). (Cuando la velocidad del protón se aproxima a la de la luz, debe usarse la cinemática relativista para calcular el movimiento; sin embargo, para una velocidad 0,01c o menor, la cinemática clásica es una suficiente aproximación.)

53 • Un electrón tiene una velocidad inicial de 2×10^6 m/s en la dirección del eje de las x. Entra en el interior de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (300\ \text{N/C})\hat{j}$ que tiene la dirección y. (*a*) Hallar la aceleración del electrón. (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el electrón en recorrer 10 cm en la dirección x? (*c*) ¿Cuál será el módulo y la dirección de la desviación del electrón después de haber recorrido 10 cm en la dirección x?

54 •• Un electrón, partiendo del reposo, se acelera por la acción de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -1{,}50 \times 10^{-10}\ \text{N/C}\hat{j}$. Después de que el electrón recorra 1,0 μm, ¿cuál es su velocidad? (Despreciar la fuerza gravitacional sobre el electrón.)

55 •• Una masa de 2 g localizada en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (300\ \text{N/C})\hat{i}$ contiene una carga Q. La masa, liberada del reposo en $x = 0$, posee una energía cinética de 0,12 J en $x = 0{,}50$ m. Determinar la carga Q.

56 •• Una partícula sale del origen con una velocidad de 3×10^6 m/s, formando un ángulo de 35° con el eje x. Se mueve en un campo eléctrico constante $\vec{E} = -E_0\hat{j}$. Determinar E_0 para que la partícula cruce el eje x en $x = 1{,}5$ cm si (*a*) se trata de un electrón y (*b*) es un protón.

57 •• Un electrón parte de la posición indicada en la figura 21.39 con una velocidad inicial $v_0 = 5 \times 10^6$ m/s formando un ángulo de 45° con el eje x. El campo eléctrico tiene la dirección y positiva y su módulo es de $3{,}5 \times 10^3$ N/C. ¿Sobre qué placa y en qué lugar chocará el electrón? SSM

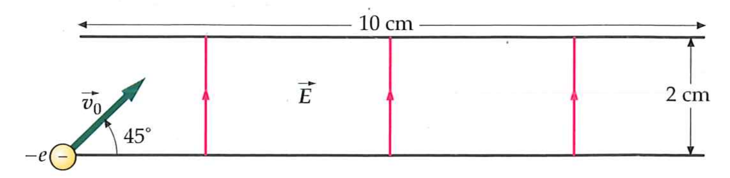


FIGURA 21.39 Problema 57

58 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un electrón cuya energía cinética es 2×10^{-16} J se mueve hacia la derecha a lo largo del eje de un tubo de rayos catódicos, como se indica en la figura 21.40. En la región comprendida entre las placas deflectoras existe un campo eléctrico de valor $\vec{E} = (2{,}00 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{j}$. Fuera de esta región, $\vec{E} = 0$. (*a*) ¿A qué distancia del eje del tubo se encuentra el electrón

cuando alcanza el extremo de las placas? (*b*) ¿Con qué ángulo respecto al eje se mueve el electrón? (*c*) ¿A qué distancia del eje se encuentra el electrón cuando choca contra la pantalla fluorescente?

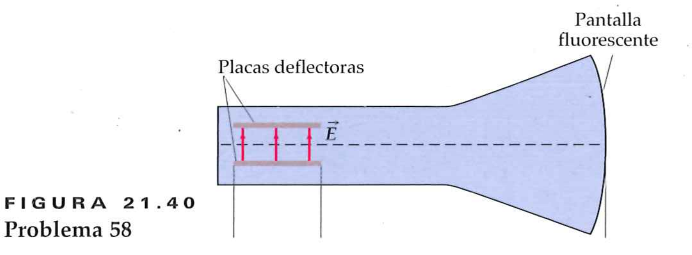


FIGURA 21.40 Problema 58

DIPOLOS

59 • Dos cargas puntuales $q_1 = 2{,}0$ pC y $q_1 = -2{,}0$ pC están separadas por una distancia de 4 mm. (*a*) ¿Cuál es el momento dipolar de este par de cargas? (*b*) Hacer un dibujo del par e indicar la dirección y sentido del momento dipolar.

60 • Un dipolo de momento 0,5 $e \cdot$ nm se coloca en el interior de un campo eléctrico uniforme de valor $4{,}0 \times 10^4$ N/C. ¿Cuál es el valor del momento ejercido sobre el dipolo cuando (*a*) el dipolo es paralelo al campo eléctrico, (*b*) el dipolo es perpendicular al campo eléctrico, y (*c*) el dipolo forma un ángulo de 30° con el campo eléctrico? (*d*) Determinar la energía potencial del dipolo en el campo eléctrico en cada caso.

PROBLEMAS GENERALES

61 • Demostrar que solamente es posible colocar un único protón aislado en una taza de café vacía (asumir que el protón se fija en el fondo de la taza). Para ello, determinar a qué distancia de este protón deberíamos poner un segundo protón para que se mantuviera en equilibrio este último. Comparar esta distancia con la profundidad de una taza ordinaria de café para completar el razonamiento. SSM

62 •• Se colocan tres cargas puntuales de −5,00, +3,00 y 5,00 μC sobre el eje x en los puntos $x = -1{,}00$ cm, $x = 0$ y $x = +1$ cm, respectivamente. Calcular el campo eléctrico en el eje x para $x = 15$ cm. ¿Hay puntos en el eje x donde el módulo del campo eléctrico es cero? Si es así, ¿qué puntos son?

63 •• Se colocan dos cargas puntuales de −5 y +5 μC en el eje x, en los puntos $x = -1{,}00$ cm y $x = +1{,}00$ cm, respectivamente. (*a*) Calcular la intensidad del campo eléctrico en $x = 10{,}00$ cm. (*b*) Estimar la intensidad del campo eléctrico en $x = 10{,}00$ cm considerando el sistema de cargas como un dipolo localizado en el origen y usando la ecuación 21.10, $E = 2kp/|x|^3$. Comparar este resultado de (*b*) con el obtenido en (*a*) y explicar las razones de la diferencia entre ambos resultados.

64 •• Tres cargas, $+q$, $+2q$ y $+4q$, están conectadas por cuerdas del modo indicado en la figura 21.41. Determinar las tensiones T_1 y T_2.

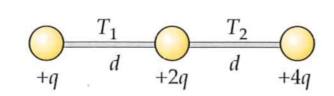


FIGURA 21.41 Problema 64

65 •• Una carga positiva Q ha de dividirse en dos cargas positivas q_1 y q_2. Demostrar que, para una separación dada D, la fuerza ejercida por una carga sobre la otra es máxima si $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q$. SSM

66 •• Una carga Q está localizada en $x = 0$ y otra carga $4Q$ se encuentra en $x = 12{,}0$ cm. La fuerza ejercida sobre una carga de -2μC es cero si ésta se encuentra en $x = 4{,}0$ cm, y es 126,4 N en la dirección positiva de x si se sitúa en $x = 8{,}0$ cm. Determinar la carga Q.

67 •• Dos pequeñas esferas (cargas puntuales) separadas por una distancia de 0,60 m tienen una carga total de 200 μC. (*a*) Si las dos esferas se repelen entre sí con una fuerza de 80 N, ¿cuáles son las cargas de cada una de las esferas? (*b*) Si las dos esferas se atraen mutuamente con una fuerza de 80 N, ¿cuáles son las cargas de cada una de las esferas?

68 •• Una bola de carga conocida q y masa desconocida m, inicialmente en reposo, cae libremente desde una altura h en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido verticalmente hacia abajo. La bola choca contra el suelo a una velocidad $v = 2\sqrt{gh}$. Determinar m en función de E, q y g.

69 •• Una barra rígida de 1 m de largo puede girar alrededor de un pivote colocado en su centro (figura 21.42). Se coloca una carga q_1 de 5×10^{-7} C en un extremo de la barra y, a una distancia $d = 10$ cm sobre la vertical y por debajo, se coloca otra carga q_2 igual en valor absoluto pero de signo opuesto. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta entre las dos cargas? (*b*) ¿Cuál es el momento de la fuerza con respecto al centro de la barra? (*c*) Como contrapeso de la fuerza de atracción entre las dos cargas se cuelga un bloque a 25 cm del pivote en el lado opuesto de las cargas, obteniéndose el equilibrio en la balanza. ¿Qué masa m deberá tener el bloque? (*d*) Si se coloca el bloque a 25 cm pero en el mismo brazo de la balanza que la carga, manteniéndose los mismos valores de q_1 y d, ¿qué nuevo valor deberá tener q_2 para mantener la balanza en equilibrio? SSM

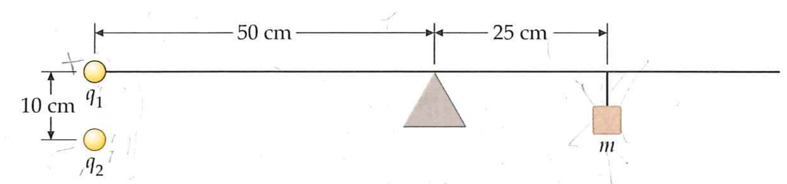


FIGURA 21.42 Problema 69

70 •• Dos cargas de 3,0 μC están localizadas en $x = 0$, $y = 2{,}0$ m y en $x = 0$, $y = -2{,}0$ m. Otras dos cargas Q están localizadas en $x = 4{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m y en $x = 4{,}0$, $y = -2{,}0$ m (figura 21.43). El campo eléctrico en $x = 0$, $y = 0$ es $(4{,}0 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{i}$. Determinar Q.

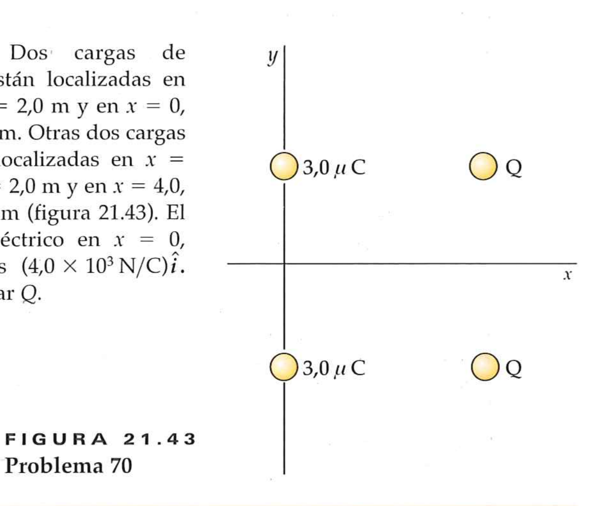


FIGURA 21.43 Problema 70

71 •• Dos cargas puntuales tienen una carga total igual a 200 μC y están separadas 0,600 m. (*a*) Determinar la carga de cada una si se repelen con una fuerza de 120 N. (*b*) Calcular la fuerza sobre cada carga si tienen cada una 100 μC. SSM

72 •• Dos cargas puntuales tienen una carga total igual a 200 μC y están separadas 0,600 m. (*a*) Determinar la carga de cada una si se atraen con una fuerza de 120 N. (*b*) Calcular la fuerza sobre cada carga si tienen cada una 100 μC. SSM

73 •• Una carga de −3,0 μC está localizada en el origen; una segunda carga de 4,0 μC está localizada en $x = 0{,}2$ m, $y = 0$; y una tercera carga Q está situada en $x = 0{,}32$ m, $y = 0$. La fuerza que actúa sobre la carga de 4,0 μC es 240 N, en dirección x positiva. (*a*) Determinar la carga Q. (*b*) Con esta configuración de tres cargas, ¿en qué punto a lo largo de la dirección x el campo eléctrico es cero?

74 •• Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud L. Cuando cada una de las esferas tiene una carga q, cada cuerda forma un ángulo θ con la vertical, como indica la figura 21.44. (a) Demostrar que la carga q viene dada por $q = 2L \operatorname{sen}\theta \sqrt{(mg/k)\operatorname{tg}\theta}$ donde k es la constante de Coulomb. (b) Determinar q si $m = 10$ g, $L = 50$ cm y $\theta = 10°$.

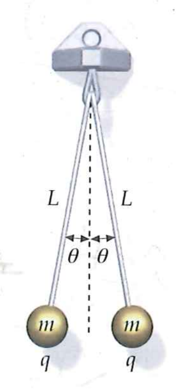


FIGURA 21.44 Problema 74

75 •• (a) Supongamos que en el problema 74, $L = 1{,}5$ m, $m = 0{,}01$ kg y $q = 0{,}75$ mC. ¿Cuál es el ángulo que cada cuerda forma con la vertical? (b) Determinar el ángulo que cada cuerda forma con la vertical si una masa tiene una carga de 0,50 μC y la otra una carga de 1,0 μC.

76 •• Cuatro cargas del mismo valor están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado L, según se ve en la figura 21.45. (a) Hallar el módulo, dirección y sentido de la fuerza ejercida sobre la carga situada en el vértice inferior izquierdo por las otras cargas. (b) Demostrar que el campo eléctrico debido a las cuatro cargas en el punto medio de uno de los lados del cuadro está dirigido a lo largo de dicho lado hacia la carga negativa y que su valor E es

$$E = k\frac{8q}{L^2}\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right).$$

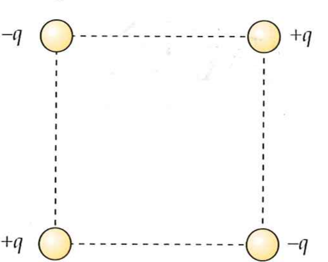


FIGURA 21.45 Problema 76

77 •• La figura 21.46 muestra una palanqueta formada por dos masas idénticas m sujetas a los extremos de una barra delgada (sin masa) de longitud a con un pivote en su centro. Las masas transportan las cargas $+q$ y $-q$, y el sistema está localizado en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Demostrar que para valores pequeños del ángulo θ entre la dirección del dipolo y el campo eléctrico, el sistema ejecuta un movimiento armónico simple y deducir la expresión del periodo de este movimiento. SSM

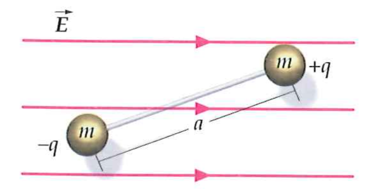


FIGURA 21.46 Problemas 77 y 78

78 •• Para la palanqueta de la figura 21.46, sea $m = 0{,}02$ kg, $a = 0{,}3$ m y $\vec{E} = (600\text{ N/C})\hat{\imath}$. Inicialmente, la palanqueta está en reposo y forma un ángulo de 60° con el eje x. Se deja entonces en libertad y cuando está momentáneamente alineada con el campo eléctrico, su energía cinética es 5×10^{-3} J. Determinar el módulo de Q.

79 •• Un electrón (carga $-e$, masa m) y un positrón (carga $+e$, masa m) giran alrededor de su centro común de masas bajo la influencia de su fuerza atractiva de Coulomb. Determinar la velocidad v de cada partícula en función de e, m, k y su separación L. SSM

80 ••• Se coloca un péndulo simple de 1,0 m de longitud y 5×10^{-3} kg de masa en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ que se dirige verticalmente hacia arriba. La "lenteja" del péndulo tiene una carga de $-8{,}0$ μC. El periodo del péndulo es 1,2 s. Determinar el módulo y la dirección del campo eléctrico.

81 ••• Una pequeña masa (puntual) m de carga q está restringida a moverse verticalmente dentro de un cilindro estrecho y sin rozamiento (figura 21.47). En el fondo del cilindro hay una masa puntual de carga Q de igual signo que q. (a) Demostrar que la masa m estará en equilibrio a una altura $y_0 = (kqQ/mg)^{1/2}$. (b) Demostrar que si la masa m es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio y se deja en libertad ejecutará un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\omega = (2g/y_0)^{1/2}$.

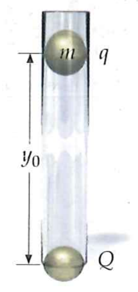


FIGURA 21.47 Problema 81

82 ••• Dos moléculas polares neutras se atraen entre sí. Supongamos que cada una de ellas posee un momento dipolar $\vec{p}$ y que estos dipolos están alineados a lo largo del eje x y separados una distancia d. Deducir una expresión para la fuerza de atracción en función de p y d.

83 ••• Dos cargas positivas iguales Q se encuentran sobre el eje x en $x = \frac{1}{2}a$ y $x = -\frac{1}{2}a$. (a) Obtener una expresión para el campo eléctrico en función de y sobre el eje y. (b) Una bolita de masa m, y carga q, se mueve sobre una barra delgada y sin rozamiento a lo largo del eje y. Determinar la fuerza que actúa sobre la carga q en función de y; determinar el signo q para que esta fuerza apunte siempre alejándose del origen. (c) La bolita esta inicialmente en reposo en el origen. Si se le da un pequeño impulso en la dirección $+y$, ¿cómo se moverá la bolita en el instante en el que la fuerza es máxima, considerando despreciable la fuerza gravitatoria?

84 ••• Un núcleo de oro está a 100 fm (1 fm $= 10^{-15}$ m) de un protón en reposo. Cuando se libera el protón, adquiere una velocidad debida a la repulsión que le produce la carga del núcleo de oro. ¿Cuál es la velocidad del protón a grandes distancias (considerar que la distancia es infinita) del núcleo? (Asumir que el núcleo de oro permanece fijo.)

85 ••• Durante el famoso experimento de Ernest Rutherford en 1919, se lanzaron núcleos de helio doblemente ionizados (las denominadas partículas α) contra una lámina de oro. Se descubrió que toda la masa de un átomo estaba prácticamente en el núcleo. Suponer que durante este experimento, una partícula α lejos de la lámina tiene una energía cinética de 5,0 MeV. Si se dirige la partícula α hacia un núcleo de oro de la lámina y la única fuerza que actúa sobre él es la fuerza eléctrica de repulsión entre la partícula y el núcleo de oro, ¿cuánto se acercará la partícula α al núcleo antes de retroceder debido a la repulsión entre ambos? Es decir, ¿cuál es la mínima separación entre las centros de la partícula α y el núcleo de oro? SSM

86 ••• En el experimento de Millikan, que permite determinar la carga del electrón, una microesfera de poliestireno se carga y se deja caer libremente en el aire, interaccionando con un campo eléctrico vertical conocido. La microesfera se acelera en la dirección del campo hasta que alcanza la velocidad límite, de tal forma que su carga queda determinada por esta velocidad. En este experimento cada pequeña esfera tiene un radio de $5{,}5 \times 10^{-7}$ m y el campo tiene una intensidad de $E = 6 \times 10^4$ N/C. La fuerza de resistencia del aire sobre la esfera es $F_a = 6\pi\eta\, rv$, donde v es la velocidad la esfera, η la viscosidad del aire ($\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ N · s/m²), y la densidad del poliestireno es de $1{,}05 \times 10^3$ Kg/m³. (a) Si el campo eléctrico está dirigido hacia abajo y la velocidad límite con la que sube la esfera es $v = 1{,}16 \times 10^{-4}$, ¿cuál es el valor de la carga de la esfera? (b) ¿Cuál es el exceso de electrones en la misma? (c) Si se cambia la dirección del campo, manteniendo su módulo, ¿cuál será la velocidad límite?

87 ••• En el problema 86, se describe el experimento de Millikan con objeto de determinar la carga del electrón. En este experimento, mediante una fuente de alimentación (conmutable), se puede cambiar el sentido del campo eléctrico manteniendo su módulo, de tal forma que es posible medir las velocidades límites de la microesfera cuando éstas tienen, de forma alternada, el mismo sentido y el opuesto al de la fuerza de gravedad. Si v_a y v_d son las velocidades límite en sentido ascendente y descendente, respectivamente, y $v = v_a + v_d$, demostrar que $v = qE/(3\pi\eta\, r)$, donde q es la carga neta de la microesfera. ¿Qué ventajas aporta el método de medir las dos velocidades, v_a y v_d, con respecto al de medir una sola? Las variaciones de la velocidad v se producen en saltos discretos Δv, debido a que la carga está cuantificada. Utilizando los datos del problema 86, calcular Δv. SSM



CAPÍTULO

22

LOS RELÁMPAGOS SON FENÓMENOS ELÉCTRICOS. CUANDO SE PRODUCE UN RAYO, SE TRANSFIEREN CARGAS ENTRE LAS NUBES Y LA TIERRA. EL DESTELLO LUMINOSO SE PRODUCE PORQUE MOLÉCULAS DE AIRE QUE ESTABAN EN ESTADOS EXCITADOS CAEN A ESTADOS DE MÁS BAJA ENERGÍA. *(Photo Disc.)*

Campo eléctrico II: distribuciones continuas de carga

? ¿Cómo podríamos calcular la carga en la superficie de la Tierra? (Véase el ejemplo 22.15.)

A escala microscópica, la carga eléctrica está cuantificada. Sin embargo, con frecuencia se presentan situaciones en las que un gran número de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse distribuida en el espacio de forma continua. El concepto de densidad de carga continua para describir una distribución de un gran número de cargas discretas, es semejante al concepto de densidad de masa continua.

Además de distribuciones de carga continua, analizamos la importancia de la simetría en la determinación del campo eléctrico. Los avances matemáticos de Carl Friedrich Gauss demostraron que el campo eléctrico mantiene las propiedades simétricas. El conocimiento de las propiedades de simetría de las distribuciones de carga facilita en muchos casos la determinación del campo eléctrico que crean.

En este capítulo, veremos algunos ejemplos del uso de la ley de Coulomb para hallar el campo eléctrico debido a diversos tipos de distribuciones continuas de carga. Después, introduciremos la ley de Gauss, que relaciona el campo eléctrico que existe sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie, y utilizaremos esta relación para calcular el campo eléctrico en ciertas distribuciones de carga que tienen un alto grado de simetría.

22.1 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ MEDIANTE LA LEY DE COULOMB

La figura 22.1 muestra un elemento de carga $dq = \rho\, dV$ suficientemente pequeño para que podamos considerarlo como una carga puntual. El elemento infinitesimal de carga dq es la cantidad de carga contenida en el volumen dV y ρ es la carga por unidad de volumen. El campo eléctrico $d\vec{E}$ en un punto del campo P debido a este elemento de carga viene dado por la ley de Coulomb:

$$d\vec{E} = dE_r\,\hat{r} = \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{r} \qquad 22.1a$$

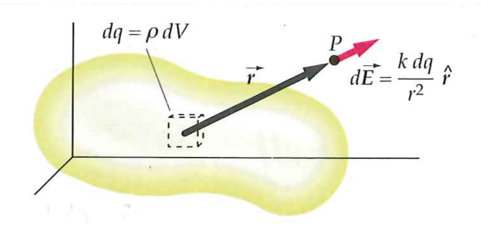


FIGURA 22.1 Un elemento de carga dq produce un campo $d\vec{E} = (k\,dq/r^2)\hat{r}$ en el punto P. El campo en P debido a la carga total se obtiene integrando esta expresión para toda la distribución de carga.

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta desde el elemento a dicho punto, y dE_r que es la componente de $d\vec{E}$ en la dirección de $\hat{r}$ viene dada por $k\,dq/r^2$. El campo total en P se determina integrando esta expresión para la distribución de la carga completa. Es decir,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k\hat{r}}{r^2}\,dq \qquad 22.1b$$

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Considerar distribuciones de carga continuas para describir un gran número de cargas puntuales es similar a la descripción del aire como una distribución de masa continua aunque se sabe que está constituido por moléculas. En ambos casos, se define un elemento de volumen ΔV que es suficientemente grande para contener gran cantidad de partículas cargadas pero suficientemente pequeño como para reemplazar ΔV por un diferencial de V, dV, usando el cálculo diferencial sin introducir error. Si la carga se distribuye en una línea o en una superficie, se utiliza $dq = \sigma\, dA$ o $dq = \lambda\, dL$ y se integra a toda la superficie o línea. (En estos casos, σ y λ son carga por unidad de área o longitud, respectivamente.) Normalmente, la integración se hace expresando $\hat{r}$ en coordenadas cartesianas e integrando componente a componente.

! La componente x de $\hat{r}$ es $\hat{r}\cdot\hat{i} = \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\hat{r}$ y $\hat{i}$.* La componente y y la componente z se calculan de forma similar.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de $\vec{E}$ utilizando las fórmulas 22.1a y 22.1b

PLANTEAMIENTO Hacer un diagrama de la configuración de cargas junto con un punto genérico P denominado punto de campo que es donde se calcula el campo. Además, en este dibujo se señalará un incremento de carga dq en un punto arbitrario de la fuente de campo S.

SOLUCIÓN

1. Poner los ejes coordenados en el dibujo. Elegir los ejes considerando cualquier propiedad de simetría de la distribución de carga. Por ejemplo, si la carga se distribuye a lo largo de una línea recta, se selecciona esta línea como uno de los ejes. Se dibuja un segundo eje que pase por el punto P, se señala la distancia r entre los puntos P y S, y se define un vector unitario $\hat{r}$ cuya dirección va desde el punto S hacia el P.
2. Para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ usando la ecuación 22.1b, la expresión $d\vec{E} = dE_r\,\hat{r}$ se desarrolla por componentes. La componente x de $d\vec{E}$ es $dE_x = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{i} = dE_r\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\hat{r}$ y $\hat{i}$ (ver figura 22.2) y la componente y de $d\vec{E}$ es $dE_y = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{j} = dE_r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

* La componente de un vector en una dirección dada es igual al producto escalar del vector por el vector unidad en esta dirección. El producto escalar se analiza en la sección 6.3.

3. Expresar $\vec{E}$ en la ecuación 22.1*b* en términos de sus componentes *x* e *y*.

$$E_x = \int dE_x = \int dE_r \cos\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE_r \operatorname{sen}\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\operatorname{sen}\theta$$

4. Para calcular E_x, expresar, según sea el caso, dq como $\rho\, dV$ o $\sigma\, dV$ o $\lambda\, dL$ e integrar. Para calcular E_y se sigue el mismo procedimiento que el usado para la componente *x*.
5. Los argumentos de simetría se utilizan para demostrar que una o más componentes de $\vec{E}$ son cero. (Por ejemplo, en 22.5 se usa un argumento de simetría para demostrar que $E_y = 0$.)

COMPROBACIÓN Si la distribución de carga se localiza en una región del espacio finita, la expresión del campo eléctrico en puntos alejados de la distribución de carga se considerará con respecto al centro de la distribución. Cuando existe simetría, la posición de dicho centro se determina por simple observación del dibujo.



Véase el **Apéndice de matemáticas** *para mayor información sobre* **Trigonometría**

Ejemplo 22.1 El campo eléctrico debido a una línea cargada de longitud finita

Determinar el campo eléctrico en un punto arbitrario *P* debido a un segmento recto de longitud *L* y carga *Q* uniformemente distribuida cuya densidad es *Q*/*L*.

PLANTEAMIENTO Se toma como eje *x* la recta que contiene a la varilla, la cual está entre $x = x_1$ y $x = x_2$, y se toma como eje *y* aquel que pasa por el punto *P*. Sea *y* la distancia radial de *P* al eje *x*. Se determina el campo $\vec{E}$ en *P*, calculado sus componentes por separado. Utilizando la ecuación 22.1, primero determinamos $d\vec{E}$ en *P* debido a un incremento arbitrario *dq* de la distribución de carga. A continuación, se calcula la integral de cada componente extendida al espacio de la distribución completa. Como *Q* está uniformemente distribuida, la densidad de carga lineal λ es *Q*/*L*.

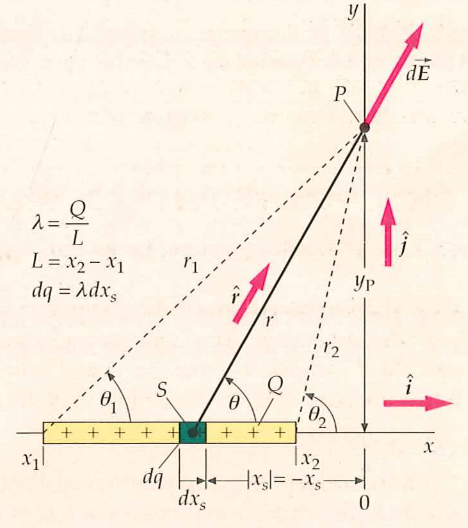


FIGURA 22.2 Geometría para el cálculo del campo eléctrico en un punto *P* creado por un segmento con densidad de carga lineal uniforme.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la configuración de la carga del sistema, un punto arbitrario *P*, el eje *x* conteniendo al segmento, y el eje *y* que pasa por el punto *P*. Señalar un incremento arbitrario de longitud centrado en un punto *S* del segmento (localizado en $x = x_S$) que tenga longitud dx_S y carga *dq*. Dibujar el vector $d\vec{E}$ suponiendo *dq* positivo (figura 22.2):

2. $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$. Obtener las expresiones para dE_x y dE_y en términos de dE_r y θ, donde dE_r es la componente de $d\vec{E}$ en la dirección del vector que une *S* con *P*:

$$d\vec{E} = dE_r\,\hat{r}$$

entonces, tenemos que

$$dE_x = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{i} = dE_r\cos\theta$$

$$dE_y = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{j} = dE_r\operatorname{sen}\theta$$

3. Primero se resuelve E_x. Expresar dE_r usando la ecuación 21.1*a*, donde *r* es la distancia desde el punto fuente *S* hasta el punto *P*. En la figura 22.2 se puede ver que $\cos\theta = |x_S|/r = -x_S/r$. Además, se tiene que $dq = \lambda\, dx_S$:

$$dE_r = \frac{k\,dq}{r^2} \text{ y } \cos\theta = \frac{-x_S}{r}$$

entonces, tenemos que

$$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\cos\theta\,\lambda\,dx_S}{r^2}$$

4. Integrar el resultado del paso 3:

$$dE_x = \int_{x_1}^{x_2}\frac{k\cos\theta\,\lambda\,dx_S}{r^2} = k\lambda\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos\theta\,dx_S}{r^2}$$

5. Hacer un cambio de variable, pasando de x_S a θ. A partir de la figura 22.2, hallar la relación entre x_S y θ y entre r y θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_P}{|x_S|} = \frac{y_P}{-x_S}, \quad \text{por tanto,} \quad x_S = -\frac{y_P}{\operatorname{tg}\theta} = -y_P \cot\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_P}{r}, \quad \text{por tanto,} \quad r = \frac{y_P}{\operatorname{sen}\theta}$$

6. Diferenciar el resultado del paso 5 para obtener la expresión de dx_S y tener presente que el punto P es fijo y, por tanto, y_P es constante:

$$dx_S = -y_P \frac{d\cot\theta}{d\theta} = y_P \csc^2\theta\, d\theta$$

7. Sustituir $y_P \csc^2\theta\, d\theta$ por dx_S e $y_P/\operatorname{sen}\theta$ por r en la integral del paso 4 y simplificar:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos\theta\, dx_S}{r^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\theta\, y_P \csc^2\theta\, d\theta}{y_P^2/\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{y_P}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta \qquad (y_P \neq 0)$$

8. Resolver la integral y despejar E_x:

$$E_x = k\lambda \frac{1}{y_P}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{y_P}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) = \frac{k\lambda}{y_P}\left(\frac{y_P}{r_2} - \frac{y_P}{r_1}\right)$$

$$= k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (r_1 > 0 \text{ y } r_2 > 0)$$

9. Se puede determinar E_y de forma análoga, con el método usado en los pasos 3-7 (ver el problema 22.21):

$$E_y = -\frac{k\lambda}{y_P}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda\left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1}\right) \qquad (y_P \neq 0)$$

y

$$E_y = 0 \qquad (y_P = 0)$$

10. Combinar los pasos 8 y 9 para obtener el campo eléctrico completo en P:

$$\vec{E} = \boxed{E_x\hat{i} + E_y\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Considerar el plano perpendicular al segmento y que pasa por su centro. Por simetría vemos que el campo $E_x = 0$ en todos los puntos de este plano. En todos los puntos de este plano $r_1 = r_2$. El resultado del paso 8 da $E_x = 0$ si $r_1 = r_2$, como era de esperar.

OBSERVACIÓN La primera expresión de E_y del paso 9 es válida para cualquier punto en el plano xy menos en el eje x. Las dos cotangentes en la expresión de E_y son:

$$\cot\theta_1 = \frac{-x_1}{y_P} \quad \text{y} \quad \cot\theta_2 = \frac{-x_2}{y_P}$$

y ninguna de estas dos funciones tiene valor finito en el eje x, donde $y_P = 0$. La segunda expresión para E_y del paso 9 se obtiene usando la ecuación 22.1*a*. Considerando que, en el eje x, $\hat{r} = \pm\hat{i}$, podemos ver en la ecuación 22.1 que $d\vec{E} = \pm dE\hat{i}$, lo cual implica que $E_y = 0$.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.1 Usar la expresión de E_x obtenida en el paso 8 para demostrar que $E_x > 0$ en todos los puntos del eje x para $x < x_2$.

El campo eléctrico en un punto P en el eje z debido a la varilla uniformemente cargada de la figura 22.3 viene dado por $\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R}$, donde

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) = k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (r_1 \neq 0) \text{ y } (r_2 \neq 0) \qquad 22.2a$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda\left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1}\right) \qquad (R \neq 0) \qquad 22.2b$$

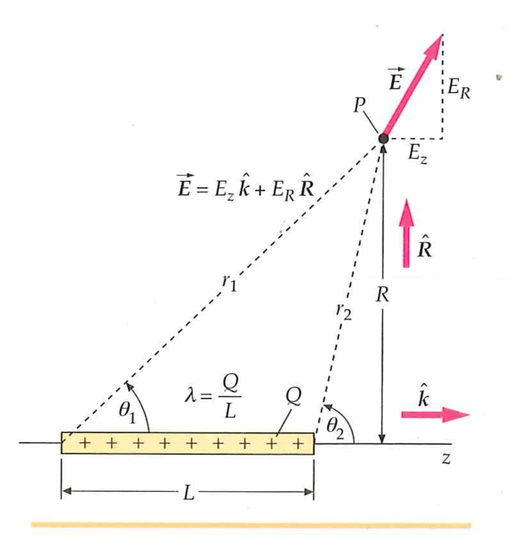


FIGURA 22.3 Campo eléctrico debido a una varilla fina uniformemente cargada.

Estas ecuaciones se pueden deducir del ejemplo 22.1. Las expresiones para E_z (ecuación 22.2*a*) son indefinidas en los extremos del segmento y las expresiones de E_R (ecuación 22.2*b*) son indefinidas en todos los puntos del eje z, donde $R = 0$. Sin embargo, $E_R = 0$ en todos los puntos en los que $R = 0$.

Ejemplo 22.2 $\vec{E}$ producido por una línea cargada finita en puntos alejados de la carga

Sea una carga Q uniformemente distribuida a lo largo del eje z entre los puntos $z = -\frac{1}{2}L$ y $z = +\frac{1}{2}L$. Demostrar que para puntos del eje z alejados, la expresión del campo eléctrico se aproxima a la de una carga puntual Q colocada en el origen.

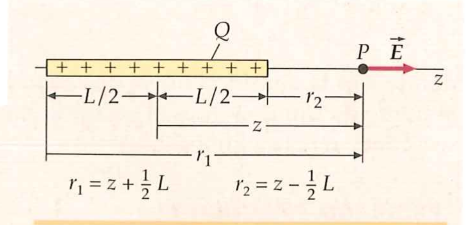


FIGURA 22.4 Geometría para el cálculo del campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal uniforme de longitud L, carga Q y densidad de carga lineal $\lambda = Q/L$.

PLANTEAMIENTO Usar la ecuación 22.2*a* para demostrar que para valores grandes de z, la expresión del campo eléctrico del segmento de carga se aproxima al que crea una carga puntual colocada en el origen.

SOLUCIÓN

1. El campo eléctrico en el eje z tiene solamente la componente z, cuya expresión es la dada en la ecuación 22.2*a*:
$$E_z = k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$
2. Dibujar el segmento cargado. Colocar en el eje z el punto P donde se calcula el campo, y señalar r_1 y r_2 (figura 22.4):
3. Sustituir $r_1 = z + \frac{1}{2}L$ y $r_2 = z - \frac{1}{2}L$ en el resultado del paso 1 y simplificar:
$$E_z = k\lambda\left(\frac{1}{z - \frac{1}{2}L} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}L}\right) = \frac{kQ}{L}\frac{L}{z^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2} = \frac{kQ}{z^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2} \qquad \left(z > \tfrac{1}{2}L\right)$$
4. Obtener una expresión aproximada para E_z cuando $z >> L$, para lo cual se desprecia $(\frac{1}{2}L)^2$ frente a z^2 en el resultado del paso 3:
$$\boxed{E_z \approx \frac{kQ}{z^2} \qquad (z \gg L)}$$

COMPROBACIÓN La expresión aproximada (paso 4) es inversamente proporcional al cuadrado de z, que es la distancia al origen. Esta expresión es la misma que la de una carga Q puntual que estuviera en el origen.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.2 El resultado del paso 3 es válido para $L/2 > z > \infty$. ¿Es válido para $-L/2 < z < L/2$? Razonar la respuesta.

Ejemplo 22.3 $\vec{E}$ debido a una línea de carga infinita

Determinar el campo debido a una línea uniformemente cargada infinita en ambos sentidos y con una densidad de carga lineal λ.

PLANTEAMIENTO Una línea cargada infinita se considera infinita si las distancias entre los extremos de la distribución y el punto donde se considera el campo son mucho mayores que cualquiera de las distancias radiales dibujadas en la figura 22.2. Para calcular el campo eléctrico debido a la línea de carga, tomamos los límites para $x_1 \rightarrow -\infty$ y para $x_2 \rightarrow +\infty$. En la figura, vemos que debemos tomar límites para $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow \pi$ en las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b*.

SOLUCIÓN

1. Considerar la primera expresión del campo eléctrico en cada una de las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b*:
$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)$$
$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$
2. Tomar límites para $\theta_1 \rightarrow 0$ y para $\theta_2 \rightarrow \pi$:
$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}0) = \frac{k\lambda}{R}(0 - 0) = 0$$
$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{k\lambda}{R}(-1 - 1) = 2\frac{k\lambda}{R}$$
3. Expresar el campo eléctrico en forma vectorial:
$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = 0\hat{k} + \frac{2k\lambda}{R}\hat{R} = \boxed{\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}}$$

COMPROBACIÓN El campo eléctrico en la dirección radial es tal como esperabamos; es así debido a la simetría. (La línea de carga es uniformemente distribuida y se extiende hasta el infinito en ambos sentidos.)

OBSERVACIÓN El módulo del campo eléctrico decrece inversamente con la distancia radial desde la línea de carga.

El campo eléctrico debido a una línea uniformemente cargada que se extiende hasta el infinito en ambas direcciones viene dado por

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{R} \qquad 22.3$$

donde λ es la densidad lineal de carga, R es la distancia radial de la línea de carga al punto de campo y $\hat{R}$ es el vector unitario en la dirección radial. La ecuación 22.3 se obtiene en el ejemplo 22.3.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.3

Demostrar que si k, λ y R se dan en unidades del SI, la ecuación 22.3 nos da el campo eléctrico en N/C.

La constante de Coulomb se suele escribir en términos de otra constante, ϵ_0, denominada, **permitividad eléctrica del vacío**.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad 22.4$$

Utilizando esta notación, la ley de Coulomb para $\vec{E}$ ecuación 21.7, se escribe

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad 22.5$$

y $\vec{E}$ para una línea cargada infinita (equación 22.3) con densidad de carga lineal λ, se escribe

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\hat{R} \qquad 22.6$$

El valor de ϵ_0 en unidades del SI es

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)} \qquad 22.7$$

Ejemplo 22.4 Aproximación de las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b* a un plano de simetría

Una carga Q está uniformemente distribuida a lo largo del eje z desde $z = -\frac{1}{2}L$ hasta $z = +\frac{1}{2}L$. (*a*) Hallar una expresión para el campo eléctrico en función de R en el plano $z = 0$, siendo R la distancia radial entre el punto en el que se desea calcular el campo y el eje z. (*b*) Demostrar que para $R >> L$, la expresión obtenida en la parte (*a*) se aproxima a la de una carga puntual colocada en el origen. (*c*) Demostrar que para $R << L$, la expresión del apartado (*a*) se aproxima a la de una línea de carga infinita ubicada en el eje z y con densidad lineal de carga $\lambda = Q/L$.

PLANTEAMIENTO La configuración de carga es la misma que la del ejemplo 22.2 y la densidad de carga es Q/L. Dibujar la línea de carga en el eje z y poner el punto campo en el plano $z = 0$. Entonces, las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b* permiten obtener la expresión del campo que se pide en el apartado (*a*). El campo eléctrico debido a una carga puntual decrece de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga. Examinar el resultado de la parte (*a*) para ver cómo se aproxima aquél al de una carga puntual colocada en el origen para $R >> L$. El campo eléctrico debido a una línea de carga de longitud infinita decrece de forma inversamente proporcional a la distancia radial desde la línea (ecuación 22.3). Examinando el resultado de la parte (*a*) vemos cómo se aproxima la expresión a la de una línea de longitud infinita para $R << L$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Elegir la primera expresión para el campo eléctrico en cada una de las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b*:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

2. Dibujar la configuración del sistema con la línea cargada en el eje z desde $z = -\frac{1}{2}L$ hasta $z = +\frac{1}{2}L$. Colocar el punto P en el plano $z = 0$ a distancia R del origen (figura 22.5):

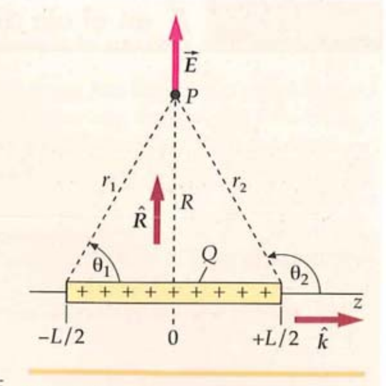


FIGURA 22.5

3. En esta figura se ve como $\theta_2 + \theta_1 = \pi$, de tal forma que $\operatorname{sen}\theta_2 = \operatorname{sen}(\pi - \theta_1) = \operatorname{sen}\theta_1$ y $\cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1$. Sustituir estos valores en el resultado del paso 1:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1) = 0$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(-\cos\theta_1 - \cos\theta_1) = \frac{2k\lambda}{R}\cos\theta_1$$

4. Expresar $\cos\theta_1$ en función de R y L y sustituir en el resultado del paso 3:

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}$$

entonces, tenemos

$$E_R = \frac{2k\lambda}{R}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}} = \frac{k\lambda L}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}$$

5. Expresar el campo eléctrico en forma vectorial y sustituir Q por λL:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = 0\hat{k} + E_R\hat{R}$$

entonces, tenemos

$$\vec{E} = E_R\hat{R} = \boxed{\frac{kQ}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}\hat{R}}$$

(*b*) 1. Observar el resultado del paso 5. Si $R >> L$, entonces $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2 \approx R^2$. Sustituir R^2 por $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2$:

$$\vec{E} \approx \frac{kQ}{R\sqrt{R^2}}\hat{R} = \frac{kQ}{R^2}\hat{R} \qquad (R \gg L)$$

2. En esta expresión aproximada vemos que el campo eléctrico decrece de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen, tal como ocurre con el campo de una carga puntual:

$$\vec{E} \approx \boxed{\frac{kQ}{R^2}\hat{R} \qquad (R \gg L)}$$

(*c*) 1. Observar el resultado del paso 5 de la parte (*a*). Si $R \ll L$, entonces $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2 \approx (\frac{1}{2}L)^2$. Sustituir $(\frac{1}{2}L)^2$ por $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2$. En esta expresión aproximada vemos que el campo eléctrico varía con la inversa de la distancia radial desde la línea de carga, tal como lo hace la línea infinita de carga (ecuacion 22.3):

$$\vec{E} \approx \frac{k\lambda L}{R\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2}}\hat{R} = \boxed{\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}} \qquad (R \ll L)$$

COMPROBACIÓN Los apartados (*b*) y (*c*) demuestran que el resultado del apartado (*a*) es plausible. Así, hemos visto que el resultado del apartado (*a*) es válido en los casos extremos en que $R \gg L$ y $R \ll L$.

OBSERVACIÓN La figura 22.6 muestra el resultado exacto para la línea de carga de longitud $L = 10$ cm y una densidad de carga $\lambda = 4{,}5$ nC/m. Tambien muestra esta figura los casos límite de una línea de carga infinita con la misma densidad de carga y una carga puntual $Q = \lambda L$.

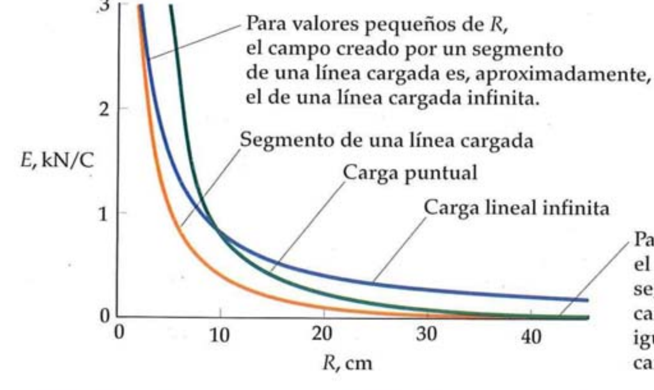
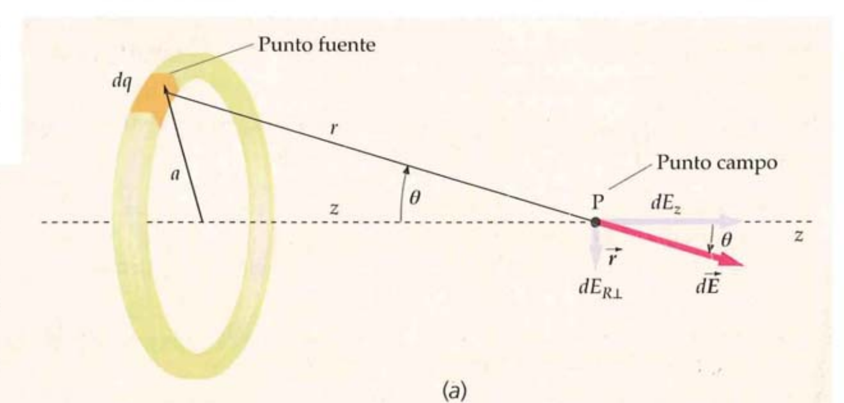


FIGURA 22.6 Representación del módulo del campo eléctrico, en función de la distancia, generado por un segmento de línea cargada de 10 cm de largo, una carga puntual y una línea infinita de carga.

Ejemplo 22.5 $\vec{E}$ en el eje de un anillo cargado

Un anillo (una circunferencia) fino de radio a está uniformemente cargado con una carga total Q. Determinar el campo eléctrico debido a la carga en los puntos del eje perpendicular al plano y que atraviesa el centro del anillo.

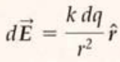


(a)

PLANTEAMIENTO Comenzamos con $d\vec{E} = (k\,dq/r^2)\hat{r}$ (ecuación 22.1*a*), para calcular el campo eléctrico en un punto arbitrario del eje. Dibujar el anillo cargado. Consideramos que el eje z coincide con el eje del anillo que se encuentra en el plano $z = 0$. Indicamos el punto de campo P y un punto fuente S en el anillo.

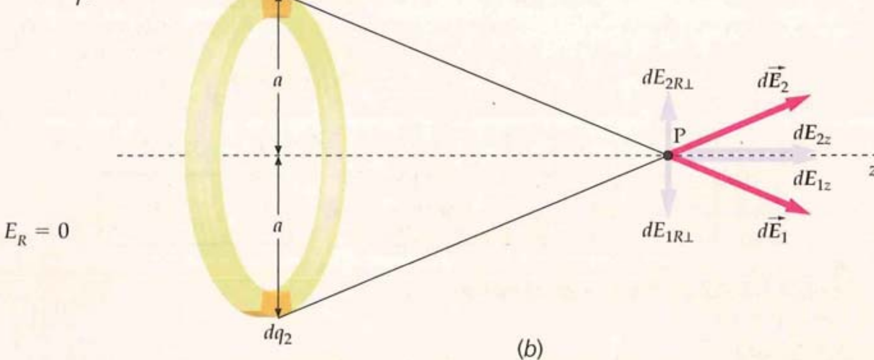
SOLUCIÓN

1. Escribir la ecuación 22.1*a*, expresando el campo creado por el elemento de carga dq:



$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$$

2. Dibujar el anillo (figura 22.7*a*) y su eje (eje z). Mostrar el vector campo eléctrico en el punto P debido a la carga dq localizada en el punto fuente S:



(b)

3. Dibujar el anillo (figura 22.7*b*) y mostrar las componentes axial y radial de $\vec{E}$ para idénticos elementos en lugares opuestos del anillo. La componente radial se cancela en cada par de elementos dq, de tal forma que no queda más que la componente axial:

$$E_R = 0$$

4. Expresar la componente z del campo eléctrico a partir del resultado del paso 1:

$$dE_z = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\,dq}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{k\,dq\,z}{r^3}$$

5. Integrar ambos términos de la igualdad:

$$E_z = \int \frac{kz\,dq}{r^3} = \frac{kz}{r^3}\int dq = \frac{kz}{r^3}Q$$

6. Usando el teorema de Pitágoras, se obtiene $r = \sqrt{z^2 + a^2}$:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = E_z\hat{k} + 0 = \boxed{\frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

FIGURA 22.7 (*a*) Anillo cargado de radio a. El campo eléctrico en el punto P del eje x debido al elemento de carga dq posee una componente a lo largo del eje x y otra perpendicular a ese mismo eje. (*b*) Para cada elemento de carga dq_1 existe otro elemento simétrico dq_2, de tal forma que la suma de las componentes del campo perpendiculares al eje x, generadas por todos los elementos del anillo, es cero.

COMPROBACIÓN Sería lógico que la dirección del campo eléctrico en puntos del eje z esté dirigido alejándose del origen para $Q > 0$. El resultado del paso 6 coincide con lo esperado considerando que z es positivo para $+z$ y negativo para $-z$. Además, para $z >> a$, podemos esperar que E decrezca inversamente con el cuadrado de la distancia desde el origen. El resultado del paso 6 coincide con lo esperado, puesto que da el resultado de $E_z \approx kQ/z^2$ si a^2 es despreciable frente a z^2.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.4 En la figura 22.8, se representa gráficamente E_z versus z a lo largo del eje. Determinar el punto en el eje del anillo donde E_z es máximo. *Ayuda:* $dE_z/dz = 0$, *donde* E_z *es máximo.*

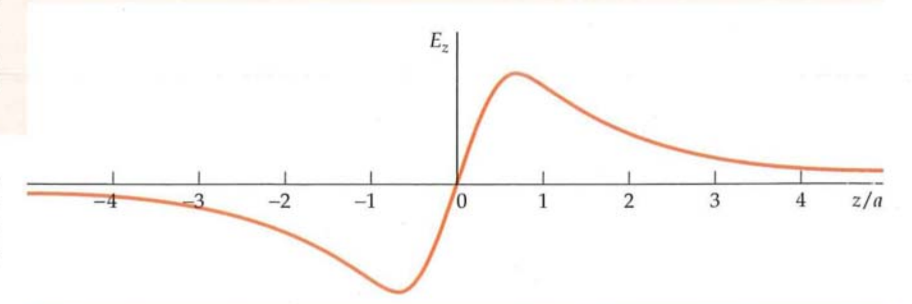


FIGURA 22.8

Ejemplo 22.6 $\vec{E}$ en el eje de un anillo cargado — Conceptual

En el ejemplo del anillo 22.5, ¿por qué el módulo del campo eléctrico es más pequeño cerca del origen, incluso aunque éste se sitúe próximo al anillo, que en cualquier otro punto del eje z (ver figura 22.9)?

PLANTEAMIENTO La clave de la solución de este problema se encuentra en la figura 22.7*b*. Volver a dibujar esta figura con el punto campo P en el eje z y cerca del origen.

SOLUCIÓN

1. Volver a dibujar la figura 22.7*b* con el punto en el que se calcula el campo cerca del origen:
2. Los campos cerca del origen debidos a cada uno de los elementos simétricos son grandes pero de igual módulo y direcciones casi opuestas, de tal forma que la suma es casi cero: Cerca del origen, el campo resultante es pequeño y axial.

COMPROBACIÓN En el origen, los dos campos eléctricos son grandes, pero opuestos, y su suma es, por lo tanto, cero. Lejos del origen ($|z| \gg a$), los dos campos eléctricos (figura 22.7*b*) son casi de la misma dirección y, en consecuencia, su suma no es cero.

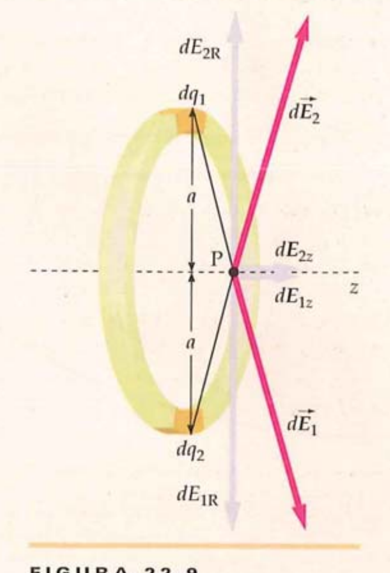


FIGURA 22.9

El campo eléctrico en el eje debido a una carga uniformemente distribuida en un anillo circular de radio a y carga total Q viene dado por $\vec{E} = E_z\hat{k}$, donde

$$E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \qquad 22.8$$

La ecuación 22.8 se deduce en el ejemplo 22.5.



Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Expansión binomial**

Ejemplo 22.7 $\vec{E}$ en el eje de un disco cargado

Considerar un disco uniformemente cargado de radio b y densidad superficial de carga σ. (*a*) Determinar el campo eléctrico en todos los puntos del eje del disco. (*b*) Demostrar que para puntos del eje lejanos al disco, el campo eléctrico se aproxima al generado por una carga puntual igual a la del disco colocada en el origen. (*c*) Demostrar que para un disco uniformemente cargado de radio infinito, el campo eléctrico es uniforme a través de la región en cualquier semiespacio a ambos lados del disco.

PLANTEAMIENTO Calcular el campo en el eje del disco considerando el disco como un conjunto de anillos concéntricos uniformemente cargados.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular el campo en el eje del disco considerando el disco como un conjunto de anillos concéntricos de carga. El campo de un anillo uniformemente cargado con carga Q y radio a se muestra en la ecuación 22.8:

$$\vec{E} = E_z\hat{k}, \text{ donde } E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

2. Dibujar el disco (figura 22.10) y el campo eléctrico $d\vec{E}$ en su eje debido a un anillo elemental de carga dq, radio a y anchura da:

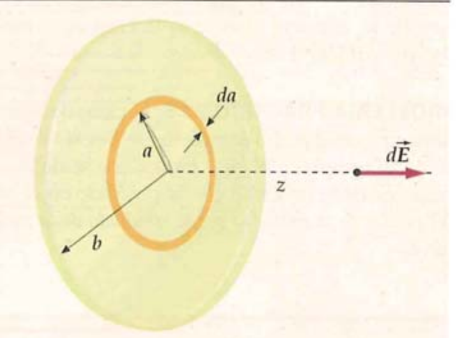


FIGURA 22.10 Un disco cargado uniformemente puede considerarse como una serie de cargas anulares de radio a.

3. Sustituir dq por Q y dE_z por E_z en el resultado del paso 1. Integrar ambos lados de la igualdad para calcular el campo resultante correspondiente al disco entero. El punto donde calculamos el campo es fijo, de tal forma que z es constante:

$$dE_z = \frac{kzdq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\text{entonces, } E_z = \int \frac{kzdq}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = kz\int \frac{dq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

4. Para resolver esta integral, hacemos un cambio de variable de q por a. La carga $dq = \sigma\, dA$, donde $dA = 2\pi a\, da$ es el área de un anillo de radio a y anchura da:

$$dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi a da$$

así, tenemos que $E_z = \pi kz\sigma \int_0^b \frac{2ada}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \pi kz\sigma \int_{z^2+0^2}^{z^2+b^2} u^{-3/2}\, du$

donde $u = z^2 + a^2$; por tanto, $du = 2ada$

5. Resolver la integral y simplificar el resultado:

$$E_z = \pi kz\sigma \left.\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right|_{z^2}^{z^2+b^2} = -2\pi kz\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$

$$= \boxed{\text{sign}(z)\cdot 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{z^2}}}\right)}$$

donde $\text{sign}(z) = z/|z|$. Por definición*:

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

(*b*) 1. Para $z >> b$ (en el eje del disco) el campo eléctrico decrece inversamente con z^2. Para demostrar esto se usa la expansión binomial:

El primer orden de la expansión binomial es: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para $|x| \ll 1$.

2. Aplicar la expansión binomial al resultado del paso 5:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{z^2}}} = \left(1 + \frac{b^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} \qquad z^2 \gg b^2$$

3. Sustituir en el resultado del paso 5 y simplificar. (Para $z \gg b$, sign $(z) = 1$.) Así, la expresión aproximada para el campo en puntos que cumplen $z >> b$ es la misma que el de una carga puntual $Q = \sigma\pi b^2$ colocada en el origen.

$$E_z \approx 2\pi k\sigma\left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2}\right]\right) = 2\pi k\sigma \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} = \boxed{\frac{kQ}{z^2}} \qquad z \gg b$$

donde $Q = \sigma\pi b^2$

(*c*) 1. Tomar límites en el resultado del paso 5 de la parte (*a*) cuando $b \to \infty$. Este resultado es una expresión para E_z que es uniforme, tanto en la región de $z > 0$ como en la de $z < 0$:

$$E_z = \text{sign}(z)\cdot 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}}\right) = \boxed{\text{sign}(z)\cdot 2\pi k\sigma}$$

COMPROBACIÓN El campo eléctrico debería ser de dirección opuesta en cada lado del disco. El resultado del paso 5 de la parte (*a*) concuerda con lo esperado.

OBSERVACIÓN Según el resultado de la parte (*c*), el campo eléctrico es discontinuo para $z = 0$ (figura 22.11) donde el campo da un salto desde $-2\pi k\sigma\hat{i}$ a $+2\pi k\sigma\hat{i}$ cuando se cruza el plano $z = 0$. Hay, en consecuencia, una discontinuidad en E_z con un salto de $4\pi k\sigma = \sigma/\epsilon_0$.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.5 El campo eléctrico debido a una carga superficial uniforme en el plano completo $z = 0$ se da en el resultado de la parte (*c*). ¿Qué fracción del campo en el eje z para $z = a$ se debe a la carga superficial dentro del círculo que tiene un radio $r = 5a$ centrado en el origen? *Sugerencia: dividir el resultado del paso 5 de la parte (a) por el resultado de la parte (c) y después sustituir* 5a *por* r *y* a *por* z.

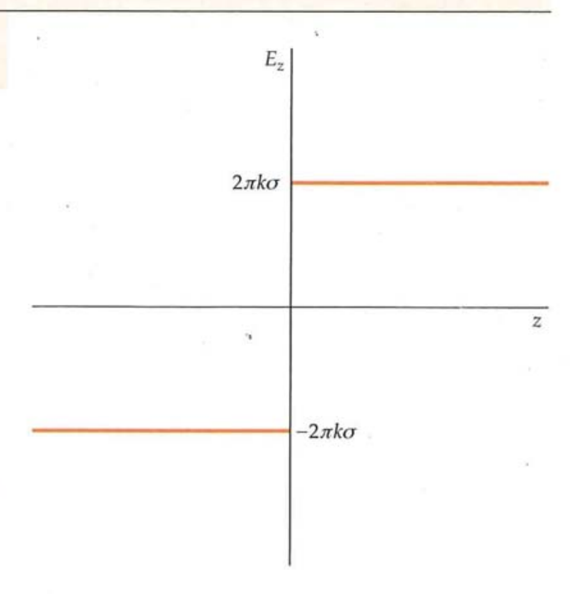


FIGURA 22.11 Gráfico que muestra la discontinuidad de $\vec{E}$ en un plano cargado. ¿En qué se parecen este gráfico y el de la figura 22.8?

* Tanto el programa Excel como el Mathematica utilizan la definición de la función "sign" propuesta aquí. La compañia Texas Instruments, sin embargo, usa la definición de la función "sign" de la siguiente forma: sign(0) =.±1, en lugar de 0.

La respuesta al problema 22.5 no depende de a sino de $r/a = 5$. El 80% del campo a una distancia a desde un plano con carga superficial uniformemente cargada es debido a la carga dentro de un círculo cuyo radio es igual a $5a$ multiplicado por la distancia.

La fórmula para el campo eléctrico en el eje x de un disco uniformemente cargado, obtenida en el ejemplo 22.7, es

$$E_z = \text{sign}(z) \cdot 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right) \qquad 22.9$$

CAMPO ELÉCTRICO EN EL EJE DE UN DISCO CON CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE

donde sign(z) se define en el paso 5 del apartado (a) del ejemplo 22.7 y R es el radio del disco. El campo de un plano uniformemente cargado se obtiene a partir de la ecuación 22.9 haciendo que el límite R/z tienda a infinito. Entonces

$$E_z = \text{sign}(z) \cdot 2\pi k\sigma = \text{sign}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad 22.10$$

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN UN PLANO

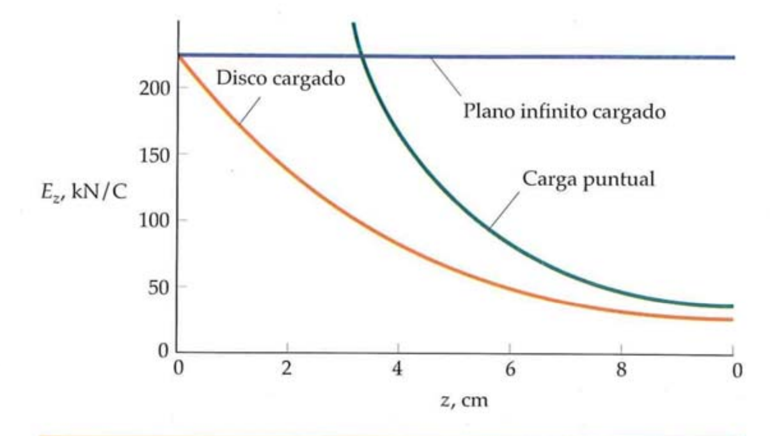


FIGURA 22.12 Un disco y un punto tienen cargas iguales, y un plano infinito y el disco tienen iguales densidades de carga uniformes. Obsérvese que el campo debido al disco tiende al de una carga puntual a grandes distancias y es igual al de un plano infinito cargado en el límite cuando z tiende a 0.

La figura 22.12 muestra el campo eléctrico debido a una carga puntual, un disco con carga uniforme y un plano infinito cargado, todo ello en función de la posición.

Según varía z sobre el eje, el campo eléctrico sufre un salto desde $-2\pi k\sigma\hat{i}$ a $+2\pi k\sigma\hat{i}$ cuando se atraviesa el plano $z = 0$ (figura 22.11). Así, para $z = 0$, hay una discontinuidad en E_z cuyo salto es $4\pi k\sigma$.

Ejemplo 22.8 Campo eléctrico debido a dos planos infinitos

En la figura 22.13, un plano infinito que está en $z = 0{,}00$ m tiene densidad superficial de carga $\sigma = +4{,}5$ nC/m² y otro con densidad $\sigma = -4{,}50$ nC/m² en $z = 2{,}00$ m. Determinar el campo eléctrico en (a) $x = 1{,}80$ m y en (b) $x = 5{,}00$ m.

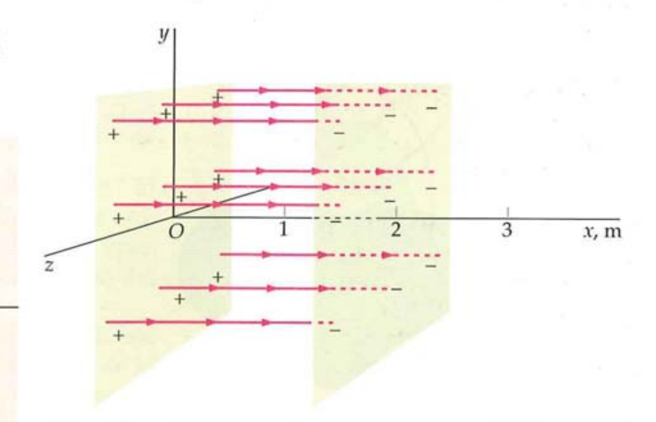


FIGURA 22.13

PLANTEAMIENTO Cada plano cargado produce un campo cuyo módulo es $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Usamos el teorema de superposición para determinar el campo total. Entre los planos, el módulo del campo es σ/ϵ_0 y su dirección la de las x positivas. Para $x > 2{,}00$ y $x < 0$, los dos campos son de igual módulo y direcciones opuestas, por lo que la suma es cero.

SOLUCIÓN

(a) 1. Calcular el módulo del campo producido por cada plano:

$$E = |\sigma|/(2\epsilon_0) = (4{,}50 \times 10^{-9}\ \text{N/C})/(2 \cdot 8{,}85 \times 10^{-12}) = 254\ \text{N/C}$$

2. En $x = 1{,}80$ m, entre los planos, el campo generado por cada plano tiene la dirección de la x positivas:

$$E_{x\,\text{neto}} = E_1 + E_2 = 254\ \text{N/C} + 254\ \text{N/C} = \boxed{508\ \text{N/C}}$$

(*b*) En $x = 5{,}00$ m, los campos debidos a cada uno de los dos planos son opuestos:

$$E_{x\,\text{neto}} = E_1 - E_2 = \boxed{0{,}00\ \text{N/C}}$$

COMPROBACIÓN Como los dos planos tienen cargas de igual valor absoluto y distinto signo, las líneas de campo eléctrico se originan en el plano de carga positiva y acaban en el de carga negativa. $\vec{E}$ es cero en todos los puntos excepto en la región entre los dos planos.

OBSERVACIÓN Obsérvese que $E_{x\,\text{neto}} = 508$ N/C no sólo para $x = 1{,}8$ m sino en cualquier punto entre los dos planos. La configuración de carga en este ejemplo es la de un condensador, como el que se analiza en el capítulo 24.

22.2 LEY DE GAUSS

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante las líneas de fuerza estudiadas en el capítulo 21 está relacionada con una ecuación matemática llamada ley de Gauss. La ley de Gauss es una de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, que veremos en el capítulo 30. Para cargas estáticas, la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. La ley de Gauss permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita. En esta sección, se presenta una argumentación sencilla de la ley de Gauss basada en las propiedades de las líneas de campo eléctrico. En la sección 22.6, se ofrece una deducción más rigurosa de la ley de Gauss.

Se entiende por superficie cerrada aquella que divide el espacio en dos regiones diferentes, la interior y la exterior a dicha superficie. La figura 22.14 muestra una superficie de forma arbitraria que encierra un dipolo. El número de líneas de campo eléctrico que salen de la carga positiva y cruzan la superficie, saliendo del espacio limitado por ésta, depende de donde se dibuje la superficie, pero toda línea que cruza la superficie para salir la vuelve a cruzar para entrar. Para contar el número neto de líneas que salen de la superficie, cuéntese cualquier línea que la cruce desde el interior como +1 y cualquier penetración desde el exterior como −1. Así pues, para la superficie indicada (figura 22.14), el balance total de líneas que cruzan la superficie es cero. Para superficies que encierran otras distribuciones de carga, como ocurre en la figura 22.15, *el número neto de líneas que sale por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie. Este es un enunciado cualitativo de la ley de Gauss.*

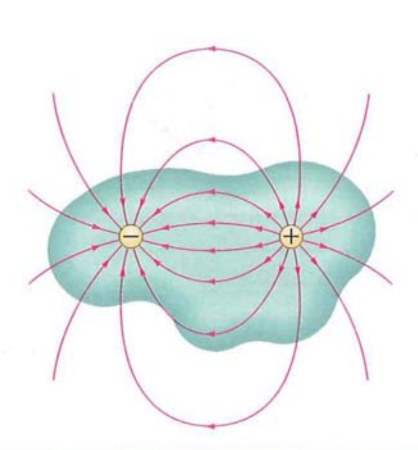


FIGURA 22.14 Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe donde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas del dipolo.

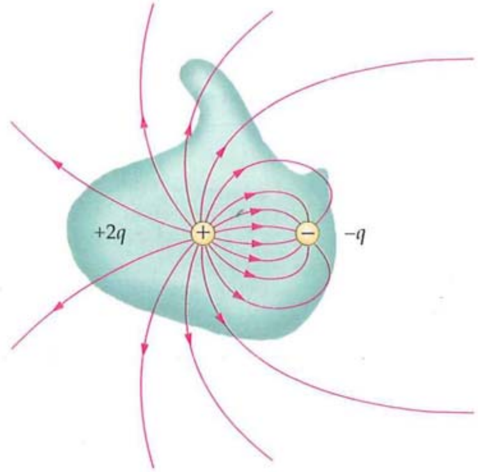


FIGURA 22.15 Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas $+2q$ y $-q$. Las líneas de campo que terminan en $-q$ o bien no pasan a través de la superficie o bien salen y vuelven a entrar. El número neto de líneas que salen y no vuelven a entrar, el mismo que correspondería a una sola carga $+q$, es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

FLUJO ELÉCTRICO

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas de campo que atraviesa una superficie se llama **flujo eléctrico,** ϕ. Para una superficie perpendicular a $\vec{E}$ (figura 22.16), se define como el producto del módulo del campo E y el área A:

$$\phi = EA$$

Las unidades del flujo son $N \cdot m^2/C$. Como el campo eléctrico es proporcional al número de líneas por unidad de área, el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo que atraviesan el área.

En la figura 22.17, la superficie de área A_2 no es perpendicular al campo eléctrico $\vec{E}$. Sin embargo, el número de líneas que atraviesan el área A_2 es el mismo que el que atraviesa el área A_1, que es perpendicular a $\vec{E}$. Las áreas están relacionadas por

$$A_2 \cos\theta = A_1 \qquad 22.11$$

donde θ es el ángulo existente entre $\vec{E}$ y el vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a la superficie A_2, según está indicado. El flujo a través de una superficie viene definido por

$$\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} A = EA \cos\theta = E_n A \qquad 22.12$$

donde $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ es la componente de $\vec{E}$ perpendicular, o normal, a la superficie.

La figura 22.18 muestra una superficie de forma arbitraria sobre la cual el campo $\vec{E}$ puede variar. Si el área ΔA_i del elemento de área que elegimos es suficientemente pequeño, podemos considerarlo como un plano y la variación del campo eléctrico a través del elemento puede despreciarse. Entonces, el flujo del campo eléctrico a través de este elemento es

$$\Delta\phi_i = E_{ni}\, \Delta A_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i$$

donde $\hat{n}_i$ es el vector unitario perpendicular al elemento de área y $\vec{E}_i$ el campo eléctrico en todo este elemento de área. Si la superficie es curva, los vectores unitarios de los distintos elementos tendrán direcciones diferentes. El flujo total a través de la superficie es la suma de $\Delta\phi_i$ extendida a todos los elementos. En el límite, cuando el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma se convierte en una integral. La definición general del flujo eléctrico es, por lo tanto,

$$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA \qquad 22.13$$

DEFINICIÓN: FLUJO ELÉCTRICO

donde el índice S nos recuerda que estamos integrando sobre una superficie.* El signo del flujo depende de la elección que hagamos de la dirección del vector unitario perpendicular al elemento de superficie $\hat{n}$. Eligiendo $\hat{n}$ dirigido hacia el exterior de la superficie, podemos determinar el signo de $\vec{E} \cdot \hat{n}$, así como el signo del flujo a través de la superficie.

En el caso del flujo del campo eléctrico a través de las superficies cerradas, existe el convenio de tomar siempre el vector unitario, $\hat{n}$, dirigido hacia el exterior de la superficie en cada punto de ésta. La integral extendida a toda la superficie se indica con el símbolo $\oint$. En consecuencia, el flujo neto total a través de la superficie cerrada S es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA \qquad 22.14$$

* El flujo eléctrico de un vector a través de una superficie es una operación matemática que se utiliza de forma similar para describir las velocidades de flujo de los fluidos y de la transferencia de calor. Además, se usa para relacionar el campo eléctrico con las cargas que lo producen.

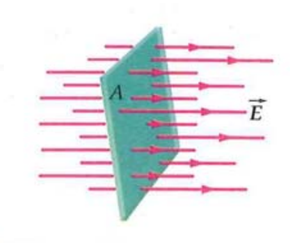


FIGURA 22.16 Líneas de campo correspondientes a un campo eléctrico uniforme E que atraviesa un área A perpendicular al campo. El producto EA es el flujo ϕ a través del área.

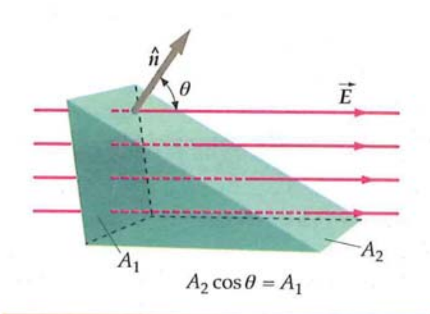


FIGURA 22.17 Líneas de campo correspondientes a un campo eléctrico uniforme perpendicular al área A_1, pero que forma un ángulo θ con el vector unitario $\hat{n}$ normal al área A_2. Cuando $\vec{E}$ no es perpendicular al área, el flujo a través del área es $E_n A$, siendo $E_n = E \cos\theta$ la componente de $\vec{E}$ perpendicular al área. El flujo que atraviesa A_2 es el mismo que el que pasa por A_1.

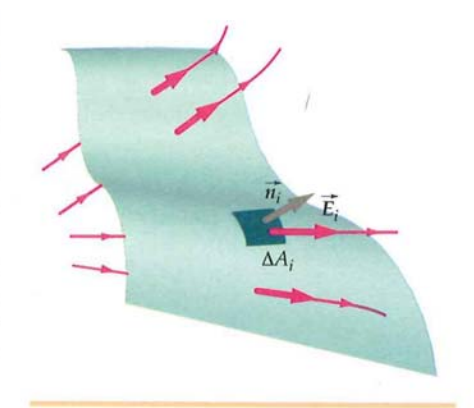


FIGURA 22.18 Cuando $\vec{E}$ varía en los distintos lugares de la superficie, ya sea porque E varía o porque lo hace el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}$, el área se divide en elementos de área pequeños ΔA_i. El flujo a través del área se calcula sumando $\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i$ para todos los elementos.

El flujo total o neto ϕ_{neto} a través de la superficie cerrada es positivo o negativo dependiendo de que $\vec{E}$ esté dirigido predominantemente hacia fuera o hacia dentro de la superficie. En los puntos de la superficie en que $\vec{E}$ está dirigido hacia dentro, E_n es negativo.

ENUNCIADO CUANTITATIVO DE LA LEY DE GAUSS

La figura 22.19 muestra una superficie esférica de radio R con su centro en la carga puntual Q. El campo eléctrico en un punto cualquiera de la superficie es perpendicular a la superficie y tiene el módulo

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

El flujo neto de $\vec{E}$ a través de esta superficie esférica es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\, dA = E_n \oint_S dA$$

donde E_n puede salir de la integral por ser constante en todos los puntos. La integral de dA extendida a toda la superficie es precisamente el área total, igual a $4\pi R^2$. Con este valor y sustituyendo kQ/R^2 por E_n, se obtiene

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ = Q/\epsilon_0 \qquad 22.15$$

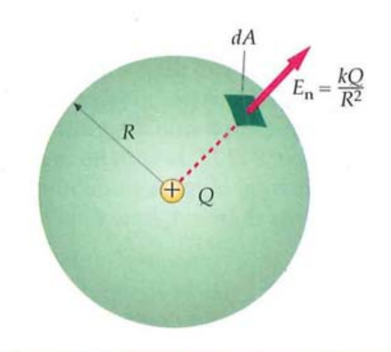


FIGURA 22.19 Una superficie esférica que incluye la carga puntual Q. El flujo se calcula fácilmente para una superficie esférica. Es igual al producto de E_n por el área superficial, es decir, $E_n\, 4\pi R^2$.

Así pues, el flujo neto a través de una superficie esférica con una carga puntual en el centro es independiente del radio de la esfera y es igual a $4\pi k$ veces el valor de dicha carga. Esto concuerda con nuestra observación previa según la cual el número neto de líneas que atraviesan una superficie es proporcional a la carga neta interior a la superficie. Este número de líneas es el mismo para cualquier superficie que encierre a la carga, cualquiera que sea su forma. Así, el flujo neto a través de cualquier superficie que rodea a una carga puntual Q es igual a $4\pi kQ$.

Podemos ampliar este resultado a sistemas de más de una carga puntual. En la figura 22.20, la superficie encierra dos cargas puntuales, q_1 y q_2, y existe una tercera carga puntual q_3 fuera de la superficie. Puesto que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie es el vector suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las tres cargas, el flujo neto a través de la superficie es, precisamente, la suma de los flujos debidos a las cargas individuales, $\phi_{\text{neto}} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot \hat{n}\, dA$. El flujo originado por la carga q_3, que está fuera de la superficie, es cero debido a que cada línea de fuerza procedente de q_3 que entra en la superficie en un punto abandona la misma en algún otro punto. El flujo a través de la superficie debido a la carga q_1 es $4\pi kq_1$ y el debido a la carga q_2 es $4\pi kq_2$. El flujo neto a través de la superficie es igual a $4\pi k(q_1 + q_2)$ que puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de los signos y valores de las dos cargas.

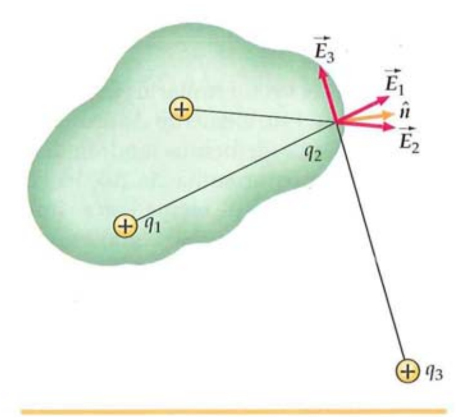


FIGURA 22.20 Superficie que incluye las cargas puntuales q_1 y q_2, pero no q_3. El flujo neto a través de esta superficie es $4\pi k(q_1 + q_2)$.

El flujo neto a través de cualquier superficie es igual a la carga neta dentro de la superficie dividida por ϵ_0:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} \qquad 22.16$$

LEY DE GAUSS

Esta es la llamada **ley de Gauss**. Nos indica que el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga. Esta propiedad del campo eléctrico es la que ha hecho posible dibujar un número fijo de líneas de fuerza desde una carga y conseguir que la densidad de líneas sea proporcional a la intensidad del campo.

La ley de Gauss es válida para todas las superficies y distribuciones de carga. Como veremos en la sección siguiente, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en algunas distribuciones especiales de carga con altos grados de simetría. En los campos eléctricos que resultan de distribuciones de carga estáticas, la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Sin embargo, la ley de Gauss es más general, pues también puede aplicarse a distribuciones de carga no estáticas.

Ejemplo 22.9 Flujo a través de una superficie cerrada

Un campo eléctrico vale $\vec{E} = +(200\ \mathrm{N/C})\hat{k}$ para $x > 0$ y $\vec{E} = -(200\ \mathrm{N/C})\hat{k}$ para $x < 0$. Un cilindro imaginario de longitud 20 cm y radio $R = 5$ cm tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x, de modo que un extremo se encuentra en $x = +10$ cm y el otro en $x = -10$ cm (figura 22.21). (*a*) ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico que atraviesa la superficie total cerrada del cilindro? (*b*) ¿Cuál es la carga neta localizada en el interior del cilindro?

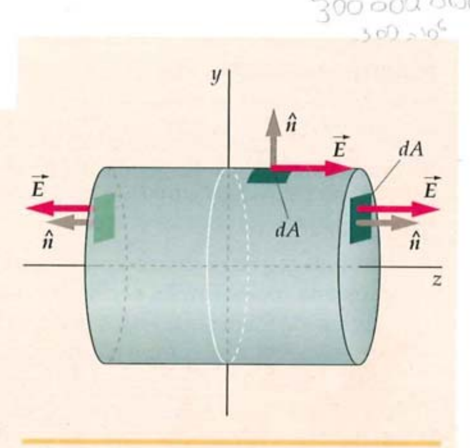


FIGURA 22.21

PLANTEAMIENTO La superficie cerrada que se describe se compone de tres piezas: dos bases y una superficie curvada. Calcular el flujo de $\vec{E}$ a través de cada pieza por separado. Para calcular el flujo a través de una pieza, dibujar el vector $\hat{n}$ normal hacia fuera en un punto de la pieza elegido al azar y añadir el vector $\vec{E}$ en dicho punto. Si $E_n = \vec{E}\cdot\hat{n}$ es el mismo en todos los puntos de una determinada pieza, de la superficie gausiana, entonces el flujo total a través de la mencionada pieza es E_nA, donde A es su área. El flujo neto a través de la superficie cerrada se obtiene sumando los flujos a través de las superficies individuales. El flujo neto a través de la superficie cerrada está relacionado con la carga neta interior por la ley de Gauss (ecuación 22.16).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar una superficie cerrada en forma cilíndrica. Añadir el vector normal $\hat{n}$ en cada una de las partes de la superficie del cilindro, bases y superficie lateral, y el vector $\vec{E}$ (figura 22.21):

2. Calcular el flujo que sale de la base derecha del cilindro, cuyo vector unitario es $\hat{n} = \hat{k}$:

$$\phi_{\mathrm{der}} = \vec{E}_{\mathrm{der}}\cdot\hat{n}_{\mathrm{der}}A = \vec{E}_{\mathrm{der}}\cdot\hat{k}\pi R^2 = +(200\ \mathrm{N/C})\hat{k}\cdot\hat{k}(\pi)(0{,}0500\ \mathrm{m})^2 = 1{,}57\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$$

3. Calcular el flujo que sale de la base izquierda del cilindro, cuyo vector unitario es $\hat{n} = -\hat{k}$:

$$\phi_{\mathrm{izq}} = \vec{E}_{\mathrm{izq}}\cdot\hat{n}_{\mathrm{izq}}A = \vec{E}_{\mathrm{izq}}\cdot(-\hat{k})\pi R^2 = -(200\ \mathrm{N/C})\hat{k}\cdot(-\hat{k})(\pi)(0{,}0500\ \mathrm{m})^2 = 1{,}57\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$$

4. Calcular el flujo hacia afuera (que sale) a través de la superficie curvada. En esta superficie $\hat{n}$ tiene dirección radial perpendicular al eje z:

$$\phi_{\mathrm{curva}} = \vec{E}_{\mathrm{curva}}\cdot\hat{n}_{\mathrm{curva}}A = 0$$

($\phi_{\mathrm{curva}} = 0$ ya que $\vec{E}\cdot\hat{n} = 0$ en todos los puntos de la superficie lateral.)

5. El flujo total es la suma de flujos a través de todas las superficies:

$$\phi_{\mathrm{neto}} = \phi_{\mathrm{der}} + \phi_{\mathrm{izq}} + \phi_{\mathrm{curva}} = 1{,}57\ \mathrm{N\cdot m^2/C} + 1{,}57\ \mathrm{N\cdot m^2/C} + 0 = \boxed{3{,}14\ \mathrm{N\cdot m^2/C}}$$

(*b*) La ley de Gauss relaciona la carga interior con el flujo neto:

$$Q_{\mathrm{interior}} = \epsilon_0\phi_{\mathrm{neto}} = (8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(3{,}14\ \mathrm{N\cdot m^2/C}) = \boxed{2{,}78\times10^{-11}\ \mathrm{C} = 27{,}8\ \mathrm{pC}}$$

COMPROBACIÓN El flujo a través de cada una de las superficies del cilindro no depende de su longitud. Este resultado es el que cabía esperar para un campo eléctrico que no varía con la distancia desde el plano $z = 0$.

OBSERVACIÓN El flujo neto no depende de la longitud del cilindro, lo cual significa que la carga se ubica totalmente en el plano $z = 0$.

22.3 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ CON LA LEY DE GAUSS UTILIZANDO LA SIMETRÍA

El campo eléctrico puede calcularse con la ley de Gauss mucho más fácilmente que con la ley de Coulomb en los casos en los que existen simetrías en la distribución de carga. Existen tres casos de simetría en los que esta afirmación es cierta. **Simetría cilíndrica (o lineal)**, si la densidad de carga depende sólo de la distancia a la línea; **simetría planar**, si la densidad de carga depende sólo de la distancia desde un plano (si la densidad de carga es constante en un plano o tiene simetría en dicho plano); y **simetría esférica**, si la densidad de carga sólo depende de la distancia a un punto.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de $\vec{E}$ utilizando la ley de Gauss

PLANTEAMIENTO Comprobar si la configuración de la distribución de carga tiene una de estas tres clases de simetrías. Si no es así, deberemos pensar en otro método de cálculo para el campo eléctrico. Si la respuesta es afirmativa, se hace un diagrama de la configuración de carga y, considerando sus propiedades de simetría, se establece el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

1. En el diagrama se dibuja una superficie imaginaria, denominada **superficie gausiana** (por ejemplo, el cilindro del ejemplo 22.9). Esta superficie ha de elegirse de forma que en los puntos de cada parte constituyente de la superficie total, el campo eléctrico sea cero, normal a la superficie o paralelo a ella. Para la configuración con simetría cilíndrica, la superficie gausiana es un cilindro coaxial con la línea de simetría; para la planar, la superficie gausiana es un cilindro en el que el plano de simetría corta por la mitad al cilindro y es perpendicular a su eje; y para la esférica (o simetría puntual), la superficie gausiana es una esfera centrada en el punto de simetría. En cada parte constitutiva de la superficie total, se establece y dibuja el campo eléctrico y el vector unitario perpendicular al elemento de área dA.
2. Las superficies cerradas cilíndricas tienen tres diferentes partes; las superficies esféricas, por el contrario, sólo constan de una única pieza. El flujo a través de cada parte de la superficie gausiana es igual a $E_n A$, donde E_n es la componente normal a su superficie y A es el área de dicha parte de la gausiana. Se suman todos los flujos parciales correspondientes a cada parte para obtener el flujo total que sale de la superficie cerrada.
3. Se calcula la carga total encerrada en el volumen que engloba la superficie gausiana.
4. Se aplica la ley de Gauss para obtener una relación entre el campo E_n y la carga encerrada en el interior, y así poder determinar E_n.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 23.1

El campo eléctrico $\vec{E}$ en la ley de Gauss, ¿es sólo el producido por las cargas localizadas en el interior de la superficie gausiana o es el debido a las cargas internas y externas a ésta?

Ejemplo 22.10 $\vec{E}$ debido a una lámina uniformemente cargada

Sea una lámina grande de plástico (que podemos considerar infinita) uniformemente cargada, de grosor $2a$, que ocupa la región del espacio entre los planos $z = -a$ y $z = +a$. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio debido a esta configuración. La carga por unidad de volumen es ρ.

PLANTEAMIENTO El sistema tiene simetría planar con $z = 0$ como plano de simetría. Utilizando los argumentos establecidos anteriormente, determinar la dirección y el sentido del campo eléctrico en cualquier punto del espacio y aplicar la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico.

SOLUCIÓN

1. Utilizar las consideraciones de simetría para determinar la dirección de $\vec{E}$. Como la lámina es infinita, no hay campo en la dirección paralela a la lámina:

Si $\rho > 0$, $\vec{E}$ apunta hacia afuera del plano $z = 0$ y si es $\rho < 0$, $\vec{E}$ se dirige hacia el plano $z = 0$. En el plano $z = 0$, el campo es nulo.

2. Hacer un esquema de la configuración de la carga, de tal forma que el plano de simetría (el plano $z = 0$) sea bisector de la superficie gausiana y perpendicular a su eje. La superficie gausiana es un cilindro que se extiende desde $-z$ hasta $+z$ (figura 22.22):

3. Escribir la ley de Gauss (ecuación 22.16):

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. El flujo saliente de la superficie es igual a la suma de los flujos en cada parte de la superficie gausiana. Dibujar $\hat{n}$ y $\vec{E}$ en un elemento de área en cada fragmento de la superficie cerrada (figura 22.22):

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{izq}} + \phi_{\text{der}} + \phi_{\text{curva}}$$

donde $\phi_{\text{izq}} = \int_{\text{izq}} \vec{E} \cdot \hat{n} dA$

$$\phi_{\text{der}} = \int_{\text{der}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$$

$$\phi_{\text{curva}} = \int_{\text{curva}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$$

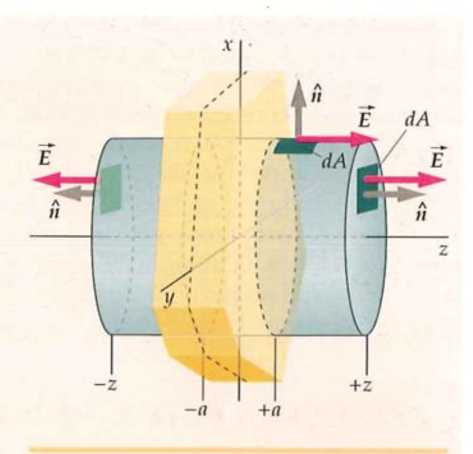


FIGURA 22.22 Superficie gausiana para el cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a un plano infinito de cargas. (Sólo se muestra la parte del plano que se encuentra dentro de la superficie gausiana.) En las caras superior e inferior de este cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y de valor constante. En la parte curvada de la superficie, $\vec{E}$ es paralelo a ella.

5. Como $\vec{E} \cdot \hat{n}$ es cero en la superficie curva del cilindro, el flujo a través de esta superficie es cero:

$$\phi_{\text{curva}} = 0$$

6. $\vec{E}$ es uniforme en la base derecha del cilindro, por lo que la integral es fácil de calcular como producto de $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_n$; siendo A el área de la base derecha:

$$\phi_{\text{der}} = \int_{\text{der}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \int_{\text{der}} E_n dA = E_n \int_{\text{der}} dA = E_n A$$

7. Las dos bases del cilindro están a la misma distancia del plano de simetría (el plano $z = 0$), de forma que $\vec{E}$ en la izquierda es igual y de sentido opuesto al de la derecha. Los vectores unitarios normales a la superficie de las bases son opuestos también. De esta forma, $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_n$ vale igual en ambas bases y, por consiguiente, el flujo a través de estas bases es idéntico:

$\vec{E} \cdot \hat{n} = E_n$ es el mismo en las dos bases,
$\therefore \phi_{\text{izq}} = \phi_{\text{der}} = E_n A$

8. Sumar los flujos individuales para obtener el flujo total:

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{izq}} + \phi_{\text{der}} + \phi_{\text{curva}} = E_n A + E_n A + 0 = 2E_n A$$

9. Determinar la carga en el interior de la superficie gausiana. El volumen de un cilindro es igual a la superficie de la sección transversal por la longitud del cilindro. El cilindro tiene una longitud de $2z$:

$$Q_{\text{interior}} = \rho A 2a \qquad (z \geq a)$$
$$Q_{\text{interior}} = \rho A 2z \qquad (z \leq a)$$

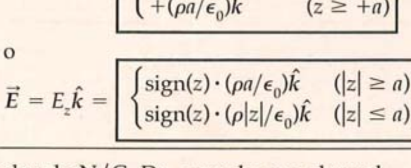
10. Sustituir los resultados del paso 8 y 9 en $\phi_{\text{neto}} = Q_{\text{interior}}/\epsilon_0$ (resultado del paso 3) y despejar E_n en la base de la derecha:

Para $|z| \geq a$, $2E_n A = \rho A 2a/\epsilon_0$, así $E_n = \rho a/\epsilon_0$.
Para $-a \leq z \leq a$, $2E_n A = \rho A 2|z|/\epsilon_0$, así $E_n = \rho|z|/\epsilon_0$.

11. Determinar $\vec{E}$ en función de z. En la región $z < 0$, $\hat{n} = -\hat{k}$, de tal forma que $E_z = E_n$; esto significa que $\vec{E}$ está en la dirección $-z$ y, por tanto, E_z es negativo:

$$\boxed{\vec{E} = E_z \hat{k} = \begin{cases} -(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (z \leq -a) \\ (\rho z/\epsilon_0)\hat{k} & (-a \leq z \leq a) \\ +(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (z \geq +a) \end{cases}}$$

o



$$\boxed{\vec{E} = E_z \hat{k} = \begin{cases} \text{sign}(z) \cdot (\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (|z| \geq a) \\ \text{sign}(z) \cdot (\rho|z|/\epsilon_0)\hat{k} & (|z| \leq a) \end{cases}}$$

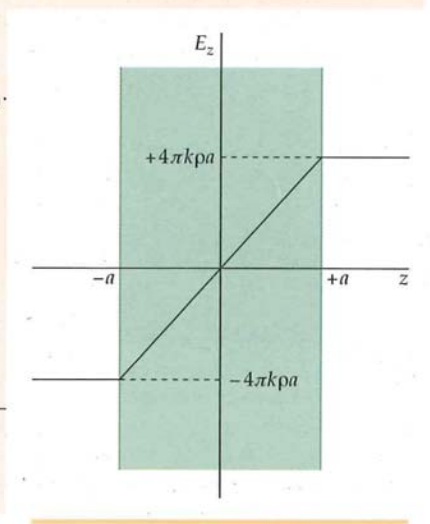


FIGURA 22.23 Una gráfica de E_z versus z para una lámina infinita de grosor $2a$ y cargada uniformemente con un densidad volúmica de carga ρ.

COMPROBACIÓN El campo eléctrico tiene unidades de N/C. De acuerdo con el resultado del paso 11, vemos que $\rho a/\epsilon_0$ deberá expresarse en las mismas unidades. Ello es así porque $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, ρ tiene unidades de C/m^3, y a unidades de m.

OBSERVACIÓN Fuera de la lámina, el campo eléctrico es el mismo que el de un plano uniformemente cargado (ecuación 22.10), con $\sigma = 2\rho a$. La figura 22.23 muestra una gráfica de E_z producido por la lámina versus z. Estas gráficas son fácilmente comparables teniendo presente que $2\pi k = 1/(2\epsilon_0)$.

Se puede utilizar la ley de Gauss para deducir la ley de Coulomb. Para ello, usamos la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual q. Se pone el origen en donde se halla la carga y como superficie gausiana elegiremos una superficie esférica de radio r centrada en la carga. Por simetría, $\vec{E}$ es radial y su módulo depende sólo de la distancia a la carga. Por consiguiente, la componente de $\vec{E}$ normal a la superficie es igual a la componente radial de $\vec{E}$ en cada punto de la superficie, es decir, $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n} = \vec{E} \cdot \hat{r} = E_r$, donde $\hat{n}$ es la normal hacia fuera, y tiene el mismo valor en todos los puntos de nuestra superficie esférica. El módulo del $\vec{E}$ en un punto dado puede depender de la distancia radial con origen en la carga, pero no de la dirección del vector que une la carga con el punto. El flujo neto a través de esta superficie viene dado por:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA = E_n \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

donde $\oint_S dA = 4\pi r^2$ es el área total de la superficie esférica. Puesto que la carga total en el interior de la superficie es precisamente la carga puntual q, la ley de Gauss nos da

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

o sea,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Así pues, hemos deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. Como también puede deducirse la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb (véase sección 22.6) queda claro que ambas leyes son equivalentes para cargas estáticas.

Ejemplo 22.11 $\vec{E}$ debido a una corteza esférica cargada de grosor reducido

Determinar el campo eléctrico debido a una corteza esférica de radio R y carga total Q.

PLANTEAMIENTO Esta configuración de carga depende solamente de la distancia desde el centro de la esfera y, por lo tanto, tiene simetría esférica (o puntual). Esta simetría implica que $\vec{E}$ deberá ser radial y tiene un módulo que depende sólo de la distancia al centro de la esfera. Se requiere considerar una superficie gausiana, con distribución de carga concéntrica, y radio arbitrario r.

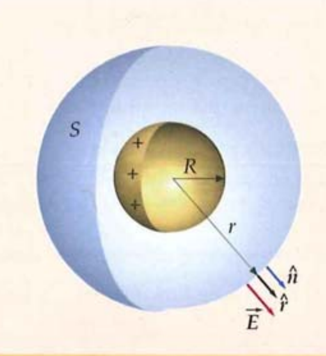


FIGURA 22.24 Superficie gausiana esférica de radio $r > R$ para el cálculo del campo eléctrico exterior a una corteza esférica uniformemente cargada de radio R.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la configuración de la carga y una superficie gausiana S de radio $r > R$. Incluir un elemento de área dA, la normal $\hat{n}$, y el campo eléctrico en el elemento de superficie (figura 22.24):

2. Expresar la ley de Gauss (ecuación 22.16):

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

3. El valor de E_n es idéntico en toda superficie S, por lo que la integral es fácil de resolver como producto de E_n por el área de la superficie gausiana:

$$E_n \oint_S dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. La integral del elemento de área extendido a toda la superficie es el área de la esfera, cuyo valor es $4\pi r^2$:

$$E_n 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

5. Debido a la simetría, $E_n = E_r$. Así, sustituyendo E_r por E_n, se obtiene el valor de E_r:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{\text{interior}}}{r^2}$$

6. Para $r > R$, $Q_{\text{interior}} = Q$. Para $r < R$, $Q_{\text{interior}} = 0$:

$$\vec{E} = E_r \hat{r}, \quad \text{donde} \quad \boxed{\begin{array}{ll} E_r = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R \\ E_r = 0 & r < R \end{array}}$$

COMPROBACIÓN En el exterior de la corteza cargada, el campo eléctrico es como el de una carga puntual colocada en su centro y cuyo valor fuera el de la carga total de la corteza. Este resultado es el esperado para $r >> R$.

OBSERVACIÓN El resultado del paso 6 se puede obtener por integración directa mediante la ley de Coulomb, pero el cálculo es mucho más complicado.

La figura 22.25 muestra E_r versus r para una distribución de carga extendida en una corteza esférica. Otra vez es preciso hacer notar que el campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde la densidad de carga superficial es $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Justo fuera de la corteza, el campo eléctrico es $E_r = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2) = \sigma/\epsilon_0$, ya que $\sigma = Q/4\pi R^2$. Como el campo dentro de la corteza es cero, el campo eléctrico es discontinuo en $r = R$ con un salto cuyo valor es σ/ϵ_0.

El campo eléctrico de una corteza esférica uniformemente cargada viene dado por $\vec{E} = E_r \hat{r}$, donde

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r > R \qquad 22.17a$$

$$E_r = 0 \qquad r < R \qquad 22.17b$$

(*a*)

E_r

$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

$E_r = 0$

O R r

R

(*b*)

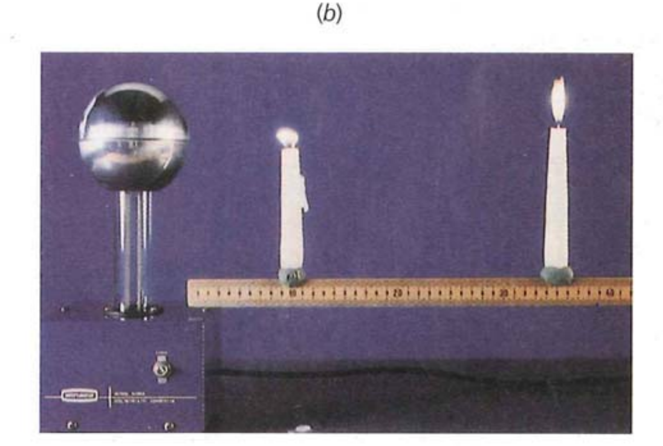


FIGURA 22.25 (*a*) Gráfica de E_r en función de r para una distribución de carga de una corteza esférica. El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde existe una carga superficial de densidad σ. (*b*) La disminución con la distancia del campo E_r, creado por una corteza esférica cargada, se pone en evidencia por el efecto del campo sobre las llamas de estas dos bujías. La corteza esférica del generador van de Graaff (aparato que será estudiado en el capítulo 23) ubicada a la izquierda de la foto, posee una gran carga negativa que atrae los iones positivos de la llama de la bujía más próxima. La llama de la derecha, más alejada, no está afectada por la presencia del campo. *(Runk/Schoenberger from Grant Heilmann.)*

Ejemplo 22.12 Campo eléctrico debido a una carga puntual y una corteza esférica

Una corteza esférica de radio $R = 3$ m tiene su centro en el origen y contiene una densidad de carga superficial $\sigma = 3$ nC/m². Una carga puntual $q = 250$ nC se encuentra sobre el eje y en $y = 2$ m. Determinar el campo eléctrico en el eje x en (*a*) $x = 2$ m y (*b*) $x = 4$ m.

PLANTEAMIENTO Determinaremos el campo debido a la carga puntual y el debido a la corteza esférica y sumaremos los vectores del campo. Para (*a*), el punto del campo queda dentro de la corteza, de modo que el campo se debe sólo a la carga puntual (figura 22.26*a*). Para (*b*), el punto del campo está fuera de la corteza; por lo tanto, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen. Después, determinaremos el campo debido a las dos cargas puntuales (figura 22.26*b*).

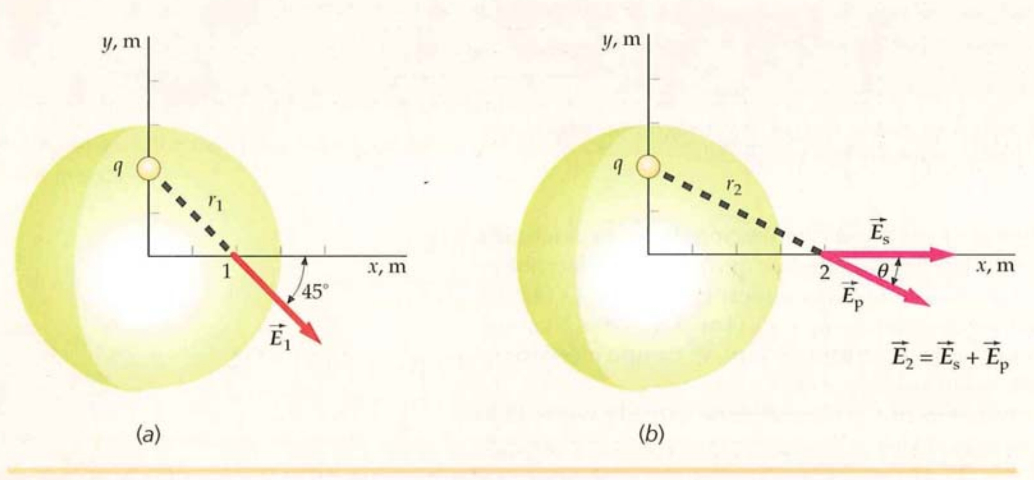


FIGURA 22.26

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dentro de la corteza, $\vec{E}_1$ es debido sólo a la carga puntual:

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{r_1^2}\hat{r}_1$$

2. Calcular el cuadrado de la distancia r_1:

$$r_1^2 = (2{,}00\text{ m})^2 + (2{,}00\text{ m})^2 = 8{,}00\text{ m}^2$$

3. Utilizar r_1 para calcular el módulo del campo:

$$E_1 = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9}\text{ C})}{8{,}00\text{ m}^2} = 281\text{ N/C}$$

4. En la figura 22.26*a*, puede verse que el campo forma un ángulo de $-45°$ con el eje x:

$$\theta_1 = 45{,}0°$$

5. Expresar $\vec{E}_1$ en función de sus componentes:

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\hat{i} + E_{1y}\hat{j} = E_1\cos 45{,}0°\,\hat{i} - E_1\,\text{sen}\,45{,}0°\,\hat{j}$$
$$= (281\text{ N/C})\cos 45{,}0°\,\hat{i} - (281\text{ N/C})\,\text{sen}\,45{,}0°\,\hat{j}$$
$$= \boxed{(199\hat{i} - 199\hat{j})\text{ N/C}}$$

(*b*) 1. Fuera de su perímetro, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen y el campo debido a la corteza $\vec{E}_S$ está dirigido a lo largo del eje x:

$$\vec{E}_S = \frac{kQ}{x_2^2}\hat{i}$$

2. Calcular la carga total Q sobre la corteza:

$$Q = \sigma 4\pi R^2 = (3{,}00\text{ nC/m}^2)4\pi(3{,}00\text{ m})^2 = 339\text{ nC}$$

3. Utilizar Q para calcular el campo debido a la corteza:

$$E_S = \frac{kQ}{x_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(339 \times 10^{-9}\text{C})}{(4{,}00\text{ m})^2} = 190\text{ N/C}$$

4. El campo debido a la carga puntual es:

$$\vec{E}_P = \frac{kq}{r_2^2}\hat{r}_2$$

5. Calcular el cuadrado de la distancia entre la carga puntual q que está sobre el eje y y el punto del campo en $x = 4$ m:

$$r_2^2 = (2{,}00 \text{ m})^2 + (4{,}00 \text{ m})^2 = 20{,}0 \text{ m}^2$$

6. Calcular el módulo del campo debido a la carga puntual:

$$E_P = \frac{kq}{r_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{20{,}0 \text{ m}^2} = 112 \text{ N/C}$$

7. Este campo forma un ángulo θ con el eje x:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{2{,}00 \text{ m}}{4{,}00 \text{ m}} = 0{,}500 \Rightarrow \theta = \text{arctg}\,0{,}500 = 26{,}6°$$

8. Las componentes x e y de este campo son, por lo tanto:

$$E_x = E_{Px} + E_{Sx} = E_P\cos\theta + E_S$$
$$= (112 \text{ N/C})\cos 26{,}6° + 190 \text{ N/C} = 290 \text{ N/C}$$
$$E_y = E_{Py} + E_{Sy} = -E_P\,\text{sen}\,\theta + 0$$
$$= -(112 \text{ N/C})\,\text{sen}\,26{,}6° = -50{,}0 \text{ N/C}$$
$$\vec{E}_2 = \boxed{(290\hat{i} - 50{,}0\hat{j}) \text{ N/C}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 8 de la parte (*b*) es cuantitativamente concordante con la figura 22.26*b*. Es decir, E_x es positivo, E_y es negativo y $|E_y| < E_x$.

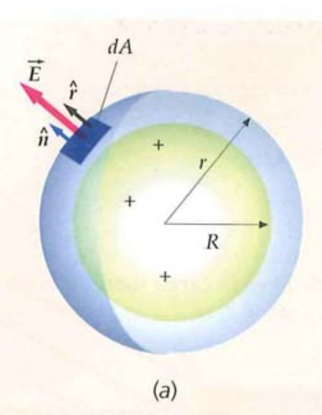
OBSERVACIÓN Conocidas las componentes x, y, z de un vector, queda determinado el vector. En estos casos, la componente z es cero.

CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DEBIDO A UNA ESFERA UNIFORMEMENTE CARGADA

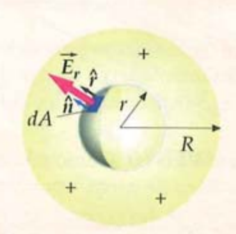
Ejemplo 22.13 Campo eléctrico debido a una esfera sólida cargada

Determinar el campo eléctrico (*a*) fuera y (*b*) dentro de una esfera sólida uniformemente cargada de radio R portadora de una carga Q que está distribuida por todo el volumen de la esfera con densidad de carga $\rho = Q/V$, siendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera.

PLANTEAMIENTO Por simetría, el campo eléctrico debe ser radial. Para determinar E_r fuera de la esfera cargada, debemos elegir una superficie esférica gausiana de radio $r > R$ (figura 22.27*a*). Para determinar E_r dentro de la esfera, elegimos una superficie gausiana esférica de radio $r < R$ (figura 22.27*b*). En cada una de estas superficies, E_r es constante. La ley de Gauss relaciona entonces E_r con la carga total que hay dentro de la superficie.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 22.27

SOLUCIÓN

1. Dibujar una esfera cargada de radio R y una superficie gausiana esférica de radio $r > R$:

2. Relacionar el flujo que atraviesa la superficie gausiana con el campo eléctrico E_r que existe en ella. Para cada punto de dicha superficie $\hat{n} = \hat{r}$ y E_r tiene el mismo valor:

$$\phi_{\text{neto}} = \vec{E}\cdot\hat{n}A = \vec{E}\cdot\hat{r}A = E_r 4\pi r^2$$

(El área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.)

3. Aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total Q que hay en el interior de la superficie, Q:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. Determinar Q_{interior} para valores de r. La densidad de carga es $\rho = Q/V$, donde $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

Para $r \geq R$, $Q_{\text{interior}} = Q$

Para $r \leq R$, $Q_{\text{interior}} = \rho V'$,

donde $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$

así

$$Q_{\text{interior}} = \frac{Q}{V}V' = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

5. Sustituir en el resultado del paso 3 y despejar $\vec{E}$:

$\vec{E} = E_r\hat{r}$, donde

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \qquad r \leq R$$

COMPROBACIÓN En el centro de la esfera cargada, el campo eléctrico es cero, tal como puede deducirse por la simetría del sistema. Para $r >> R$, el campo es idéntico al que crea una carga puntual Q en el centro de la esfera, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN La figura 22.28 muestra E_r en función de r para la distribución de carga de este ejemplo. En el interior de la esfera, E_r aumenta con r. Obsérvese que E_r es continuo en $r = R$. A veces se utiliza una esfera uniformemente cargada para describir el campo eléctrico de un núcleo atómico.

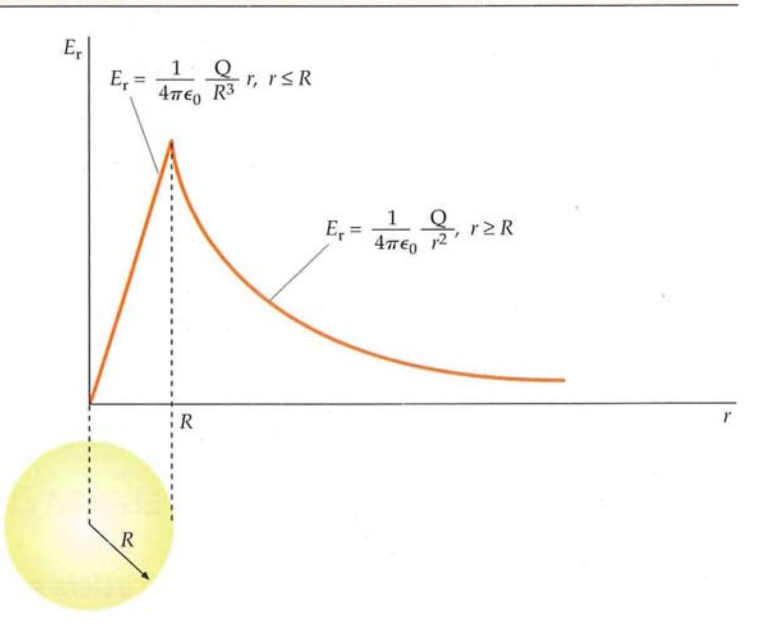


FIGURA 22.28

El ejemplo 22.13 nos indica que el campo eléctrico a una distancia r del centro de una esfera uniformemente cargada de radio R viene dado por

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R \tag{22.18a}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \qquad r \leq R \tag{22.18b}$$

donde Q es la carga total de la esfera.

Ejemplo 22.14 Campo eléctrico debido a una carga lineal infinita

Utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia r de una carga lineal infinitamente larga de densidad de carga uniforme λ. (Este problema se solucionó en el ejemplo 22.3 utilizando la ley de Coulomb.)

PLANTEAMIENTO Como consecuencia de la simetría del sistema, el campo es perpendicular a la línea de carga, apuntando hacia fuera de ésta si la distribución lineal λ es positiva y con la misma dirección y sentido opuesto si λ es negativa. Además, el módulo del campo depende exclusivamente de la distancia radial del punto de observación a la línea cargada. Por lo tanto, la superficie gausiana que elegimos es la de un cilindro de longitud L cuyo eje sea la línea. Calcularemos el flujo del campo $\vec{E}$ que sale a través de cada una de las tres partes que componen la superficie, y utilizando la ley de Gauss relacionaremos el flujo total con la distribución de carga λ.

SOLUCIÓN

1. Dibujamos la línea cargada y la superficie cilíndrica de radio R y longitud L (figura 22.29). Esta superficie se compone de dos bases y la superficie lateral. Elegimos un punto cualquiera de cada una de estas partes y dibujamos los correspondientes vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$ en estos puntos. Como consecuencia de la simetría del sistema, el campo es perpendicular a la línea cargada, apuntando hacia fuera si la distribución lineal λ es positiva y con la misma dirección y sentido opuesto si es negativa. Además, el módulo del campo depende solamente de la distancia radial entre el punto de observación del campo y la línea cargada:

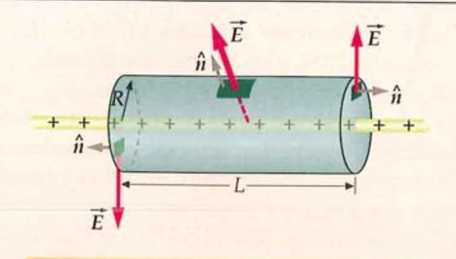


FIGURA 22.29

2. Calculamos el flujo que sale por la superficie lateral. En cada punto de ésta $\hat{R} = \hat{n}$, siendo $\hat{R}$ el vector unitario en la dirección radial del sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\phi_{\text{lateral}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{curva}} = \vec{E} \cdot \hat{R} A_{\text{curva}} = E_R 2\pi RL$$

3. Calculamos el flujo que sale por las bases. En éstas el vector unitario tiene la dirección de la línea de carga y, además, los vectores $\hat{n}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares:

$$\phi_{\text{izquierda}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{izquierda}} = 0$$
$$\phi_{\text{derecha}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{derecha}} = 0$$

4. Aplicamos la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total encerrada en la superficie gausiana, Q_{interior}. El flujo neto que sale de la superficie es la suma de los flujos calculados en 2 y 3, y la Q_{interior} es la carga contenida en el segmento de longitud L de la línea de carga, encerrado en el cilindro:

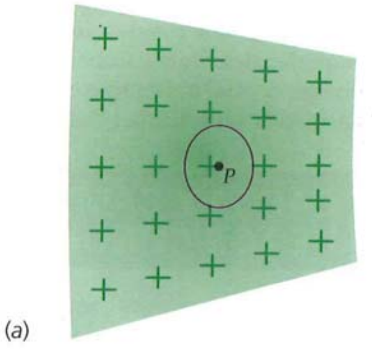
$$\phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

$$E_R 2\pi RL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}, \text{ entonces } \vec{E} = E_R \hat{R}, \text{ donde } E_R = \boxed{\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}}$$

COMPROBACIÓN Como $1/(2\pi\epsilon_0) = 2k$, el resultado del paso 4 puede escribirse también como $2k\lambda/R$. Esta es la misma expresión para E_R que puede obtenerse por la ley de Coulomb (véase el ejemplo22.3).

En el cálculo anterior fue necesario suponer que el punto del campo estaba muy alejado de los extremos de la carga lineal, de tal modo que E_n fuese constante en todos los puntos de la superficie gausiana cilíndrica. (Esto equivale a suponer que a la distancia R de la línea de carga, ésta parece ser infinitamente larga.) En las proximidades del extremo de una carga lineal de longitud finita no podemos suponer que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie cilíndrica o que E_n es constante en todos los puntos de la misma y, por lo tanto, no puede utilizarse la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico.

Es importante destacar que aunque para usar la ley de Gauss en el cálculo de campos eléctricos es necesaria la existencia de un alto grado de simetría, esta ley es válida para cualquier superficie que rodee cualquier distribución de cargas. La ley de Gauss también es útil en los cálculos relacionados con conductores en equilibrio estático, como veremos en la sección 22.5.



22.4 DISCONTINUIDAD DE E_n

Ya hemos visto que el campo eléctrico correspondiente a un plano infinito y a una corteza esférica de carga es discontinuo en la cantidad σ/ϵ_0 en un punto donde existe una densidad de carga superficial σ. Como veremos, éste es un resultado general para la componente del campo eléctrico perpendicular a una superficie con una densidad de carga σ.

La figura 22.30 muestra una superficie arbitraria con densidad de carga superficial σ. Calificamos de arbitraria una superficie cuando aun teniendo curvaturas, estas no presentan variaciones bruscas (es decir, pliegues), pudiendo variar σ como una función continua. Consideramos el campo eléctrico $\vec{E}$ en la vecindad de un punto P de la superficie como superposición del campo debido a la carga contenida en un pequeño disco de la superficie centrado en P, $\vec{E}_{\text{disco}}$, y el campo debido a las demás cargas contenidas en todo el espacio, $\vec{E}'$. Entonces, tenemos

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{disco}} + \vec{E}' \qquad 22.19$$

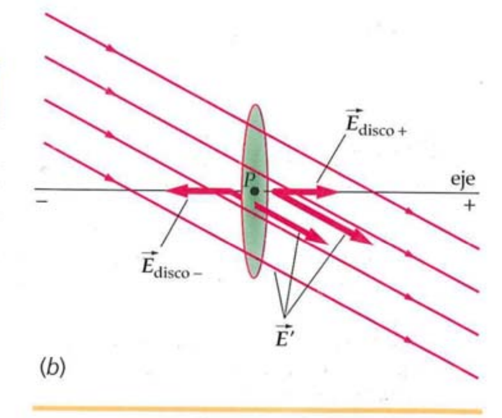


FIGURA 22.30 (*a*) Superficie con densidad de carga superficial. (*b*) Campo eléctrico $\vec{E}_{\text{disco}}$ debido a la carga contenida en un pequeño disco, más el campo eléctrico $\vec{E}'$ debido a las demás cargas.

El disco debe ser suficientemente pequeño como para que podamos considerarlo plano y uniformemente cargado. En el eje del disco, el campo $\vec{E}_{\rm disco}$ viene dado por la ecuación 22.9, y en los puntos de dicho eje que estén muy cercanos al disco, el módulo del campo viene dado por $E_{\rm disco} = |\sigma|/(2\epsilon_0)$, y su dirección es hacia fuera si σ es positiva y hacia dentro si σ es negativa. El módulo, dirección y sentido del campo $\vec{E}_{\rm disco}$ son desconocidos; sin embargo, este campo es continuo en la vecindad del punto P. Por lo tanto, en los puntos del eje del disco o muy próximos a él, $\vec{E}'$ es esencialmente uniforme.

El eje del disco es normal a la superficie y, como consecuencia, las componentes de un vector con respecto a este eje son componentes normales a la superficie. Las componentes normales de los vectores de la ecuación 22.19 cumplen que $E_n = E_{{\rm disco}\,n} + E'_n$. Toda superficie del espacio tiene dos caras, cuyos vectores unitarios son tales que $n+ = -n-$. Denominamos lado + de la superficie aquél en el que $E_{n+} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} + E'_{n+}$ y lado − aquél en el que $E_{n-} = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} + E'_{n+}$. Por lo tanto, la componente normal del campo total es discontinua en la superficie.

$$\Delta E_n = E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad 22.20$$

DISCONTINUIDAD DE E_n EN UNA CARGA SUPERFICIAL

donde hemos considerado que $E'_{n+} = E'_{n-}$ en los puntos muy próximos al disco, dado que $\vec{E}'$ es continuo y uniforme en el mismo

Es preciso hacer notar que la discontinuidad de E_n ocurre tanto en un disco finito cargado como en un plano infinito (véase la figura 22.12) o una corteza esférica con una distribución de carga superficial (véase la figura 22.28). Por el contrario, no aparece esta discontinuidad en la superficie de una distribución de carga volúmica. El campo eléctrico es discontinuo en cualquier lugar donde haya una densidad de carga volúmica infinita. Esto incluye regiones del espacio con cargas puntuales finitas, con densidades de carga lineales finitas y con densidades de carga superficiales finitas. Considerando la ecuación 22.20, podemos decir que la componente normal del campo es discontinua en todos los sistemas electrostáticos con densidades superficiales finitas.

22.5 CARGA Y CAMPO EN LA SUPERFICIE DE LOS CONDUCTORES

Todo conductor posee cargas con libertad de movimiento en el volumen que limita su superficie. Si hubiera un campo eléctrico que actuase en el interior del conductor, se produciría una fuerza que daría lugar a una corriente eléctrica momentánea (las corrientes eléctricas se abordarán en el capítulo 25). Sin embargo, a menos que exista una fuente de energía que mantenga esta corriente, la carga libre del conductor se redistribuye de tal modo que se crea un campo eléctrico que anula cualquier campo externo dentro del conductor. Se dice entonces que el conductor se encuentra en **equilibrio electrostático**. Así, en el equilibrio, el campo eléctrico dentro de un conductor debe ser cero. El tiempo necesario para alcanzar el equilibrio depende del conductor. Para el cobre y otros buenos conductores, el tiempo es tan pequeño que, en la mayor parte de los casos, el equilibrio electrostático se alcanza al cabo de pocos nanosegundos.*

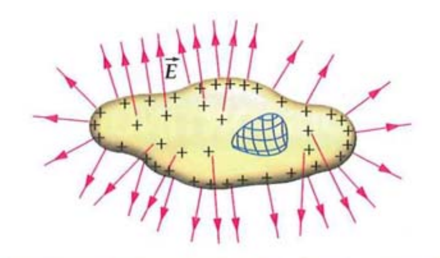
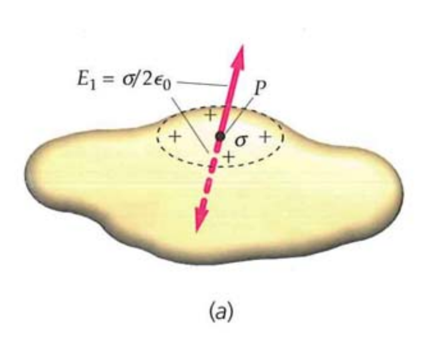
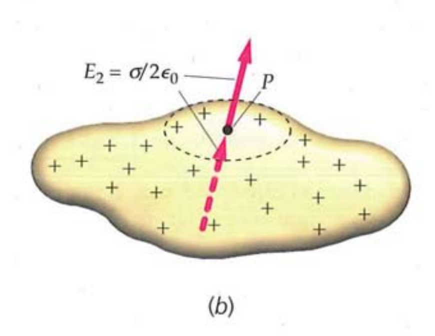


FIGURA 22.31 Superficie gausiana justo en el interior de la superficie de un conductor. Como el campo eléctrico es cero dentro de un conductor en equilibrio electrostático, el flujo neto a través de esta superficie debe ser también cero. Por lo tanto, la densidad de carga neta ρ en el interior de un conductor debe ser cero.

Podemos utilizar la ley de Gauss para demostrar que toda carga eléctrica neta de un conductor reside en su superficie. Consideremos una superficie gausiana situada justo en el interior de la superficie real de un conductor en equilibrio electrostático, como indica la figura 22.31. El tamaño y la forma de la superficie gausiana no importa, siempre que ésta se encuentre dentro del conductor en su totalidad. Como el campo eléctrico es cero en todos los puntos de dentro del conductor, será también cero en todos los puntos de la superficie gausiana, ya que toda ella está completamente

* A muy bajas temperaturas, algunos metales se convierten en superconductores. En un superconductor, una corriente se puede mantener durante mucho tiempo, incluso sin que se le suministre energía. Los metales superconductores se analizan en los capítulos 27 y 28.





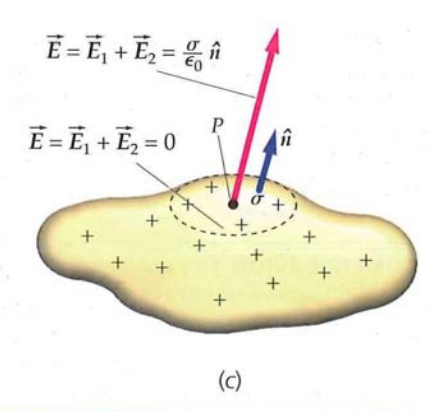


FIGURA 22.32 Conductor de forma arbitraria que posee una carga en su superficie. (*a*) La carga que hay en la vecindad del punto *P* se asemeja a un disco circular uniformemente cargado centrado en *P*. Esta carga produce un campo eléctrico de valor $\sigma/(2\epsilon_0)$ tanto en el interior como en el exterior del conductor, según está indicado. Dentro del conductor, este campo apunta hacia abajo desde el punto *P*. (*b*) Puesto que el campo resultante en el interior del conductor debe ser cero, el resto de la carga debe producir un campo de igual valor $\sigma/(2\epsilon_0)$ en dirección hacia arriba. El campo debido a esta carga es el mismo justamente dentro de la superficie que justamente fuera. (*c*) Dentro del conductor, estos campos se anulan como se indica en (*a*) y (*b*), pero fuera, en el punto *P*, se suman, resultando $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

dentro del conductor. Así pues, no hay carga neta dentro de cualquier superficie incluida completamente dentro del conductor. Si existe alguna carga neta en el conductor, ésta debe residir sobre la superficie del propio conductor. En la superficie de un conductor en equilibrio, el campo eléctrico $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie. Si existiera una componente tangencial de $\vec{E}$, la carga libre del conductor sería acelerada tangencialmente a la superficie hasta que se anulara dicha componente.

Como E_n es discontinuo en cualquier superficie en la cantidad σ/ϵ_0, y $\vec{E}$ es cero dentro del conductor, el campo en los puntos del exterior que son fronterizos con el conductor vendrá dado por

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad 22.21$$

E_n JUSTAMENTE FUERA DE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR

Este resultado es exactamente el doble del campo producido por un disco uniformemente cargado. Podemos comprender este resultado mediante la figura 22.32. La carga sobre el conductor está compuesta por dos partes: (1) la carga en la vecindad inmediata del punto *P* y (2) el resto de la carga. La carga próxima al punto *P* puede considerarse como un pequeño disco circular uniformemente cargado centrado en *P* que produce un campo de módulo $\sigma/(2\epsilon_0)$ justo en el interior y en el exterior del conductor. El resto de la carga produce un campo de módulo $\sigma/(2\epsilon_0)$ que neutraliza el campo interior del conductor. Este campo debido al resto de la carga se suma al campo debido al disco cargado justamente fuera del conductor dando lugar a un campo total σ/ϵ_0.

Ejemplo 22.15 La carga del planeta Tierra — *Póngalo en su contexto*

Consultando algún tratado acerca de la atmósfera, podemos averiguar que el valor medio del campo eléctrico de nuestro planeta es de, aproximadamente, de 100 N/C y está dirigido verticalmente hacia abajo. Con lo estudiado acerca del campo eléctrico, una pregunta que podemos hacernos es si se puede determinar cuál es la carga total en la superficie de la Tierra.

PLANTEAMIENTO La Tierra es un conductor, por lo que su carga neta estará distribuida en la superficie terrestre. La densidad de carga superficial se relaciona con la componente normal del campo, E_n, mediante la ecuación 22.21. La carga total *Q* que estamos buscando será σA, siendo *A* la superficie de la Tierra.

SOLUCIÓN

1. La componente normal del campo y la densidad de carga superficial se relacionan mediante la ecuación 22.21: $$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
2. En la superficie de la Tierra, $\hat{n}$ está dirigido hacia arriba y el campo hacia abajo; en consecuencia, E_n es negativo: $$E_n = \vec{E}\cdot\hat{n} = E\cos 180° = -E = -100\text{ N/C}$$
3. Consideramos los dos pasos previos y que *Q* es densidad de carga multiplicado por el área de la superficie terrestre: $$Q = \sigma A = \epsilon_0 E_n A = -\epsilon_0 EA$$

4. Consideramos que la superficie de la Tierra es esférica, de radio r, y así tenemos que $A = 4\pi r^2$:

$$Q = -\epsilon_0 EA = -\epsilon_0 E 4\pi R_E^2 = -4\pi\epsilon_0 E R_E^2$$

5. El radio de la Tierra es $6{,}38 \times 10^6$ m:

$$Q = -4\pi\epsilon_0 E R_E^2$$
$$= -4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(100\ \mathrm{N/C})(6{,}37 \times 10^6\ \mathrm{m})^2$$
$$= \boxed{-4{,}51 \times 10^5\ \mathrm{C}}$$

COMPROBACIÓN Hay que comprobar si las unidades en el cálculo del paso 5 son correctas. Multiplicando las tres cantidades, los newtons y los metros se cancelan, dejando sólo los coulombs, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN ¿Una carga de $-4{,}51 \times 10^5$ C es una cantidad grande de carga? En el ejemplo 21.1, calculamos la carga total de los electrones de una moneda de cobre ($-1{,}37 \times 10^5$ C), así que la carga total de la Tierra es sólo 3,3 veces mayor que la carga de todos los electrones de una moneda de cobre.



Líneas de fuerza en el caso de un cilindro y una placa con cargas opuestas. Las líneas están indicadas por trocitos de hilo fino suspendidos en aceite. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares a los conductores y que no hay ninguna línea en el interior del cilindro. *(Harold M. Waage.)*

La figura 22.33 muestra una carga puntual positiva q en el centro de una cavidad de un conductor esférico. Como la carga neta debe ser nula dentro de cualquier superficie trazada dentro del conductor, debe existir una carga negativa $-q$ inducida en la superficie interior. En la figura 22.34, la carga puntual se ha desplazado de modo que ya no se encuentra en el centro de la cavidad. Las líneas de campo de la cavidad se han alterado y la densidad de carga superficial de la carga negativa inducida en la superficie interna deja de ser uniforme. Sin embargo, la densidad de carga superficial positiva de la superficie exterior no se perturba, ya que se encuentra protegida de la cavidad mediante el conductor. El campo eléctrico generado por la carga puntual q junto con el producido por la carga superficial $-q$ ubicada en la superficie interior de la cavidad dan como resultado un campo total nulo fuera de ésta. Este resultado es cierto independientemente de dónde esté situada la carga puntual q dentro de la cavidad (si la carga puntual está en el centro de la cavidad, el campo eléctrico es, obviamente, nulo por razones de simetría). Además, la carga superficial inducida en la superficie externa del conductor produce un campo eléctrico nulo en cualquier punto del interior de la superficie externa del conductor, siendo esto cierto independientemente de que las superficies externa e interna del conductor sean no esféricas.

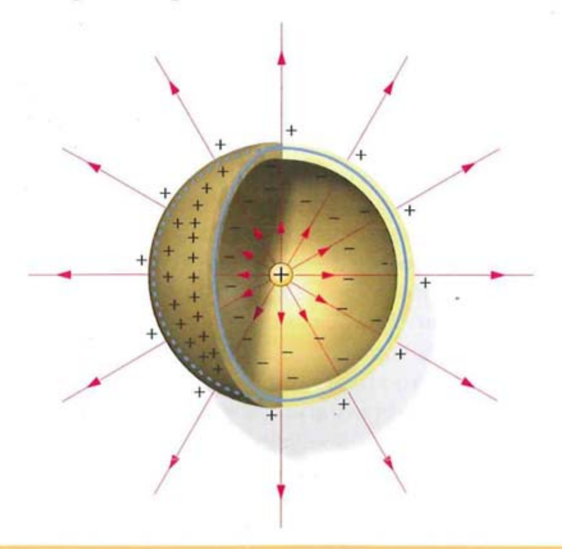


FIGURA 22.33 Una carga puntual q se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica de paredes gruesas. Como la carga neta encerrada dentro de la superficie gausiana (indicada en azul) debe ser nula, existirá una carga superficial $-q$ inducida en la superficie interna de la corteza, y, como el conductor es neutro, una carga igual, pero de signo opuesto, $+q$, se induce en la superficie exterior de la corteza. Las líneas del campo eléctrico comienzan en la carga puntual, terminan en la superficie interna y comienzan de nuevo en la superficie exterior.

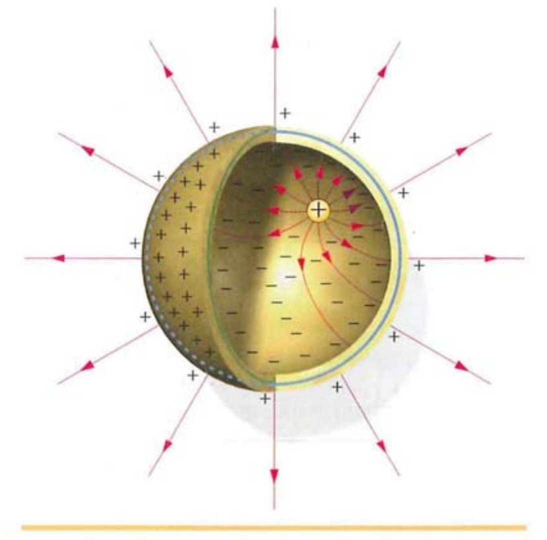


FIGURA 22.34 El mismo conductor de la figura 22.33, pero ahora la carga puntual no se encuentra en el centro de la esfera. La carga de la superficie exterior y las líneas del campo eléctrico del exterior de la esfera no quedan afectadas por el cambio de posición de la carga puntual.

* 22.6 EQUIVALENCIA DE LA LEY DE GAUSS Y LA LEY DE COULOMB EN ELECTROSTÁTICA

La ley de Gauss puede deducirse matemáticamente utilizando el concepto de ángulo sólido. Consideremos un elemento de área ΔA sobre una superficie esférica. El **ángulo sólido** $\Delta\Omega$ subtendido por ΔA en el centro de la esfera se define como

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

siendo r el radio de la esfera. Puesto que tanto ΔA como r^2 tienen dimensiones de longitud al cuadrado, el ángulo sólido es adimensional. La unidad de ángulo sólido es el **estereorradián** (sr). Puesto que el área total de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido total subtendido por una esfera es

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ estereorradianes}$$

Existe una estrecha analogía entre el ángulo sólido y el ángulo plano ordinario $\Delta\theta$, que se define como el cociente entre un elemento de longitud de arco de circunferencia Δs y su radio r:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \text{ radianes}$$

El ángulo plano total subtendido por un círculo es 2π radianes.

En la figura 22.35, el elemento de área ΔA no es perpendicular a las líneas radiales que salen de O. El vector unitario $\hat{n}$ normal al elemento de área forma un ángulo θ con el vector radial unitario $\hat{r}$. En este caso, el ángulo sólido subtendido por ΔA en el punto O está definido por

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A\, \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2} \qquad 22.22$$

FIGURA 22.35 Elemento de área ΔA cuya normal no es paralela a la línea radial que va desde O hasta el centro del elemento. El ángulo sólido subtendido por este elemento en O es $(\Delta A \cos\theta)/r^2$.

El ángulo sólido $\Delta\Omega$ es el mismo que el subtendido por el elemento de área correspondiente a una superficie esférica de cualquier radio.

La figura 22.36 muestra una carga puntual q rodeada de una superficie de forma arbitraria. Para calcular el flujo que atraviesa esta superficie, debemos hallar $\vec{E} \cdot \hat{n}\Delta A$ para cada elemento de área de la superficie y sumar respecto a la superficie completa. El campo eléctrico en el elemento de área indicado es:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

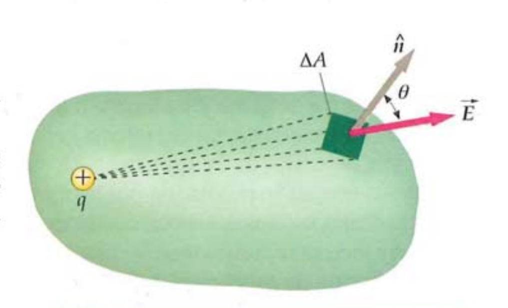


FIGURA 22.36 Carga puntual q encerrada dentro de una superficie arbitraria S. El flujo que atraviesa el elemento de área ΔA es proporcional al ángulo sólido subtendido por el elemento de área trazado desde la carga. El flujo neto que atraviesa la superficie, que se halla sumando todos los elementos de área, es proporcional al ángulo sólido total 4π trazado desde la carga, que es independiente de la forma de la superficie.

De esta forma, el flujo a través del elemento de superficie es

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \hat{n}\Delta A = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot \hat{n}\Delta A = kq\, \Delta\Omega$$

La suma del flujo que atraviesa la superficie entera es kq veces el ángulo sólido total subtendido por la superficie cerrada, que es 4π estereorradianes:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = kq \oint d\Omega = kq4\pi = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad 22.23$$

que es la ley de Gauss.

Temas de actualidad en Física

Distribución de carga—caliente y frío

El momento dipolar eléctrico, o *polaridad*, afecta a la solubilidad de las sustancias. El agua, al tener un momento dipolar fuerte, es un buen disolvente de otras moléculas con momentos dipolares fuertes o débiles y de sustancias iónicas. Por otro lado, el agua es un mal disolvente de sustancias cuyas moléculas no tienen momento dipolar o de macromoléculas que tienen partes sin momento dipolar. Por ejemplo, algunos aceites que no tienen momento dipolar son inmiscibles en agua.

La distribución de carga de algunas moléculas puede explicar el hecho de que algunas sustancias que no son estrictamente clasificadas como aceites no puedan disolverse en agua. ¿Quién no ha tenido la experiencia de morder una especia picante y no poder aliviar la sensación de picor bebiendo agua? La capsaicina, que es el compuesto químico activo de la pimienta y que está presente en los pimientos habaneros, serranos y piquillos, no se disuelve bien en agua fría a causa de su distribución de carga.[1] Sin embargo, la solubilidad de la capsaicina en agua crece con la adición de alcohol etílico; por ello, algunas personas se enfrían la boca con cerveza después de que han tomado especias picantes. Las moléculas de alcohol tienen un momento dipolar débil y se mezclan bien tanto con el agua como con la capsaicina. La capsaicina puede mezclarse también con aceites, algunas féculas y proteínas. En muchas culturas, se utiliza el arroz y la carne, en lugar del alcohol, para disolver la capsaicina.



Las moléculas del ingrediente activo de estas especias picantes no se disuelven en agua porque no tienen momentos dipolares eléctricos. *(Stockbyte Platinum/Getty Images.)*

La sensación desagradable que algunas personas perciben al comer pimienta se debe a la distribución de carga de las moléculas. La proteína TRPV1 es un receptor neuronal (neuroreceptor) presente en humanos que nos indica la temperatura de las sustancias calientes. La distribución de carga de esta proteína cambia a temperaturas superiores a los 43° C. Entonces, la forma de esta proteína es distinta (doblada y desplegada) según cambia la distribución de carga de su molécula.[2] La función de muchas proteínas viene determinada por el hecho de doblarse o desplegarse cuando se modifica su distribución de carga.[3] Un cambio en la distribución de carga en la TRPV1 arruga la molécula de proteína y transmite a las neuronas la información del cambio de temperatura así detectado. La capsaicina genera los mismos cambios que el calor en la distribución de carga de la proteína TRPV1,[4] siendo ésta la razón por la que la gente percibe la sensación producida por la pimienta como si fuera de calor. El jengibre es una especia "caliente" (picante) que contiene gingeroles que producen sensaciones en los receptores mediante cambios en la distribución de carga. [5] El mentol produce cambios en la distribución de carga de algunas proteínas que son neuroreceptores en humanos, generando señales de frío en el medio donde se desarrollan.[6] Por esta razón, la gente percibe frescor con el mentol.

Los cambios en la distribución de carga de las proteínas pueden cambiar su propia textura. El caviar salado, por ejemplo, cambia la distribución de carga de las proteínas dentro de los huevos de pescado. Cuando la proteína se desdobla, el fluido del interior del huevo se espesa y adquiere una textura cremosa.[7]

1 Turgut, C., Newby, B., and Cutright, T., "Determination of Optimal Water Solubility of Capsaicin for Its Usage as a Non-Toxic Antifoulant." *Environmental Science Pollution Research International*, Jan.-Feb. 2004, Vol. 11, No. 1, pp. 7–10.
2 Suydam, I. T., et al., "Electric Fields at the Active Site of an Enzyme: Direct Comparison of Experiment with Theory." *Science*, Jul. 14, 2006, Vol. 313, No. 5784, pp. 200–204.
3 Honig, B., and Nicholls, A., "Classical Electrostatics in Biology and Chemisty." *Science*, May 26, 1995, Vol. 268, p. 1144.
4 Montell, C., "Thermosensation: Hot Findings Make TRPNs Very Cool." *Current Biology*, Jun. 17, 2003, Vol. 13, No. 12, pp. R476–R478.
5 Dedov, V. N., et al., "Gingerols: A Novel Class of Vanilloid Receptor (VR1) Agonists." *British Journal of Pharmacology*, 2002, Vol. 137, pp. 793–798.
6 Montell, C., op. cit.
7 Sternin, V., and Dorè, I, *Caviar: The Resource Book*. Moscow: Cultura, 1993, in McGee, H., *On Food and Cooking: The Science and Lore of the Kitchen*. New York: Scribner, 2004.

Resumen

1. La ley de Gauss es una ley fundamental de la Física que es equivalente a la ley de Coulomb para cargas estáticas.
2. La ley de Gauss puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en distribuciones de carga de gran simetría.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Campo eléctrico para una distribución de carga continua	$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k\hat{r}}{r^2}\, dq$ (ley de Coulomb)	22.1*b*
	donde $dq = \rho\, dV$ para una carga distribuida en un determinado volumen, $dq = \sigma\, dA$ para una carga distribuida en una superficie, y $dq = \lambda\, dL$ para una carga distribuida a lo largo de una línea.	
2. Flujo eléctrico	$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$	22.13
3. Ley de Gauss	$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$	22.16
	El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta en su interior dividido por ϵ_0.	
4. Constante *k* de Coulomb y permitividad del vacío ϵ_0	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$	
	$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$	22.7
5. Ley de Coulomb y ley de Gauss	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$	22.5
	$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$	22.16
6. Discontinuidad de E_n	En una superficie con una densidad de carga superficial σ, la componente del campo eléctrico perpendicular a la superficie es discontinua en el valor σ / ϵ_0.	
	$E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	22.20
7. Carga sobre un conductor	En equilibrio electrostático, la densidad de carga es cero en todo el interior del conductor. Si existe exceso o déficit de carga, se acumula en la superficie.	
8. Campo $\vec{E}$ en los puntos frontera fuera de un conductor	El campo eléctrico resultante justo fuera de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y vale σ / ϵ_0, donde σ es la densidad de carga superficial en el punto considerado del conductor:	
	$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	22.21
9. Campos eléctricos para diversas distribuciones de carga		
De una carga lineal infinita	$E_R = 2k\frac{\lambda}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$	22.6
En el eje de una carga anular	$E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$	22.8
En el eje de un disco cargado	$E_z = \text{sign}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1}\right]$	22.9

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
De un plano infinito cargado	$E_z = \text{sign}(z) \cdot \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	22.10
De una esfera sólida cargada	$E_r = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \quad r > R$	22.17*a*
	$E_r = 0 \quad r < R$	22.17*b*

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

22.1 El campo $\vec{E}$ en la ley de Gauss es el campo eléctrico debido a todas las cargas. Sin embargo, el flujo del campo eléctrico generado por las cargas que están fuera de la superficie gausiana es cero, de tal forma que el flujo del campo eléctrico producido por todas las cargas es igual al que generan las cargas que están en el interior de dicha superficie.

Respuestas a los problemas prácticos

22.1 $E_x = k\lambda\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$. Para $x > x_2$, $r_2 < r_1$; por lo tanto, $\dfrac{1}{r_2} > \dfrac{1}{r_1}$, lo cual significa que $E_x > 0$.

22.2 No. La simetría impone que E_z es cero para $z = 0$, mientras que la ecuación del paso 3 proporciona un valor negativo de E_z en $z = 0$. Estos resultados contradictorios no pueden ser ambos correctos.

22.3 Las unidades del SI para k, λ y R son $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, C/m y m, respectivamente. De esto se sigue que $k\lambda/R$ tiene unidades de $(\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(\text{C/m})(1/\text{m}) = \text{N/C}$.

22.4 $z = a/\sqrt{2}$

22.5 80%

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*
- Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • La figura 22.37 muestra un objeto en forma de L con lados iguales en longitud y cargado con una distribución uniforme de carga positiva. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico a lo largo de la línea discontinua que forma 45° con la horizontal? Explicar la respuesta. SSM

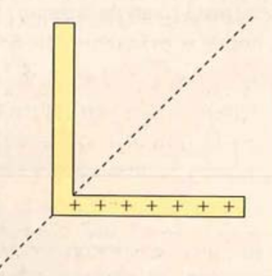


FIGURA 22.37 Problema 1

2 • Una carga positiva se distribuye uniformemente a lo largo del eje x y otra negativa se distribuye uniformemente a lo largo del eje y. La carga por unidad de longitud de ambas cargas es idéntica, excepto en el signo. Determinar la dirección del campo eléctrico en puntos de las líneas definidas por $y = x$ e $y = -x$. Explique su respuesta.

3 • Verdadero o falso:

(*a*) El campo eléctrico debido a una capa esférica fina, cargada uniformemente es cero en su interior, es decir, en la parte hueca.
(*b*) En equilibrio electrostático, el campo eléctrico en todos los puntos del interior de un conductor es cero.
(*c*) Si la carga neta de un conductor es cero, la densidad de carga deberá ser cero en cada punto de su superficie.

4 • Si el flujo a través de una superficie cerrada es cero, ¿deberá ser cero el campo eléctrico en todos los puntos de esta superficie? Si la respuesta es no, proponer un ejemplo sencillo. Con la información dada, ¿se puede determinar la carga neta en el interior de la superficie? Si la respuesta es sí, ¿cuál es esa carga?

5 • Verdadero o falso:

(*a*) La ley de Gauss se cumple sólo para distribuciones de carga simétricas.
(*b*) Que $E = 0$ en cualquier punto del interior de un conductor en condiciones de equilibrio electrostático puede deducirse de la ley de Gauss.

6 •• Se coloca una carga puntual q en el centro de un cubo imaginario y en el de una esfera, también imaginaria. Comparar el flujo eléctrico a través de la superficie del cubo con el flujo que atraviesa la superficie esférica. Explicar la respuesta.

7 •• Un dipolo eléctrico está completamente incluido en una superficie imaginaria cerrada y en el interior de esta superficie no existen otras cargas diferentes a las del dipolo. Verdadero o falso:

(*a*) El campo eléctrico es cero en cualquier punto de la superficie.
(*b*) El campo eléctrico es normal a la superficie en cualquiera de sus puntos.
(*c*) El flujo eléctrico a través de la superficie es cero.
(*d*) El flujo eléctrico a través de la superficie deberá ser positivo o negativo.
(*e*) El flujo eléctrico a través de un fragmento de la superficie puede no ser cero. SSM

8 •• Explicar por qué la intensidad del campo eléctrico crece linealmente con r, en lugar de decrecer inversamente con r^2, en los puntos del interior de una esfera sólida con densidad volúmica de carga uniforme (r es la distancia desde el centro al punto en el que se considera el campo.)

9 •• Suponer que la carga total de la capa o corteza esférica conductora de la figura 22.38 es cero. La carga negativa puntual en el centro tiene un valor absoluto igual a Q. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en las siguientes regiones? (*a*) $r < R_1$, (*b*) $R_2 > r > R_1$, y (*c*) $r > R_2$. Explicar las respuestas. SSM

10 •• La corteza esférica de la figura 22.38 se conecta a tierra, y la carga puntual negativa en el centro es ahora igual a Q. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(*a*) La carga en la superficie interior de la corteza es $+Q$ y en la superficie exterior $-Q$.
(*b*) La carga en la superficie interior de la corteza es $+Q$ y en la exterior cero.
(*c*) La carga en ambas superficies de la corteza es $+Q$.
(*d*) La carga en ambas superficies de la corteza es cero.

11 •• La corteza esférica de la figura 22.38 se conecta a tierra, y la carga puntual negativa en el centro es ahora igual a $-Q$. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en las siguientes regiones? (*a*) $r < R_1$, (*b*) $R_2 > r > R_1$, y (*c*) $r > R_2$. Justificar las respuestas.

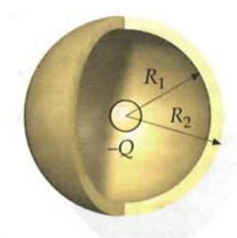


FIGURA 22.38 Problemas 9, 10 y 11

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

12 •• En este capítulo, se deduce la expresión del campo eléctrico en el eje de un disco que está producido por el mismo cuando se carga uniformemente. En cualquier punto del eje, el módulo del campo eléctrico es $|E| = 2\pi k\sigma\left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right]$. Como a grandes distancias ($|z| \gg R$), se demostró que esta ecuación puede aproximarse a $E \approx kQ/z^2$. Muy cerca del disco, la intensidad del campo eléctrico es, aproximadamente, la misma que produce un plano infinito cargado. Suponer que se tiene un disco de 2,5 cm con una distribución superficial de carga uniforme de $|E| \approx 2\pi k\sigma$. Usar la expresión exacta y la aproximada, dadas anteriormente, para hallar la intensidad del campo en el eje a distancias de (*a*) 0,010 cm, (*b*) 0,040 cm y (*c*) 5,0 m. Comparar los dos valores en cada caso y comentar la validez desde un punto de vista cuantitativo según sea la distancia a la que se determina el campo.

CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ MEDIANTE LA LEY DE COULOMB

13 • Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 3,5$ nC/m se distribuye desde $x = 0$ a $x = 5$ m. (*a*) ¿Cuál es la carga total? Determinar el campo eléctrico que se genera sobre el eje x en (*b*) $x = 6$ m, (*c*) $x = 9$ m y (*d*) $x = 250$ m. (*e*) Hallar el campo en $x = 250$ m usando la aproximación de que se trata de una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido exactamente en (*d*). (Para hacer esto se necesita asumir que los valores dados en este problema son válidos para más de dos figuras significativas.) ¿El resultado obtenido es mayor o menor que el exacto? Explique sus respuestas. SSM

14 • Se colocan paralelamente dos láminas infinitas, cargadas y no conductoras. La lámina A está en el plano $x = -2,0$ m y la B en $x = +2,0$ m. Determinar el campo eléctrico en las regiones del espacio $x < 2,0$ m, $x > 2,0$ m y en la comprendida entre las dos láminas en los siguientes casos: (*a*) cada plano posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = +3\ \mu C/m^2$ y (*b*) el plano izquierdo tiene una densidad de carga $\sigma = +3\ \mu C/m^2$ y el derecho $\sigma = -3\ \mu C/m^2$. (*c*) Dibujar las líneas de campo eléctrico en cada caso.

15 • Una carga de 2,75 μC está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8,5 cm. Determinar el campo eléctrico generado sobre el eje a (*a*) 1,2 cm, (*b*) 3,6 cm y (*c*) 4,0 m del centro del anillo. (*d*) Determinar el campo a 4,0 m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en (*c*). Explique su respuesta.

16 • Un disco no conductor de radio R está ubicado en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El disco tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. Hallar el valor de z para el cual $E_z = \sigma/(4\epsilon_0)$. Obsérvese que en esta distancia, la intensidad del campo eléctrico es la mitad que el evaluado en puntos del eje x muy cerca del disco.

17 • Un anillo de radio a está en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El anillo está uniformemente cargado y tiene una carga total Q. Calcular E_z en el eje en (*a*) $z = 0,2a$, (*b*) $z = 0,5a$, (*c*) $z = 0,7a$, (*d*) $z = a$, y (*e*) $z = 2a$. (*f*) Usar estos resultados para hacer una gráfica de E_z versus z para valores positivos y negativos de z. (Asumir que estas distancias son exactas.) SSM

18 • Un disco de radio a está en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El disco está uniformemente cargado y tiene una carga total Q. Hallar E_z en el eje en (*a*) $z = 0,2a$, (*b*) $z = 0,5a$, (*c*) $z = 0,7a$, (*d*) $z = a$, y (*e*) $z = 2a$. (*f*) Usar estos resultados para hacer una gráfica de E_z versus z para valores positivos y negativos de z. (Asumir que estas distancias son exactas.)

19 •• **HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Un disco de radio 30 cm es portador de una densidad de carga uniforme $\sigma = 0,5$ nC/m². (*a*) Representar gráficamente el campo eléctrico generado en el eje del disco utilizando una **hoja de cálculo**. (*b*) Comparar la aproximación $E = 2\pi k\sigma$ (fórmula para la intensidad del campo eléctrico de una lámina infinita uniformemente cargada) con la expresión exacta del campo eléctrico. ¿A qué distancia la aproximación difiere de la solución exacta en un 10%?

20 •• (*a*) Demostrar que el campo E generado en el eje de una carga anular de radio a tiene sus valores máximos en $z = \pm a/\sqrt{2}$. (*b*) Representar E en función de z para valores positivos y negativos de z. (*c*) Determinar el valor máximo de E.

21 •• Una línea cargada con densidad de carga λ está localizada en el eje x desde $x = x_1$ hasta $x = x_2$, siendo $x_1 < x_2$. Demostrar que la componente x del campo eléctrico en un punto del eje y viene dada por $E_x = \frac{k\lambda}{y}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$, donde $\theta_1 = \mathrm{arctg}(x_1/y)$, $\theta_2 = \mathrm{arctg}(x_2/y)$, e $y \neq 0$.

22 •• Un anillo de radio a contiene una distribución de carga lineal de la forma $\lambda\theta = \lambda_0$ sen θ, tal como muestra la figura 22.39. (*a*) ¿Qué dirección tiene el campo generado en el centro del anillo? (*b*) ¿Cuál es el módulo de dicho campo en el centro del anillo?

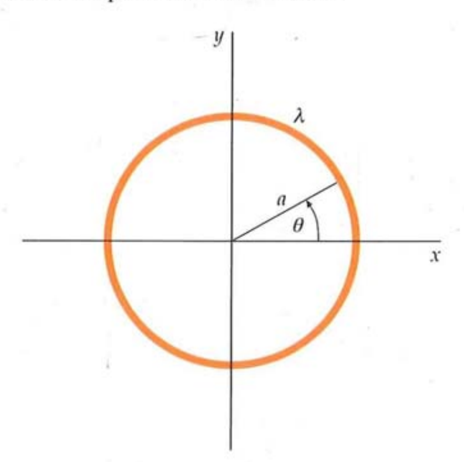


FIGURA 22.39 Problema 22

23 •• Una densidad de carga lineal uniforme λ está situada sobre el eje x desde $x = 0$ a $x = a$. Demostrar que la componente x del campo eléctrico en un punto del eje y viene dada por $E_y = \frac{k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$, $y \neq 0$.

24 ••• Calcular el campo eléctrico a distancia z de una lámina no conductora infinita y cargada uniformemente considerando la lámina como una serie continua de infinitas líneas rectas cargadas.

25 •• Calcular el campo eléctrico a distancia z de una lámina no conductora infinita y cargada uniformemente considerando la lámina como una serie continua de anillos circulares cargados. SSM

26 ••• Una corteza delgada hemisférica de radio R posee una carga de densidad superficial uniforme σ. Determinar el campo eléctrico en el centro de la corteza hemisférica ($r = 0$).

LEY DE GAUSS

27 • Consideremos un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (2{,}00\text{ kN/C})\hat{i}$. (*a*) ¿Cuál es el flujo de este campo que atraviesa un cuadrado de 10 cm de lado cuyo plano es paralelo al plano yz? (*b*) ¿Cuál es el flujo que atraviesa el mismo cuadrado si la normal a su plano forma un ángulo de 30° con el eje x?

28 • Una sola carga puntual $q = +2\ \mu$C está en el origen. Una superficie esférica de 3,0 m de radio tiene su centro en el eje x en el punto $x = 5$ m. (*a*) Dibujar las líneas de campo correspondientes a esta carga puntual (en dos dimensiones) asumiendo que 12 líneas de campo igualmente espaciadas en el plano xy salen de la carga, habiendo una línea en la dirección $+x$. ¿Hay líneas que entran en la superficie esférica? Si la respuesta es sí, ¿cuántas? (*b*) ¿Cuál es el número neto de líneas que salen de la superficie esférica? Si la respuesta es sí, ¿cuántas? (*c*) Contando que las líneas que entran se contabilizan como flujo negativo y las que salen, como positivo, ¿cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

29 • Un campo eléctrico dado por $\vec{E} = \text{sign}(x) \cdot (300\text{ N/C})\hat{i}$, donde sign($x$) es igual a: -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$ y $+1$ si $x > 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 4 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está situado a lo largo del eje x de modo que una de las bases está en $x = +10$ cm y la otra en $x = -10$ cm. (*a*) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada base? (*b*) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la superficie curvada (lateral) del cilindro? (*c*) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa toda la superficie cilíndrica? (*d*) ¿Cuál es la carga neta en el interior del cilindro? SSM

30 • Medidas cuidadosas del campo eléctrico en la superficie de una caja negra indican que el flujo neto que sale de la superficie de la caja es 6,0 kN · m²/C. (*a*) ¿Cuál es la carga neta en el interior de la caja? (*b*) Si el flujo neto que sale de la superficie de la caja fuese cero, ¿podría obtenerse la conclusión de que no hay ninguna carga en el interior de la caja? Explique sus respuestas.

31 • Una carga puntual $q = +2\ \mu$C está en el centro de una esfera de 0,5 m de radio. (*a*) Hallar el área superficial de la esfera. (*b*) Hallar el valor del campo eléctrico generado en los puntos situados en la superficie de la esfera. (*c*) ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie de la esfera? (*d*) ¿Variaría la respuesta dada en el apartado (*c*) si se moviese la carga puntual de modo que estuviese dentro de la esfera pero no en el centro? (*e*) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa un cubo de 1 m de arista que circunscribe la esfera?

32 • ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una cara de un cubo que tiene una carga puntual de $-3{,}00\ \mu$C en su centro? *Ayuda: no es necesario hacer ninguna integral para resolver este problema.*

33 • Una carga puntual está colocada en el centro de un cubo imaginario de 20 cm de lado. El flujo eléctrico que sale de una de sus caras es $-1{,}50$ kN · m²/C. ¿Cuánta carga hay en su centro? SSM

34 •• Dado que tanto en la ley de Newton de la gravedad como en la de Coulomb, las fuerzas varían de forma inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de los elementos interactuantes, es posible determinar una expresión análoga a la ley de Gauss para los campos gravitatorios. El campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto es la fuerza por unidad de masa para una masa testigo m_0 colocada en ese punto. (Por lo tanto, para una masa m en el origen, el campo gravitatorio g en una posición $\hat{r}$ es $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$.) Calcular el flujo del campo gravitatorio que atraviesa una superficie esférica de radio r centrada en el origen y demostrar que la ecuación análoga gravitatoria de la ley de Gauss es $\phi_{\text{neto}} = -4\pi G m_{\text{interna}}$.

35 •• El cono imaginario de la figura 22.40 tiene un ángulo θ entre la generatriz y la base de radio R. Este cono está libre de carga y en él existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ (las líneas de campo son verticales y paralelas al eje del cono). ¿Cuál es la relación entre el número de líneas de campo por unidad de área que penetran por la base con respecto de las que entran por la superficie lateral (cónica) de este cono? Utilizar el teorema de Gauss para dar una respuesta. (Las líneas de campo en la figura son sólo una muestra representiva.)

36 •• En una región particular de la atmósfera terrestre, se ha medido el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra resultando ser de 150 N/C a una altura de 250 m y de 170 N/C a 400 m, en ambos casos dirigido hacia abajo. Calcular la densidad de carga volúmica de la atmósfera suponiendo que es uniforme entre 250 y 400 m. (Puede despreciarse la curvatura de la Tierra. ¿Por qué?)

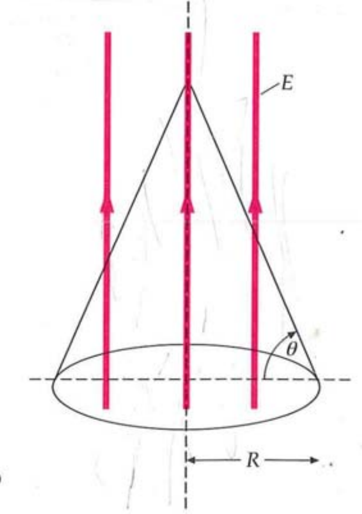


FIGURA 22.40 Problema 35

APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS EN SITUACIONES DE SIMETRÍA ESFÉRICA

37 • Una corteza esférica de radio R_1 posee una carga total q_1 uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior posee una carga q_2 uniformemente distribuida en su superficie. (*a*) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (*b*) ¿Cuál deberá ser el cociente de las cargas q_1 / q_2 y su signo relativo para que el campo eléctrico sea cero para $r > R_2$? (*c*) Hacer un esquema de las líneas de fuerza para el caso indicado en el apartado (*b*) cuando q_1 es positiva.

38 • Una corteza esférica de radio 6 cm posee una densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 9$ nC/m². (*a*) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm.

39 •• Una esfera de radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho = 450$ nC/m³. (*a*) ¿Cuál es la carga total de la esfera? Determinar el campo eléctrico en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm. SSM

40 •• Consideremos dos esferas conductoras concéntricas (figura 22.41). La esfera exterior es hueca y en ella se ha depositado una carga $-7Q$. La esfera interior es sólida y en ella hay una carga $+2Q$. (*a*) ¿Cómo está distribuida la carga en la esfera exterior? Es decir, ¿cuánta carga hay en la superficie exterior y cuánta en la superficie interior? (*b*) Supongamos que se conecta un alambre entre ambas esferas. Una vez alcanzado el equilibrio electrostático, ¿cuánta carga total existe en la esfera exterior? ¿Cuánta carga hay ahora en la superficie exterior de esta esfera y cuánta carga en su superficie interna? ¿Cambia el campo eléctrico de la superficie de la esfera interna al conectar el cable? Si es así, ¿cómo cambia? (*c*) Supongamos que volvemos a las condiciones iniciales de (*a*) con $+2Q$ en la esfera interior y $-7Q$ en la exterior. Conectamos ahora la esfera interior a tierra con un cable y luego lo desconectamos. ¿Cuánta carga total existirá en la esfera sólida? ¿Cuánta carga tendremos en la superficie interna de la esfera exterior y cuánta en la superficie externa?

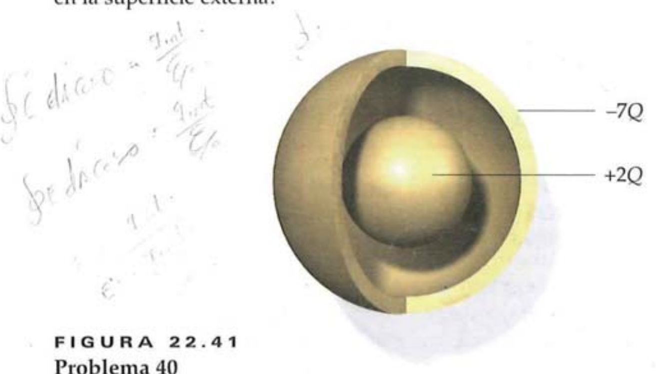


FIGURA 22.41
Problema 40

41 •• Una esfera no conductora de radio $R = 0{,}1$ m posee una densidad de carga volúmica uniforme. El módulo del campo eléctrico en $\rho = 2R$ es 1883 N/C. (*a*) ¿Cuál es la densidad de carga volúmica? (*b*) Determinar el módulo del campo eléctrico en $r = 0{,}5R$ desde el centro de la esfera.

42 •• Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad de carga volúmica proporcional a la distancia desde el centro: $\rho = Ar$ para $r \le R$, siendo A una constante; $r = 0$ para $r > R$. (*a*) Hallar la carga total de la esfera. (*b*) Hallar el campo eléctrico E_r, generado tanto en el interior como en el exterior de la distribución de carga y representar E_r en función de r. (*c*) Dibujar una gráfica del módulo del campo eléctrico como función de la distancia r medida desde el centro de la esfera.

43 •• Una esfera de radio R contiene una densidad de carga volúmica $\rho = B/r$ para $r < R$, donde B es una constante y $\rho = 0$ para $r > R$. (*a*) Determinar la carga total de la esfera. (*b*) Hallar las expresiones del campo eléctrico dentro y fuera de la distribución de carga. (*c*) Hacer una gráfica del módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera. SSM

44 •• Una esfera de radio R contiene una densidad de carga volúmica $\rho = C/r^2$ para $r < R$, donde C es una constante y $\rho = 0$ para $r > R$. (*a*) Hallar la carga total de la esfera. (*b*) Obtener las expresiones del campo eléctrico dentro y fuera de la distribución de carga. (*c*) Dibujar una gráfica del módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera.

45 ••• Una corteza esférica no conductora y gruesa de radio interior a y de radio exterior b posee una densidad ρ de carga volúmica uniforme. (*a*) Calcular la carga total. (*b*) Determinar el campo eléctrico en todos los puntos.

APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS EN SITUACIONES DE SIMETRÍA CILÍNDRICA

46 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un contador Geiger es un típico aparato de un laboratorio de Física Nuclear que sirve para detectar radiación. Este instrumento está constituido por un tubo cilíndrico que tiene un hilo recto de metal a lo largo de su eje central. El diámetro del hilo debe ser de 0,500 mm y el diámetro interior del tubo de 4,00 cm. El tubo se llena de un gas diluido en el que se establece una descarga eléctrica con la que se produce la ruptura dieléctrica que sucede cuando el campo eléctrico alcanza $5{,}50 \times 10^6$ N/C. Determinar la máxima densidad de carga lineal que tiene que llevar el hilo para que no se produzca la ruptura dieléctrica. Asumir que el tubo y el hilo son infinitamente largos.

47 ••• En el problema 46, suponer que la radiación ionizante produce un ion y un electrón a la distancia de 1,50 cm desde el eje del hilo central del tubo de Geiger. Suponer que el hilo central está positivamente cargado con una densidad lineal de carga igual a 76,5 pC/m. (*a*) En este caso, ¿qué velocidad adquirirá el electrón cuando impacte con el hilo? (*b*) ¿Cómo será la velocidad del electrón comparada con la velocidad final del ion cuando impacte fuera del cilindro? Explique sus respuestas.

48 •• Demostrar que el campo eléctrico debido a una corteza cilíndrica uniformemente cargada e infinitamente larga de radio R y que posee una densidad de carga superficial σ, viene dado por: $E = 0$ cuando $0 \le R < a$ y $E_R = \sigma a/(\epsilon_0 R)$ cuando $R > a$.

49 • Una corteza cilíndrica de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 9$ nC/m². (*a*) ¿Cuál es la carga total en la corteza? Hallar el campo eléctrico en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm. (Utilizar los resultados del problema 48.)

50 •• Un cilindro no conductor infinitamente largo de radio R posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho(r) = \rho_0$. Demostrar que el campo eléctrico viene dado por $E_R = \rho_0 R/(2\epsilon_0)$ cuando $0 \le R < a$, y por $E_R = \rho_0 a^2/(2\epsilon_0 R)$ cuando $R > a$, donde R es la distancia desde el eje del cilindro.

51 •• Un cilindro de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho = 300$ nC/m³. (*a*) ¿Cuál es la carga total del cilindro? Utilizar las fórmulas dadas en el problema 50 para determinar el campo eléctrico en un punto equidistante de los extremos en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm. SSM

52 •• Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1, mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2. (*a*) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (*b*) ¿Cuál deberá ser el cociente de las densidades σ_2/σ_1 y el signo relativo de ambas para que el campo eléctrico existente sea cero cuando $r > R_2$? ¿Cuál es entonces el campo eléctrico entre las cortezas? (*c*) Hacer un esquema de las líneas de campo en el caso indicado en el apartado (*b*) considerando σ_1 positivo.

53 •• La figura 22.42 muestra la sección trasversal de una porción de un cable concéntrico infinitamente largo. El conductor interno posee una carga de 6 nC/m; mientras que el conductor externo está descargado. (*a*) Determinar el campo eléctrico para todos los valores de *R*, siendo *R* la distancia desde el eje del sistema cilíndrico. (*b*) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?

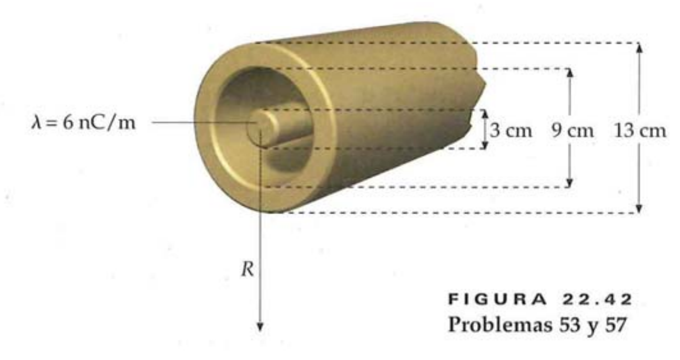


FIGURA 22.42
Problemas 53 y 57

54 •• Un cilindro no conductor, de longitud infinita y radio *R* contiene una distribución de carga $\rho(r) = ar$, siendo *a* constante. (*a*) Demostrar que la carga por unidad de longitud es $\lambda = 2\pi\, a\, R^3/3$. (*b*) Hallar las expresiones del campo eléctrico generado por este cilindro en todos los puntos del espacio, es decir, una expresión para $r < R$ y otra para $r > R$.

55 •• Un cilindro de radio *a*, sólido, infinitamente largo y no conductor, contiene una densidad volúmica de carga distribuida no uniformemente. Esta densidad varía con respecto de la distancia al eje del cilindro, medida sobre su perpendicular, según la expresión $\rho(R) = bR^2$, donde *b* es una constante. (*a*) Demostrar que la densidad lineal de carga del cilindro es $\lambda = \pi b a^4/2$. (*b*) Obtener expresiones del campo eléctrico $R < a$ y $R > a$. SSM

56 ••• Una corteza cilíndrica no conductora, gruesa e infinitamente larga, de radio interior *a* y radio exterior *b*, posee una densidad de carga volúmica uniforme ρ. Determinar el campo eléctrico en todos los puntos.

57 ••• Supongamos que el cilindro interno de la figura 22.42 está construido con un material no conductor y posee una distribución de carga volúmica dada por $\rho(r) = C/r$, donde $C = 200\ \text{nC/m}^3$. El cilindro externo es metálico. (*a*) Determinar la carga por metro que posee el cilindro interno (es decir, la densidad lineal de carga). (*b*) Calcular el campo eléctrico para todos los valores de *R*. SSM

CARGA Y CAMPO EN SUPERFICIES DE CONDUCTORES

58 • Una moneda descargada está en el interior de un campo eléctrico externo de valor 1,6 kN/C cuya dirección es perpendicular a sus caras. (*a*) Hallar la densidad de carga en cada cara de la moneda suponiendo que son planas. (*b*) Si el radio de la moneda es 1 cm, ¿cuál es la carga total de una cara?

59 • Una estrecha lámina metálica sin carga tiene caras cuadradas de 12 cm de lado. Se coloca dentro de un campo eléctrico externo que es perpendicular a sus caras. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico si la carga total inducida en una de las caras del bloque es 1,2 nC?

60 • Una carga de −6 nC se coloca uniformemente en una lámina cuadrada de material no conductor de 20 cm de lado situada en el plano *yz*. (*a*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga σ? (*b*) ¿Cuál es el valor del módulo del campo eléctrico en las proximidades de la lámina y cerca de su centro?

61 • Una corteza conductora esférica con una carga neta cero tiene un radio interior *a* y un radio exterior *b*. Se coloca una carga puntual *q* en el centro de la corteza. (*a*) Utilizar la ley de Gauss y las propiedades de los conductores en equilibrio para hallar el campo eléctrico en cada una de las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $b < r$. (*b*) Dibujar las líneas de campo eléctrico para este caso. (*c*) Determinar la densidad de carga en la superficie interna ($r = a$) y en la superficie externa ($r = b$) de la corteza.

62 •• El campo eléctrico justo por encima de la superficie de la Tierra, medido experimentalmente, es de 150 N/C, dirigido hacia abajo. (*a*) ¿Cuál es el signo de la carga neta en la superficie de la Tierra en estas condiciones? (*b*) A partir de este dato, ¿qué carga total se puede estimar que exista sobre la superficie de Tierra?

63 •• Una carga puntual positiva de 2,5 μC se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica sin carga, de radio interior 60 cm y de radio exterior 90 cm. (*a*) Determinar las densidades de carga de las superficies interior y exterior de la corteza y la carga total de cada superficie. (*b*) Determinar el campo eléctrico generado en cualquier punto. (*c*) Repetir (*a*) y (*b*) para el caso en que se añade una carga neta de + 3,5 μC a la corteza. SSM

64 •• Si el módulo de un campo eléctrico situado en la atmósfera es 3×10^6 N/C, el aire se ioniza y comienza a conducir la electricidad. Este fenómeno se denomina ruptura dieléctrica. Una carga de 18 μC se sitúa en una esfera conductora. ¿Cuál es el radio mínimo de una esfera que pueda soportar esta carga sin que se produzca la ruptura dieléctrica?

65 •• Una lámina conductora cuadrada con lados de 5 m es portadora de una carga neta de 80 μC. (*a*) Determinar la densidad de carga de cada cara de la lámina y el campo eléctrico justo en el exterior de una cara de la lámina. (*b*) La lámina se sitúa a la derecha de un plano infinito no conductor, cargado con una densidad de 2,0 $\mu\text{C/m}^2$ y de modo que las caras de la lámina son paralelas al plano. Determinar el campo eléctrico en cada cara de la lámina lejos de los bordes y la densidad de carga de cada cara. SSM

PROBLEMAS GENERALES

66 •• Consideremos las tres esferas metálicas concéntricas de la figura 22.43. La esfera I es sólida con el radio R_1. La esfera II es hueca con el radio R_2 más interno y el radio R_3 externo. La esfera III es hueca con radio

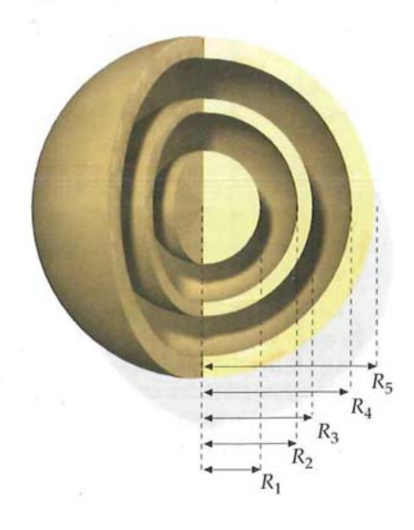


FIGURA 22.43
Problema 66

R_4 más interno y radio R_5 externo. Inicialmente las tres esferas tienen una carga nula. A continuación, añadimos una carga $-Q_0$ a la esfera I y una carga positiva $+Q_0$ a la esfera III. (*a*) Una vez que las cargas han alcanzado el equilibrio, el campo eléctrico en el espacio comprendido entre las esferas I y II, ¿está dirigido hacia el centro, se aleja del centro o ninguna de ambas cosas? (*b*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie interna de la esfera II? Especificar su signo. (*c*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie externa de la esfera II? (*d*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie interna de la esfera III? (*e*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie externa de la esfera III? (*f*) Representar E en función de r para todo valor de r.

67 •• Sobre el plano yz tenemos una carga superficial no uniforme. En el origen, la densidad de carga superficial es $\sigma = 3{,}10\ \mu\text{C/m}^2$. En el espacio existen otras distribuciones de carga. Justo a la derecha del origen, la componente x del campo eléctrico es $E_x = 4{,}65 \times 10^5$ N/C. ¿Cuál es el valor de E_x justo a la izquierda del origen? SSM

68 •• Una carga lineal infinita de densidad lineal uniforme $\lambda = -1{,}5\ \mu\text{C/m}$ es paralela al eje y en $x = -2$ m. Una carga puntual de 1,3 μC está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m. Determinar el campo eléctrico en $x = 2$ m, $y = 1{,}5$ m.

69 •• Un capa esférica fina de radio R (figura 22.44*a*) tiene una carga total Q. Un pequeño trozo circular es extraído de la superficie. (*a*) ¿Cuál es el valor del módulo, dirección y sentido del campo eléctrico en el centro del hueco que deja el "tapón" extraído? (*b*) Utilizando el resultado del apartado (*a*), calcular la fuerza eléctrica sobre el "tapón" cuando se vuelve a colocar en el hueco (figura 22.44*b*). (*c*) A partir de estos últimos resultados, calcular la "presión electrostática" (fuerza/unidad de área) existente en toda la esfera. SSM

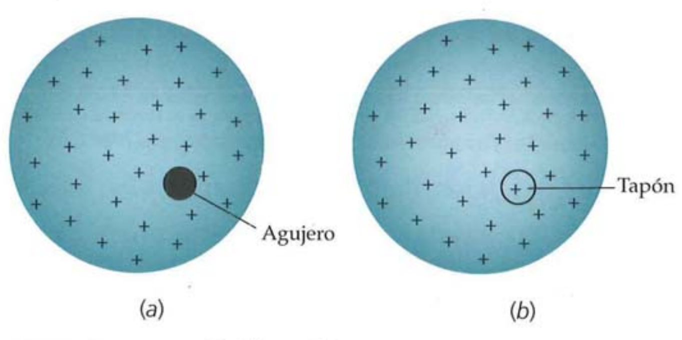


FIGURA 22.44 Problema 69

70 •• Una lámina fina e infinita colocada en el plano $y = 0$ tiene una densidad de carga superficial uniformemente cargada $\sigma_1 = +65\ \text{nC/m}^2$. Una segunda lámina fina e infinita tiene una densidad superficial uniforme de carga $\sigma_2 = +45\ \text{nC/m}^2$ La intersección de las dos láminas se produce en el eje z formando un ángulo de 30° con el plano xz, tal como se muestra en la figura 22.45. Determinar el campo eléctrico en (*a*) $x = 6{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m y (*b*) $x = 6{,}0$ m, $y = 5{,}0$ m.

FIGURA 22.45 Problema 70

71 ••• Dos placas idénticas cuadradas de metal, de 500 cm², están paralelas y separadas 1,50 cm. Inicialmente, están descargadas y, posteriormente, se transfiere una carga de 1,50 nC desde la placa de la izquierda a la de la derecha, produciéndose enseguida el equilibrio electrostático. (Despreciar efectos de borde.) (*a*) ¿Cuánto vale el campo eléctrico entre las placas a una distancia de 0,25 cm de la placa de la derecha? (*b*) ¿Qué valor alcanza el campo eléctrico entre las placas a una distancia de 1,00 cm de la placa de la izquieda? (*c*) ¿Cuál es el campo eléctrico justo a la derecha de la placa de la derecha? SSM

72 •• Dos planos no conductores infinitos de carga uniformemente distribuida son paralelos entre sí y paralelos al plano yz. Uno de ellos corresponde a $x = -2$ m y su densidad superficial de carga es $\sigma = -3{,}5\ \mu\text{C/m}^2$. El otro corresponde a $x = 2$ m y $\sigma = 6{,}0\ \mu\text{C/m}^2$. Determinar el campo eléctrico para (*a*) $x < -2$ m, (*b*) $-2\text{ m} < x < 2$ m y (*c*) $x > 2$ m.

73 ••• La mecánica cuántica considera que el electrón del átomo de hidrógeno no es puntual, sino que le asigna una distribución de carga extendida en todo el espacio cuya expresión es $\rho(r) = -\rho_0 e^{-2r/a}$, donde r es la distancia al centro del núcleo, y a es el denominado radio de Bohr ($a = 0{,}0529$ nm). Recordar que el núcleo de un átomo de hidrógeno está formado por un protón que es una carga unidad positiva que se puede considerar puntual. (*a*) Calcular ρ_0 considerando que el átomo tiene carga total cero. (*b*) Calcular el campo eléctrico generado a una distancia r del núcleo. Considerar el protón como una carga puntual. SSM

74 •• Un anillo de radio R que se encuentra en el plano horizontal (xy) posee una carga $-Q$ distribuida uniformemente en toda su longitud. Una masa m posee una carga q de signo opuesto al de Q y está localizada en el eje del anillo. (*a*) ¿Cuál es el valor mínimo de q/m para que la masa m se encuentre en equilibrio bajo la acción de las fuerzas gravitatoria y electrostática? (*b*) Si q/m es el doble del valor calculado en (*a*), ¿dónde se encuentra la masa al alcanzar el equilibrio? Expresar los resultados en función de R.

75 •• Una barra de plástico, no conductora, larga y delgada, se dobla formando un bucle de radio R. Entre los extremos de la barra queda un hueco de longitud l ($l << R$). Una carga Q se distribuye por igual sobre la barra. (*a*) Indicar la dirección y el sentido del campo eléctrico en el centro del bucle. (*b*) Determinar el módulo del campo eléctrico generado en el centro del bucle.

76 •• Una esfera sólida de 1,2 m de diámetro con su centro sobre el eje x en $x = 4$ m, tiene una carga volúmica uniforme de densidad $\rho = 5\ \mu\text{C/m}^3$. Una corteza esférica concéntrica con la esfera tiene un diámetro de 2,4 m y una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = -1{,}5\ \mu\text{C/m}^2$. Calcular el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en (*a*) $x = 4{,}5$ m, $y = 0$; (*b*) $x = 4{,}0$ m, $y = 1{,}1$ m y (*c*) $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m.

77 •• Un plano infinito cargado de densidad superficial $\sigma_1 = 3\ \mu\text{C/m}^2$ es paralelo al plano xz en $y = -0{,}6$ m. Un segundo plano infinito cargado de densidad superficial $\sigma_2 = -2\ \mu\text{C/m}^2$ es paralelo al plano yz en $x = 1$ m. Una estrecha capa o cáscara esférica no conductora de radio 1 m con su centro en el plano xy en la intersección de los planos cargados posee una densidad de carga superficial $\sigma_3 = -3\ \mu\text{C/m}^2$. Determinar el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico en el eje x en (*a*) $x = 0{,}4$ m y (*b*) $x = 2{,}5$ m.

78 •• Un plano infinito paralelo al plano yz en $x = 2$ m posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 2\ \mu\text{C/m}^2$. Una carga lineal infinita de densidad uniforme $\lambda = 4\ \mu\text{C/m}$ pasa por el origen formando un ángulo de 45° con el eje x en el plano xy. Una esfera sólida no conductora con una densidad de carga volúmica $\rho = -6\ \mu\text{C/m}^3$ y radio 0,8 m está centrada sobre el eje x en $x = 1$ m. Calcular el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el plano xy en $x = 1{,}5$ m, $y = 0{,}5$ m.

79 •• Una densidad lineal de carga infinita λ está localizada a lo largo del eje z. Una masa m que posee una carga q de signo opuesto al de λ, se encuentra en una órbita circular en el plano xy alrededor de la carga lineal. (*a*) Deducir una expresión para la velocidad de la partícula. (*b*) Deducir una expresión para el periodo de la órbita en función de m, q, R y λ, siendo R el radio de la órbita. SSM

80 •• Un anillo de radio R que se encuentra en el plano yz posee una carga Q uniformemente distribuida en toda su longitud. En el centro del anillo se encuentra una partícula de masa m que posee una carga negativa q. (*a*) Demostrar que si $x << R$, el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo es proporcional a x. (*b*) Determinar la fuerza que actúa sobre la masa m en función de x. (*c*) Demostrar que si damos a m un pequeño desplazamiento en la dirección x, realizará un movimiento armónico simple. (*d*) Calcular el periodo de dicho movimiento.

81 •• Cuando las cargas Q y q del problema 80 son 5 μC y -5 μC, respectivamente, y el radio del anillo es 8,0 cm, la masa m oscila alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia angular de 21 rad/s. ¿Cuál es la masa de la partícula? Determinar la frecuencia angular de oscilación de la masa si el radio del anillo se duplica a 16 cm y todos los demás parámetros permanecen sin modificar. SSM

82 •• Dadas las condiciones iniciales del problema 80, determinar la frecuencia angular de oscilación de la masa si el radio del anillo se duplica a 16 cm, mientras que la densidad de carga lineal del anillo permanece constante.

83 ••• Una esfera no conductora de radio a y con centro en el origen está uniformemente cargada con una distribución de carga ρ. (*a*) Demostrar que el campo eléctrico en un punto del interior de dicha esfera a una distancia r del centro es $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r}$. (*b*) Se extrae un trozo de la esfera, dejando una cavidad esférica de radio $b = R/2$, cuyo centro está a una distancia $b = R/2$ del de la esfera inicial, tal como indica la figura 22.46. Calcular el campo eléctrico en los puntos 1 y 2 mostrados en la figura 22.46. *Sugerencia: reemplazar el conjunto esfera-cavidad por dos esferas que tengan la misma densidad de carga uniforme pero con signos opuestos.*

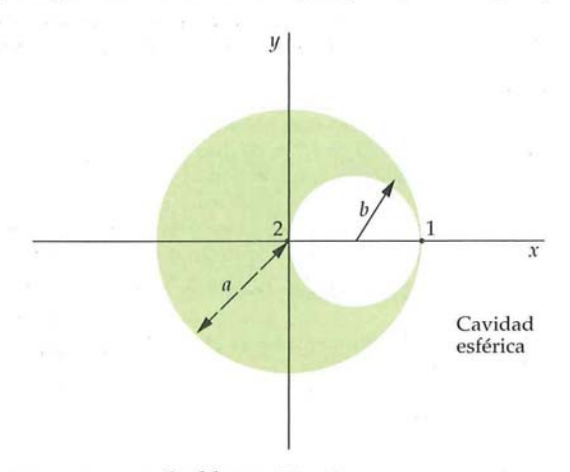


FIGURA 22.46 Problemas 83 y 85

84 ••• Demostrar que el campo existente en cualquier punto del interior de la cavidad del problema 83*b* viene dado por $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b\hat{i}$.

85 ••• La cavidad en el problema 83*b* se llena de un material no conductor con una carga total Q. Calcular de nuevo el campo eléctrico en los puntos 1 y 2 de la figura 22.46.

86 ••• Una *pequeña* superficie gausiana en forma de cubo con caras paralelas a los planos xy, xz e yz (figura 22.47) está en una región en la que el campo eléctrico es paralelo al eje x. (*a*) Usando la serie de Taylor y despreciando términos superiores al primero, demostrar que el flujo neto del campo eléctrico que sale de la superficie gausiana viene dado por $\phi_{\text{neto}} \approx \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V$, donde ΔV es el volumen limitado por la superficie gausiana. (*b*) Usando la ley de Gauss y el resultado de la parte (*a*) demostrar que $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, donde ρ es la densidad volúmica de carga dentro del cubo. (Esta ecuación es la forma local de la ley de Gauss en una dimensión.)

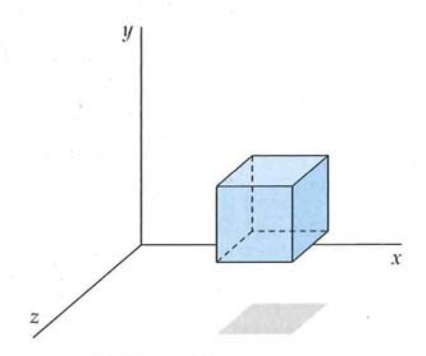


FIGURA 22.47 Problema 86

87 ••• Un modelo simple pero sorprendentemente preciso de una molécula de hidrógeno es aquel que considera dos cargas puntuales de carga $+e$ colocadas en el interior de una esfera de radio R que contiene una carga $-2e$ uniformemente distribuida en todo el volumen de la misma. Las dos cargas se colocan simétricamente con respecto al centro, tal como indica la figura 22.48. Calcular la distancia a, medida desde el centro, donde la fuerza neta sobre cualquier carga es cero. SSM

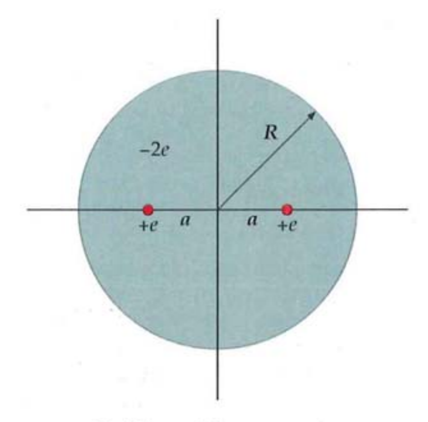


FIGURA 22.48 Problema 87

88 ••• Un dipolo eléctrico con mometo dipolar $\vec{p}$ está localizado en la perpendicular y a una distancia R de una línea infinita con densidad lineal de carga uniforme λ. Asumir que el momento dipolar está en la misma dirección que el campo generado por la línea de carga. Obtener una expresión para la fuerza eléctrica sobre el dipolo.





LA MUCHACHA HA SIDO CARGADA A UN POTENCIAL MUY ELEVADO POR CONTACTO CON UN GENERADOR DE VAN DE GRAAFF. MIENTRAS PERMANECE DE PIE SOBRE UNA PLATAFORMA QUE LE AÍSLA DEL SUELO, VA ACUMULANDO CARGA PROCEDENTE DEL GENERADOR. SU CABELLO SE ERIZA PORQUE LAS CARGAS DE SUS TRENZAS TIENEN EL MISMO SIGNO, REPELIÉNDOSE ENTRE SÍ. *(Gentileza de U.S. Department of Energy.)*

Potencial eléctrico

En este capítulo, estudiamos la energía potencial eléctrica que junto con la gravitatoria, introducida en el capítulo 7, son dos conceptos de Física que tienen importancia en sí mismos y, además, son de utilidad para determinar los campos respectivos. Continuamos con el estudio del campo eléctrico (cuyo análisis se inició en los capítulos 21 y 22) relacionándolo con el potencial eléctrico, que al ser magnitud escalar es, normalmente, más fácil de calcular y manejar que el propio campo eléctrico que es una magnitud vectorial. Por otro lado, la medida del potencial eléctrico que se realiza con el voltímetro es más sencilla y menos costosa que la del campo. El campo eléctrico y el potencial eléctrico son dos conceptos fundamentales en el análisis de la capacidad, la resistencia, los circuitos eléctricos, etc., temas que se analizan en los capítulos 24 y 25.

En este capítulo, se establece la relación entre campo y potencial eléctrico, se calcula el potencial eléctrico generado por diversas distribuciones continuas de carga y, a continuación, se determina el campo eléctrico en las regiones del espacio en las que se ha calculado el potencial.

? ¿Se puede conocer cuál es el máximo potencial al que es posible cargar la cúpula de un generador de Van de Graff sabiendo el radio de la misma? (Véase el ejemplo 23.14.)

23.1 DIFERENCIA DE POTENCIAL

La fuerza eléctrica que se ejercen dos cargas puntuales está dirigida a lo largo de la línea que une las dos cargas y depende de la inversa del cuadrado de su separación, lo mismo que la fuerza gravitatoria que se ejercen dos masas. Al igual que la fuerza gravitatoria, la fuerza eléctrica es conservativa. Existe, por lo tanto, una función energía potencial U asociada con la fuerza eléctrica. En general, cuando el punto de aplicación de una fuerza conservativa $\vec{F}$ experimenta un desplazamiento $d\vec{\ell}$, la variación de la función energía potencial dU viene definida por

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

La fuerza ejercida por un campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga puntual q es

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Cuando la carga experimenta un desplazamiento $d\vec{\ell}$, en un campo eléctrico $\vec{E}$, la variación de energía potencial electrostática es

$$dU = -q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad 23.1$$

En la sección 21.4, se dice que la fuerza electrostática ejercida sobre una carga "testigo", q_0, es proporcional a dicha carga, y esta fuerza que se ejerce por unidad de carga se denomina campo eléctrico en el punto donde está dicha carga testigo. Existe una cierta analogía conceptual y de procedimiento en la definición del potencial eléctrico. El incremento de energía potencial asociado al desplazamiento $d\vec{\ell}$ que sufre la carga testigo, q_0, ante la acción de la fuerza eléctrica viene dado por $dU = -q_0\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. De esta forma, el incremento (positivo o negativo, según el signo del mismo) es proporcional a la carga testigo. La variación de energía potencial es proporcional a la carga testigo q_0. La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina **diferencia de potencial** dV:

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad 23.2a$$

DEFINICIÓN: DIFERENCIA DE POTENCIAL

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b, el cambio de potencial es

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad 23.2b$$

DEFINICIÓN: DIFERENCIA DE POTENCIAL FINITA

La diferencia de potencial $V_b - V_a$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando ésta se desplaza del punto a al punto b (a lo largo de cualquier camino entre los extremos). Para realizar este cálculo, las posiciones del resto de las cargas deben permanecer invariables. (Debemos recordar que esta carga de prueba es puntual, con un valor tan pequeño que su acción sobre cualquier otra carga que forme el sistema puede considerarse despreciable. Normalmente, se acepta la convención de que las cargas testigo son positivas.)

La función V se denomina **potencial eléctrico** o simplemente **potencial**. El potencial V, al igual que cualquiera de las componentes del campo eléctrico es una función de la posición. Al contrario que el campo eléctrico, V es una función escalar, mientras que $\vec{E}$ es una función vectorial. Del mismo modo que en la energía potencial U, sólo tiene importancia el *cambio* de potencial V. Tenemos la libertad de elegir el potencial de tal modo que sea cero en el punto que más nos convenga, lo mismo que hacíamos con la energía potencial. Si el potencial eléctrico y la energía potencial de una carga testigo se eligen de modo que sean iguales a cero en el mismo punto, ambas magnitudes están relacionadas por

$$U = q_0 V \qquad 23.3$$

RELACIÓN ENTRE ENERGÍA POTENCIAL *U* Y POTENCIAL *V*

CONTINUIDAD DE V

En el capítulo 22, decíamos que el campo eléctrico presenta la discontinuidad σ/ϵ_0 en un punto donde existe una densidad de carga superficial σ. En cambio, la función potencial es continua en todos los puntos del espacio, excepto en aquellos puntos en los que el campo eléctrico es infinito (puntos en los que existe una carga puntual o una línea de carga). Podemos comprobarlo a partir de su definición. Consideremos una región del espacio en la que existe un campo eléctrico $\vec{E}$. La diferencia de potencial entre dos puntos próximos separados por un desplazamiento infinitesimal $d\vec{\ell}$ viene dado por $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ (ecuación 23.2*a*). El producto escalar puede expresarse por $E_{\parallel}d\ell$, donde $E_{\parallel}$ es la componente del campo en la dirección de $d\vec{\ell}$ siendo $d\ell$ el módulo de $d\vec{\ell}$. Sustituyendo en la ecuación 23.2*a*, obtenemos que $dV = -E_{\parallel}d\ell$. Si $\vec{E}$ es finito en los puntos del segmento infinitesimal $d\ell$, dV es infinitesimal. Por lo tanto, el potencial V es continuo en los puntos en los que el campo sea finito, es decir, en aquellos puntos que no pertenezcan a una línea de carga o en los que no exista una carga puntual.

UNIDADES

Como el potencial eléctrico es la energía potencial electrostática por unidad de carga, la unidad del SI para el potencial y la diferencia de potencial es el joule por coulomb, llamada **volt** (V):

$$1\ \text{V} = 1\ \text{J/C} \qquad 23.4$$

Como la diferencia de potencial se mide en volts, a veces se le llama **voltaje**. En una batería de automóvil de 12 volts, el terminal positivo tiene un potencial que es 12 V mayor que el del terminal negativo. Si a esta batería se conecta un circuito externo y por él circula una carga de un coulomb desde el terminal positivo al negativo, la energía potencial de la carga disminuye en $Q\,\Delta V = (1\ \text{C})(12\ \text{V}) = 12\ \text{J}$.

En la ecuación 23.2, se observa que las dimensiones del potencial son también las mismas que las del campo eléctrico multiplicado por la distancia. Así pues, la unidad de campo eléctrico es igual un volt por metro:

$$1\ \text{N/C} = 1\ \text{V/m} \qquad 23.5$$

de modo que podemos interpretar la intensidad del campo eléctrico como una fuerza por unidad de carga o como la velocidad a la que cambia V respecto a la distancia. En física atómica y nuclear, se trata frecuentemente con partículas elementales que poseen cargas cuyo valor absoluto es e, tales como electrones y protones que se mueven a través de diferencias de potencial de miles o incluso millones de volts. Como la energía tiene dimensiones del producto de carga eléctrica por potencial eléctrico, una unidad de energía que resulta útil es el producto de la unidad de carga fundamental e por un volt. Esta unidad se llama **electronvolt** (eV). En física atómica y molecular, las energías son generalmente de unos cuantos eV, de modo que el electronvolt es una unidad de magnitud adecuada para describir procesos atómicos y moleculares. La conversión de electronvolts en joules se obtiene expresando la carga electrónica en coulombs:

$$1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}\cdot\text{V} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J} \qquad 23.6$$

ELECTRONVOLT

Por ejemplo, un electrón que se desplaza del terminal negativo al positivo de una batería de 12 V, pierde 12 eV de energía potencial.

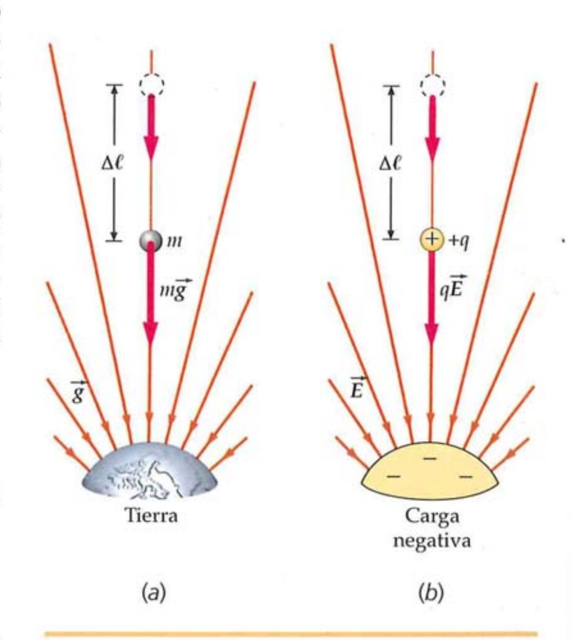


FIGURA 23.1 (*a*) El trabajo realizado por el campo gravitatorio $\vec{g}$ sobre una masa disminuye su energía potencial gravitatoria. (*b*) El trabajo realizado por el campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga positiva $+q$ es igual a su pérdida de energía potencial electrostática.

POTENCIAL Y LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

Si situamos una carga testigo positiva q_0 en un campo eléctrico $\vec{E}$ y la dejamos en libertad, se acelerará en la dirección de $\vec{E}$ a lo largo de la línea del campo. La energía cinética de la carga se incrementará y su energía potencial disminuirá. Así, la carga se mueve hacia una región de menor energía potencial del mismo modo que un cuerpo masivo cae hacia una región de menor energía potencial gravitatoria (figura 23.1). La energía potencial eléctrica U se rela-

ciona con el potencial eléctrico V mediante la expresión $U = qV$, de tal forma que *para una carga positiva*, la región del espacio en la que existe menor energía potencial es también la región en la que existe menor potencial eléctrico. En resumen, una carga positiva se acelera en la dirección de $\vec{E}$ (figura 23.2) y se dirige a zonas de más bajo potencial eléctrico. Entonces, concluimos que

> Las líneas del campo eléctrico $\vec{E}$ señalan en la dirección en la que el potencial eléctrico disminuye más rápidamente.

FIGURA 23.2 Las líneas del campo eléctrico apuntan en la dirección en la que el potencial decrece más rápidamente. Cuando una carga testigo positiva q_0 se sitúa en un campo eléctrico, acelera en la dirección del campo. Si parte del reposo, su energía cinética crece y su energía potencial disminuye.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.1
Si se coloca una carga negativa en un campo eléctrico, ¿la aceleración de dicha carga será en la dirección de aumentar o disminuir el potencial?

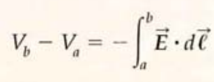
Ejemplo 23.1 Cálculo de V para $\vec{E}$ constante

Un campo eléctrico apunta en la dirección x positiva siendo su módulo constante, $E = 10\ \text{N/C} = 10\ \text{V/m}$. Determinar el potencial en función de x, suponiendo que $V = 0$ para $x = 0$.

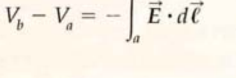
PLANTEAMIENTO Se puede solucionar V usando $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ (ecuación 23.2*b*). Sea a un punto del plano $x = 0$ (en el que $V = 0$) y b otro punto arbitrario. Expresar $\vec{E}$ y $d\vec{\ell}$ en coordenadas cartesianas y calcular la integral.

SOLUCIÓN

1. La diferencia de potencial se relaciona con el campo eléctrico mediante la expresión 23.2*b*:



$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$



2. Dibujar los puntos a y b junto con los ejes de coordenadas x, y y z. Además, dibujar un camino de integración desde a hasta b (figura 23.3):

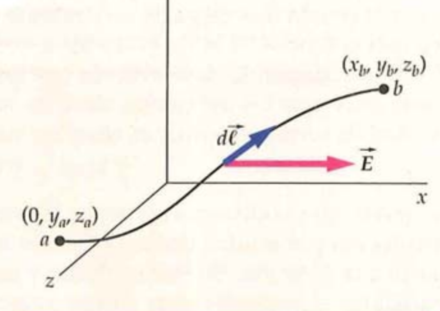


FIGURA 23.3

3. Expresar $\vec{E}$ y $d\vec{\ell}$ en coordenadas cartesianas y simplificar la expresión $\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$:

$$\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\hat{i}\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}) = E\,dx$$

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 1. Sea a un punto del plano $x = 0$ en el que $V = 0$:

$$V_b - V_a = -\int_{x_a}^{x_b} E\,dx$$

5. Como el punto a es cualquiera del plano $x = 0$, $V_a = 0$ y $x_a = 0$. Además, E es uniforme, de tal forma que se puede factorizar la integral:

$$V_b - 0 = -E\int_0^{x_b} dx \quad \text{por tanto,} \quad V_b = -Ex_b$$

6. Reemplazar x_b por x y V_b por $V(x)$, y sustituir E por su valor, 10 V/m:

$$V(x) = -Ex = \boxed{-(10\ \text{V/m})x}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 6 es igual a 0 si $x = 0$, lo cual concuerda con el hecho asumido de que $V = 0$ en $x = 0$.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.2 Repetir este ejemplo para el campo eléctrico $\vec{E} = (10\ \text{V/m}^2)x\hat{i}$.

En el ejemplo 23.1, el punto a donde se especifica que el potencial es cero, se denomina **punto de referencia** para el potencial. El potencial en el punto b se obtiene calculando $V - 0 = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, donde el potencial en a se toma como origen y por tanto vale cero por construcción. La integral se resuelve desde a hasta b.

Ahora demostraremos cómo se debe calcular el potencial para diferentes distribuciones de carga.

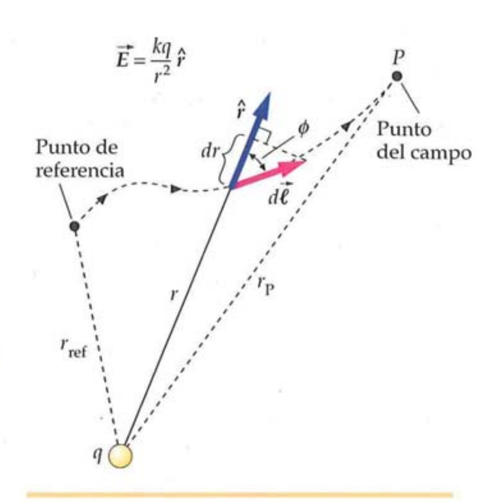


FIGURA 23.4 El cambio de r es dr. Es la componente de $d\vec{\ell}$ en la dirección del vector unitario $\hat{r}$. Observando la figura, podemos ver que $|d\vec{\ell}|\cos\phi = dr$. Dado que $\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = |d\vec{\ell}|\cos\phi$, tenemos que $dr = \hat{r} \cdot d\vec{\ell}$.

23.2 POTENCIAL DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

El potencial eléctrico a una distancia r de una carga puntual q situada en el origen puede calcularse a partir de la ecuación 23.2b, $V_P - V_{ref} = -\int_{ref}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, donde el punto de referencia tiene un potencial V_{ref} y P es el punto arbitrario en el que se calcula el potencial (figura 23.4). El campo eléctrico debido a una carga puntual es

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

Sustituyendo la expresión de $\vec{E}$ en la integral, se obtiene

$$V_P - V_{ref} = -\int_{ref}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{ref}^{P} \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{r_{ref}}^{r_P} \frac{kq}{r^2}\,dr$$

donde $dr = \hat{r} \cdot d\vec{\ell}$ (ver figura 23.4) es el módulo del desplazamiento $d\vec{\ell}$. Poniendo V_{ref} igual a cero e integrando a lo largo del camino desde un punto arbitrario de referencia a un punto de campo también arbitrario, se tiene



Véase el Apéndice de matemáticas para más información sobre Integrales

$$V_P - 0 = -\int_{ref}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -kq\int_{r_{ref}}^{r_P} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{kq}{r_P} - \frac{kq}{r_{ref}}$$

o

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}} \qquad 23.7$$

POTENCIAL DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

donde hemos reemplazado r_P, que es la distancia desde el origen al punto donde consideramos el potencial, por r. Como el punto de referencia es arbitrario, podemos elegir aquel que nos proporcione la expresión algebraica más sencilla. Tomando como punto de referencia el más lejano a la carga puntual ($r_{ref} \to \infty$), tenemos

$$V = \frac{kq}{r} \qquad 23.8$$

POTENCIAL DE COULOMB

El potencial dado por la ecuación 23.8 se denomina **potencial de Coulomb**. Es positivo o negativo según el signo de la carga q.

La energía potencial U de una carga testigo q' situada a una distancia r de la carga puntual q es

$$U = q'V = q'\frac{kq}{r} = \frac{kq'q}{r} \qquad 23.9$$

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA DE UN SISTEMA DE DOS CARGAS

Esta es la energía potencial electrostática del sistema de dos cargas cuando consideramos la condición de que $U = 0$ a distancia infinita. Si dejamos libre una carga testigo que esté previamente en reposo a una distancia r de q (y mantenemos q fija en el origen), dicha carga se acelerará alejándose (suponiendo que q tiene el mismo signo que q'). A muy grandes distancias de q, la energía potencial de la partícula q' se aproxima a cero, de tal forma que la energía cinética se aproxima a kqq'/r_0.

Alternativamente, el trabajo que debemos hacer en contra del campo eléctrico para llevar una carga testigo q_0 desde una gran distancia hasta la distancia r de q es kq_0q/r (figura 23.5). El trabajo por unidad de carga es kq/r, que es el potencial en el punto P referido al potencial cero del infinito.

En el capítulo 11, se consideró que la energía potencial gravitatoria de dos masas puntuales separadas una distancia infinita es cero. De forma equivalente, consideramos que la energía potencial electrostática de dos cargas puntuales es nula si es infinita la distancia entre ellas. Esto se puede expresar diciendo que dos cargas (o dos masas) son no interaccionantes entre sí si las separa una distancia infinita, es decir, si la energía potencial de un sistema de dos partículas es cero, decimos que éstas no interaccionan.

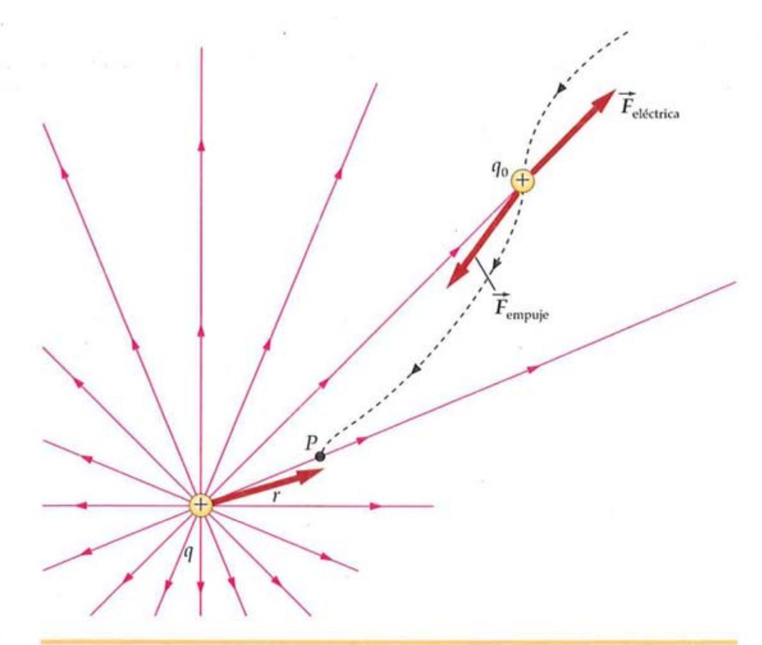


FIGURA 23.5 El trabajo necesario para llevar una carga testigo q_0 desde el infinito hasta el punto P situado a una distancia r de una carga q es kq_0q/r. El trabajo por unidad de carga es kq/r, que es el potencial eléctrico en el punto P respecto a un potencial cero en el infinito. Si la carga testigo se libera desde el punto P, el campo eléctrico realiza el trabajo kq_0q/r sobre la carga cuando ésta se mueve hasta el infinito.

Ejemplo 23.2 Energía potencial del átomo de hidrógeno

(*a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico a una distancia $r = 0{,}529 \times 10^{-10}$ m de un protón? (Ésta es la distancia media entre el protón y el electrón del átomo de hidrógeno.) (*b*) ¿Cuál es la energía potencial del electrón y el protón a esta distancia?

PLANTEAMIENTO El potencial eléctrico debido a la carga de un protón es el de una carga puntual dado en la ecuación 23.8 y la energía potencial de dos cargas viene dada en la ecuación 23.9.

SOLUCIÓN

(*a*) Utilizar $V = kq/r$ para calcular el potencial V debido al protón en $r = r_0$. Para un protón, $q = e$:

$$V = \frac{kq}{r_0} = \frac{ke}{r_0} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})}{0{,}529 \times 10^{-10}\ \text{m}}$$

$$= 27{,}2\ \text{N}\cdot\text{m/C} = \boxed{27{,}2\ \text{V}}$$

(*b*) Utilizar $U = q'V$, siendo $q' = -e$ para calcular la energía potencial electrostática:

$$U = q'V = (-e)(27{,}2\ \text{V}) = \boxed{-27{,}2\ \text{eV}}$$

COMPROBACIÓN Examinando las unidades de la ecuación $V = kq/r$, se tiene que son unidades de trabajo dividido por carga, N · m/C. Dado que 1 N · m = 1 J y 1 J/C = 1 V, se tiene que 1 N · m/C = 1 J/C = 1 V.

OBSERVACIÓN Si el electrón estuviera en reposo a esta distancia del protón, serían necesarios 27,2 eV como mínimo para separarle del átomo. Sin embargo, el electrón posee una energía cinética de 13,6 eV, de modo que su energía total en el átomo es 13,6 eV − 27,2 eV = −13,6 eV. Por consiguiente, la energía necesaria para extraer el electrón del átomo es 13,6 eV. Esta energía se llama *energía de ionización*.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.3 ¿Cuál es la energía potencial de las dos cargas puntuales del ejemplo 23.2 en unidades del sistema internacional?

Ejemplo 23.3 Energía potencial de los productos de la fisión nuclear

En la fisión nuclear, un núcleo de uranio-235 captura un neutrón para formar un núcleo inestable de uranio-236. El núcleo de uranio inestable se rompe y se forman dos núcleos más ligeros (figura 23.6) y, además, en la reacción dos o tres neutrones salen a gran velocidad. A veces, los dos productos de la fisión son un núcleo de bario (carga 56*e*) y un núcleo de kriptón (carga 36*e*). Suponer que en el instante en el que la fisión tiene lugar estos núcleos son cargas puntuales positivas separadas una distancia $r = 14{,}6 \times 10^{-15}$ m. Calcular la energía potencial de este sistema de dos cargas en electronvolts.

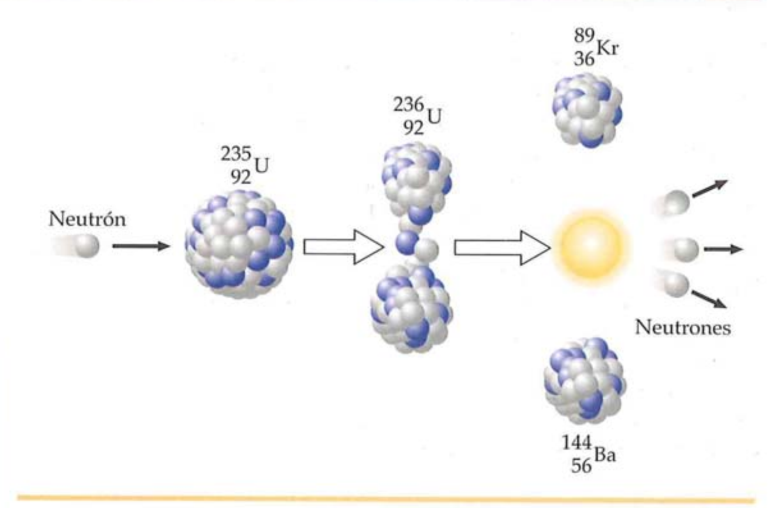


FIGURA 23.6 Cuando un núcleo de uranio-235 absorbe un neutrón, se produce su fisión en un átomo de bario y otro de kriptón.

PLANTEAMIENTO La energía potencial de dos cargas puntuales separadas una distancia r es $U = kq_1q_2/r$. Para determinar esta energía en electronvolts, calculamos el potencial debido a una de las cargas kq_1/r en volts y multiplicamos por la otra carga expresada en múltiplos de e.

SOLUCIÓN

1. La ecuación 23.9 nos da la energía potencial de las dos cargas:

$$U = q_2\frac{kq_1}{r}$$

2. Se saca el factor común e y se sustituyen los valores conocidos:

$$U = e\frac{36 \cdot 56ke}{r}$$

$$= e\frac{36 \cdot 56 \cdot (8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{14{,}6 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}}$$

$$= e(199 \times 10^6\ \mathrm{V}) = \boxed{199\ \mathrm{MeV}}$$

COMPROBACIÓN La energía potencial de un protón y un electrón en un átomo de hidrógeno, calculada en el ejemplo 23.2, es siete órdenes de magnitud menor que la energía potencial calculada en este ejemplo. Este resultado coincide con lo esperado, ya que las energías en los procesos nucleares son mucho mayores que las energías en los procesos atómicos.

OBSERVACIÓN Como distancia de separación r se ha escogido la suma de los radios de los dos núcleos. Después de la fisión, los dos núcleos se separan por repulsión electrostática. Su energía potencial original de 199 MeV se convierte en energía cinética y, al colisionar con los átomos de los alrededores, en energía térmica. En el proceso de fisión, se liberan dos o tres neutrones. En una reacción en cadena, uno o más de estos neutrones producen la fisión de otros núcleos de uranio. La energía media desprendida en las reacciones en cadena de este tipo es del orden de 200 MeV por núcleo, como la calculada en este ejemplo.

El potencial en un punto debido a diversas cargas puntuales es igual a la suma de los potenciales debidos a cada carga por separado. (Ésta es una consecuencia del principio de superposición del campo eléctrico.) El potencial debido a un sistema de cargas puntuales q_i será, por lo tanto,

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} \qquad 23.10$$

POTENCIAL DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

donde la suma debe extenderse a todas las cargas y r_i es la distancia desde la carga i al punto P donde deseamos calcular el potencial. Usando esta fórmula, el punto de referencia para el potencial (donde $V = 0$) es el infinito y la distancia entre dos cargas puntuales cualesquiera en el sistema es finita.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Calculando V usando la ecuación 23.10

PLANTEAMIENTO Se puede usar la ecuación 23.10 para calcular el potencial en un punto genérico para cualquier conjunto de cargas puntuales si entre dos cargas cualesquiera del sistema hay una distancia finita.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la configuración de cargas e incluir ejes de coordenadas adecuados. Poner un subíndice a cada carga. Dibujar una línea recta entre cada carga y el punto campo, poniendo subíndices correspondientes a las distancias entre las diferentes cargas y el punto campo, por ejemplo r_{iP}. Un dibujo hecho con cuidado puede ser de mucha ayuda para resolver el problema.
2. Usar la fórmula $V = \Sigma\, kq_i/r_{iP}$ (ecuación 23.10) para calcular el potencial en P debido a las cargas puntuales.

COMPROBACIÓN El punto donde se debe calcular el potencial se elige arbitrariamente, y el límite del potencial tiende forzosamente a cero cuando este punto campo tiende a infinito. Por ello, conviene elegir el infinito como referencia de potenciales.

Ejemplo 23.4 Potencial debido a dos cargas puntuales

Dos cargas puntuales de $+5$ nC se encuentran sobre el eje x. Una está en el origen y la otra en $x = 8$ cm. Determinar el potencial (*a*) en el punto P_1 situado sobre el eje x en $x = 4$ cm y (*b*) en el punto P_2 situado sobre el eje y en $y = 6$ cm. El punto de referencia en el que $V = 0$ es el infinito.

PLANTEAMIENTO Las dos cargas puntuales positivas situadas sobre el eje x se muestran en la figura 23.7 y el potencial debe determinarse en los puntos P_1 y P_2.

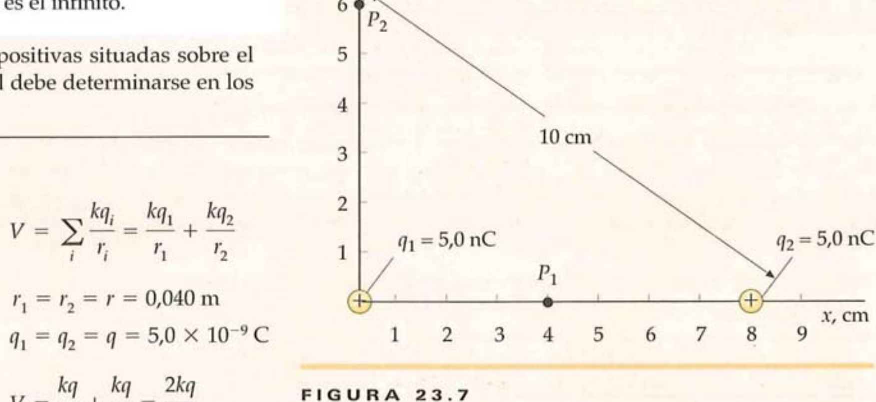


FIGURA 23.7

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Utilizar la ecuación 23.10 para expresar V en función de las distancias r_1 y r_2 a las cargas:

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}$$

2. El punto P_1 se encuentra a 4 cm de cada carga y las dos cargas son iguales:

$$r_1 = r_2 = r = 0{,}040 \text{ m}$$
$$q_1 = q_2 = q = 5{,}0 \times 10^{-9} \text{ C}$$

3. Utilizar estos valores para determinar el potencial en el punto P_1:

$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = \frac{2kq}{r}$$
$$= \frac{2 \times (8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5{,}0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0{,}040 \text{ m}} = 2247 \text{ V} = \boxed{2{,}2 \text{ kV}}$$

(*b*) El punto P_2 se encuentra a 6 cm de una carga y a 10 cm de la otra. Utilizar estos valores para determinar el potencial en el punto P_2:

$$V = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5{,}0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0{,}060 \text{ m}} + \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5{,}0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0{,}10 \text{ m}}$$
$$= 749 \text{ V} + 450 \text{ V} = \boxed{1{,}2 \text{ kV}}$$

COMPROBACIÓN Los potenciales calculados son ambos positivos. El potencial en un punto dado es el trabajo por unidad de carga para llevar un carga testigo desde el infinito, donde el potencial es cero, y, por lo tanto, es el punto de referencia, hasta el punto campo. Una carga testigo positiva será repelida tanto por la q_1 como por la q_2. Entonces, una fuerza externa debería realizar el trabajo para llevar la carga testigo positiva desde el infinito hasta el punto donde se calcula el campo. Por consiguiente, lo esperado es que el potencial en este punto campo sea positivo.

OBSERVACIÓN En (*a*), el campo eléctrico es cero en el punto medio entre las cargas, pero el potencial no es nulo. Se necesita trabajo para transportar una carga testigo a este punto desde una larga distancia, ya que el campo eléctrico sólo es cero en la posición final.

Ejemplo 23.5 Potencial a lo largo del eje *x*

Una carga puntual q_1 está situada en el origen y una segunda carga puntual q_2 está situada sobre el eje x en $x = a$, como indica la figura 23.8. Usando la ecuación 23.10, determinar el potencial en cualquier punto del eje x, en función de x.

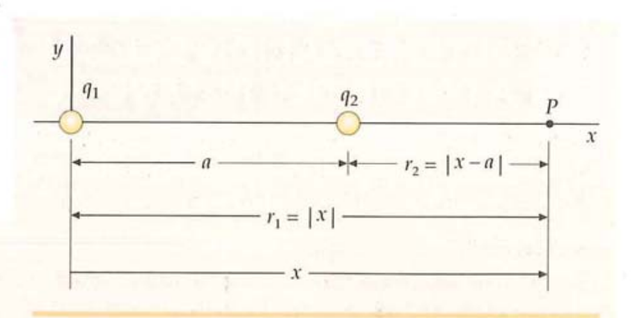


FIGURA 23.8

PLANTEAMIENTO El potencial total es la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas por separado.



SOLUCIÓN

1. Dibujar el eje x y poner dos cargas en él. Sea r_1 la distancia desde q_1 a un punto arbitrario P en la posición en el eje x, es decir, $r_1 = |x|$. Sea r_2 la distancia desde q_2 al punto arbitrario P en el eje x, es decir $r_2 = |x - a|$ (figura 23.8):

2. Escribir el potencial como una función de las distancias a las dos cargas:

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}$$

$$= \boxed{\frac{kq_1}{|x|} + \frac{kq_2}{|x - a|} \qquad x \neq 0, \quad x \neq a}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que $V \to \infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to a$, y $V \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN La figura 23.9 muestra V en función de x para $q_1 = q_2 > 0$.

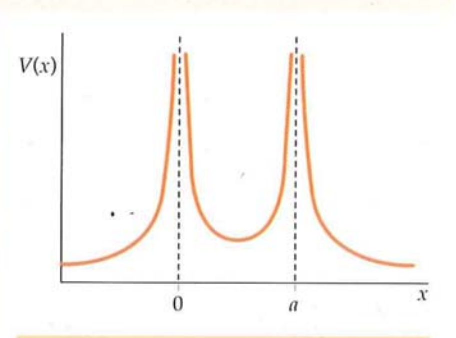


FIGURA 23.9

Ejemplo 23.6 Potencial debido a un dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico consta de una carga positiva $+q$ colocada sobre el eje x en $x = +\ell/2$ y una carga negativa $-q$ colocada sobre el eje x en $x = -\ell/2$. Determinar el potencial en el eje x a una gran distancia del dipolo $x \gg +\ell/2$ en función del momento dipolar $\vec{p} = q\ell\hat{i}$.

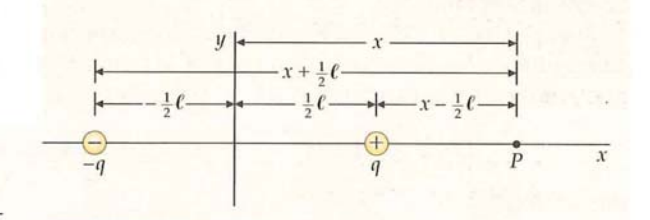


FIGURA 23.10

PLANTEAMIENTO El potencial es la suma de los potenciales de cada carga por separado.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el eje x y poner las dos cargas en él. Para $x > \ell/2$, la distancia del punto campo a la carga positiva es $x - \frac{1}{2}\ell$ y a la carga negativa $x + \frac{1}{2}\ell$ (figura 23.10).

2. Para $x > \ell/2$, el potencial debido a las dos cargas es:

$$V = \frac{kq}{x - (\ell/2)} + \frac{k(-q)}{x + (\ell/2)}$$

$$= \frac{kq\ell}{x^2 - (\ell^2/4)} \qquad x > \frac{\ell}{2}$$

3. El módulo de $\vec{p}$ es $p = q\ell$. Para $x \gg \ell/2$, se puede despreciar en el denominador $\ell^2/4$ comparado con x^2:

$$V \approx \boxed{\frac{kq\ell}{x^2} = \frac{kp}{x^2} \qquad x \gg \ell}$$

COMPROBACIÓN Un dipolo tiene carga total nula; en consecuencia, es de esperar que la variación del potencial con la distancia deberá decrecer más rápidamente que en el caso de un sistema con carga neta diferente de cero. En el resultado del paso 3, el potencial varía de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Lejos de una configuración de cargas con carga neta no nula, el potencial varía de forma inversamente proporcional a la distancia, lo que implica un decrecimiento menos rápido que el que supone el cuadrado de la distancia.

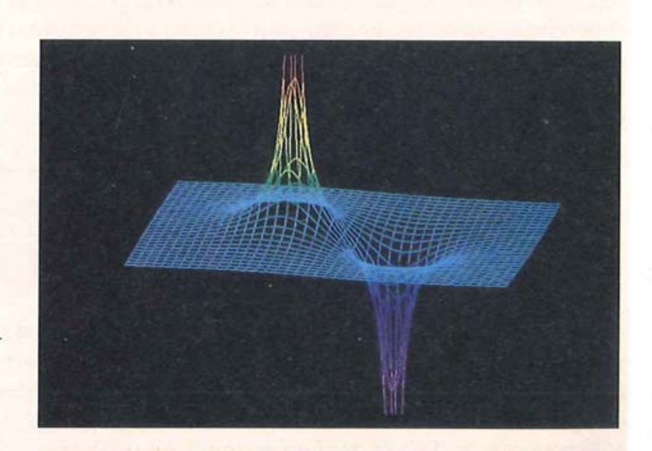


Imagen del potencial electrostático en el plano de un dipolo eléctrico. El potencial debido a cada carga es proporcional a la carga e inversamente proporcional a la distancia. *(© 1990 Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

23.3 DETERMINACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL

En la sección 23.2, se calcula la función potencial por medio del campo eléctrico. Para hacer este cálculo, se integra en ambos lados de la igualdad $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$. En esta sección, a partir del potencial y usando la misma ecuación ($dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$) obtendremos el campo eléctrico.

Considerar un pequeño desplazamiento $d\vec{\ell}$ en un campo electrostático arbitrario $\vec{E}$. La variación del potencial eléctrico viene dado por $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$. Si el desplazamiento $d\vec{\ell}$ es perpendicular a $\vec{E}$, entonces $dV = 0$ (el potencial no cambia). Para un determinado valor de $|d\vec{\ell}|$, el máximo crecimiento en V se produce cuando el desplazamiento $d\vec{\ell}$ es en el sentido opuesto (igual dirección) a $\vec{E}$. Para obtener $\vec{E}$, primero deducimos la componente $\vec{E}$ en la dirección de $d\vec{\ell}$. Esto es,

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -E\cos\theta\, d\ell = E_{\tan} d\ell \qquad 23.11$$

donde $E_{\tan} = E\cos\theta$ (la componente tangencial de $\vec{E}$) es la componente de $\vec{E}$ en la dirección de $d\vec{\ell}$. Por lo tanto, se tiene

$$E_{\tan} = -\frac{dV}{d\ell} \qquad 23.12$$

Si el desplazamiento $d\vec{\ell}$ es perpendicular al campo eléctrico, $dV = 0$ (el potencial no varía). Para un $d\vec{\ell}$ dado, el mayor incremento de V se produce cuando el desplazamiento $d\vec{\ell}$ está dirigido a lo largo de $-\vec{E}$. Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuyo módulo es igual a la derivada de la función con respecto a la distancia en dicha dirección, se denomina **gradiente** de la función. El campo eléctrico $\vec{E}$ es opuesto al gradiente del potencial V. Las líneas de campo señalan en la dirección de máxima disminución de la función potencial.

Si el potencial V depende sólo de x, no habrá cambios de V para los desplazamientos en las direcciones y o z y, por lo tanto, E_y y E_z son nulos. Para un desplazamiento en la dirección x, $d\vec{\ell} = dx\hat{i}$, y la ecuación 23.11 se convierte en

$$dV(x) = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\vec{E}\cdot dx\hat{i} = -(\vec{E}\cdot\hat{i})\,dx = -E_x\,dx$$

Por lo tanto,

$$E_x = -\frac{dV(x)}{dx} \qquad 23.13$$

De un modo semejante, para una distribución de carga esféricamente simétrica, el potencial puede ser una función exclusiva de la distancia radial r. Los desplazamientos perpendiculares a la dirección radial no producen cambio en $V(r)$ y, por lo tanto, el campo eléctrico debe ser radial. Un desplazamiento en la dirección radial se expresa en la forma $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$. Por lo tanto, la ecuación 23.11 será

$$dV(r) = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\vec{E}\cdot dr\hat{r} = -E_r\,dr$$

y

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr} \qquad 23.14$$

Si conocemos el potencial o el campo eléctrico en una región del espacio, podemos utilizar una de estas magnitudes para calcular la otra. Con frecuencia es más fácil calcular el potencial, porque se trata de una función escalar, mientras que el campo eléctrico es una función vectorial. Obsérvese que no es posible calcular $\vec{E}$ si sólo conocemos el valor de V en un punto; es necesario conocer V en una región del espacio para calcular $\vec{E}$ en los puntos de aquella región. Si sólo conocemos V en una curva o una superficie, sólo podremos conocer la componente del campo eléctrico tangente a la curva o la superficie.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 23.1

¿En qué dirección nos podemos mover sin que el potencial eléctrico cambie?



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 23.2

¿En qué dirección paralela al campo eléctrico nos tenemos que mover para que la variación del potencial eléctrico sea máxima?

Ejemplo 23.7 Campo $\vec{E}$ para un potencial que depende de x

Determinar el campo eléctrico partiendo de la función potencial eléctrico V que viene dada por $V = 100\text{ V} - (25\text{ V/m})x$.

PLANTEAMIENTO Esta función potencial depende sólo de x. El campo eléctrico resulta aplicando la ecuación 23.13.

SOLUCIÓN

El campo eléctrico se calcula partir de la expresión $E_x = -dV/dx$ (ecuación 23.13) usando $V = 100\text{ V} - (25\text{ V/m})x$:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \text{ y } E_y = E_z = 0 \quad \text{por tanto,} \quad \vec{E} = \boxed{+(25\text{ V/m})\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN El potencial decrece al aumentar x. Obsérvese que el campo eléctrico está en la dirección x, que es la dirección en la que decrece el potencial, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN Este campo eléctrico es uniforme y tiene la dirección x. Obsérvese que la constante de 100 V en la expresión de $V(x)$ no tiene efecto alguno sobre el campo eléctrico. El campo eléctrico no depende de la elección del cero para la función potencial.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.4 (*a*) ¿En qué punto es $V = 0$ en este ejemplo? (*b*) Escribir la función potencial correspondiente al mismo campo eléctrico de modo que $V = 0$ en $x = 0$.

RELACIÓN GENERAL ENTRE $\vec{E}$ Y V

En notación vectorial, el gradiente de V se escribe $\overrightarrow{grad}V$ o $\vec{\nabla}V$. Por lo tanto,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad 23.15$$

En general, la función potencial puede depender de x, y y z. Las componentes cartesianas del campo eléctrico están relacionadas con las derivadas parciales del potencial respecto a x, y o z, mientras que las otras variables se mantienen constantes. Por ejemplo, la componente x del campo eléctrico viene dada por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad 23.16a$$

De igual modo, las componentes y y z del campo eléctrico están relacionadas con el potencial por

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad 23.16b$$

y

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad 23.16c$$

Así, la ecuación 23.15 en coordenadas cartesianas es

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad 23.17$$

23.4 CÁLCULO DE V PARA DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

El potencial debido a una distribución continua de carga puede calcularse eligiendo un elemento de carga dq que puede considerarse como una carga puntual, y tomando en consideración el principio de superposición, el potencial debido a la distribución se obtiene convirtiendo el sumatorio de la ecuación 23.10 en la siguiente integral:

$$V = \int \frac{k\,dq}{r} \qquad 23.18$$

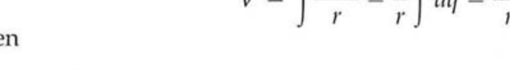
POTENCIAL DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA CONTINUA

Esta ecuación supone que $V = 0$ a una distancia infinita de las cargas y, por lo tanto, no puede utilizarse cuando la carga se encuentra en el infinito, como ocurre en el caso de las distribuciones artificiales de carga, tales como una carga lineal infinita o un plano de carga infinito.

POTENCIAL *V* EN EL EJE DE UN ANILLO CARGADO

Consideremos un anillo uniformemente cargado de radio a y carga Q, como indica la figura 23.11. Sea dq un elemento de carga del anillo. La distancia desde este elemento de carga al punto del campo P situado sobre el eje del anillo es $r = \sqrt{z^2 + a^2}$. Como esta distancia es la misma para todos los elementos de carga del anillo, puede sacarse fuera de la integral en la ecuación 23.18. El potencial en el punto P debido al anillo es, por tanto,

FIGURA 23.11 Geometría para el cálculo del potencial eléctrico en un punto situado en el eje de un anillo de radio a uniformemente cargado.



$$V = \int \frac{k\,dq}{r} = \frac{k}{r}\int dq = \frac{kQ}{r}$$

o bien

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{z^2 + a^2}} \qquad 23.19$$

POTENCIAL EN EL EJE DE UN ANILLO UNIFORMEMENTE CARGADO

Obsérvese que cuando $|z|$ es mucho mayor que a, el potencial se aproxima a $kQ/|z|$, es decir, el mismo valor que el correspondiente a una carga puntual Q situada en el origen.

Ejemplo 23.8 Un anillo cargado y una partícula — *Inténtelo usted mismo*

Un anillo de radio 4 cm está situado en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El anillo posee una carga uniforme de 8 nC. Una pequeña partícula de masa $m = 6$ mg $= 6 \times 10^{-6}$ kg y carga $q_0 = 5$ nC se sitúa en $z = 3$ cm y se deja en libertad. Hallar la velocidad de la carga cuando se encuentra a gran distancia del anillo. Suponer que los efectos de la gravedad son despreciables.

PLANTEAMIENTO La partícula es repelida por el anillo. Cuando la partícula se mueve a lo largo del eje z, su energía potencial disminuye y su energía cinética aumenta. Utilizar el principio de conservación de la energía para determinar la energía cinética de la partícula cuando se encuentra lejos del anillo. La velocidad final se determina a partir de la energía cinética final.

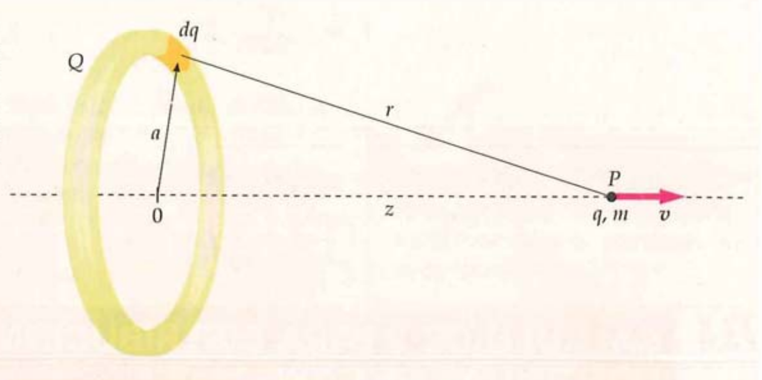
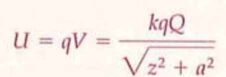


FIGURA 23.12

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
1. Dibujar el anillo, la partícula y el eje z. Poner índices apropiados a los componentes del dibujo.	
2. Escribir la energía cinética en función de la velocidad.	$K = \frac{1}{2}mv^2$
3. Utilizar $U = qV$, con el valor de V dado por $V = kQ/\sqrt{z^2 + a^2}$ (ecuación 23.19), para calcular la energía potencial de la carga puntual q_0 en función de la distancia z desde el centro del anillo.	 $U = qV = \frac{kqQ}{\sqrt{z^2 + a^2}}$

4. Utilizar el principio de conservación de la energía para relacionar la velocidad de la partícula con su posición z respecto al centro del anillo, y obtener la velocidad cuando z tiende a infinito.

$$U_f + K_f = U_i + K_i$$

$$\frac{kqQ}{\sqrt{z_f^2 + a^2}} + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{kqQ}{\sqrt{z_i^2 + a^2}} + \frac{1}{2}mv_i^2$$

de modo que $v_f^2 = \dfrac{2kqQ}{m\sqrt{z_i^2 + a^2}} = 2{,}40\ \mathrm{m^2/s^2}$

$$v_f = \boxed{1{,}6\ \mathrm{m/s}}$$

COMPROBACIÓN En el paso 4, calculamos que $v_f^2 = 2{,}40\ \mathrm{m^2/s^2}$, la cual es una cantidad positiva. Si el resultado de v_f^2 fuera una cantidad negativa implicaría que se habría cometido un error.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.5 ¿Cuál es la energía potencial de la partícula cuando se encuentra a la distancia $z = 9$ cm?

POTENCIAL *V* EN EL EJE DE UN DISCO UNIFORMEMENTE CARGADO

Utilizaremos ahora el resultado obtenido para el potencial generado en el eje de un anillo cargado para calcular el potencial existente en el eje de un disco uniformemente cargado.

Ejemplo 23.9 Potencial *V* para un disco cargado

Determinar el potencial existente en el eje de un disco de radio R que posee una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie.

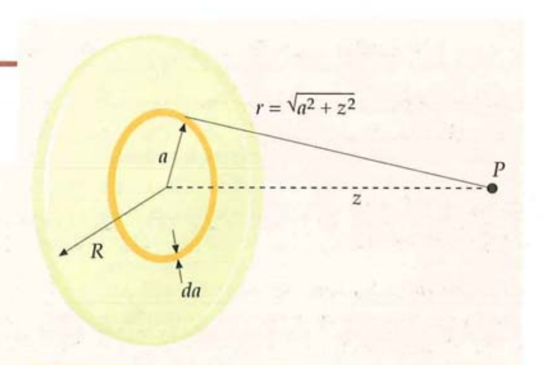


FIGURA 23.13

PLANTEAMIENTO Tomaremos el eje del disco como eje z y consideraremos el disco como una serie concéntrica de anillos cargados. La figura 23.13 muestra uno de estos anillos de radio a y anchura da. El área de este anillo es $2\pi a\,da$ y su carga es $dq = \sigma\,dA = \sigma 2\pi a\,da$, donde $\sigma = Q/(\pi R^2)$ es la densidad superficial de carga. El potencial en un punto P del eje x debido a este elemento anular de carga viene dado por la ecuación 23.19. Integrando de $a = 0$ a $a = R$ determinaremos el potencial debido al disco.

SOLUCIÓN

1. Expresar el potencial dV que genera el anillo cargado de radio a en el punto P:

$$dV = \frac{k\,dq}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{k\sigma 2\pi a\,da}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

2. Integrar desde $a = 0$ a $a = R$:

$$V = \int_0^R \frac{k\sigma 2\pi a\,da}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = k\sigma\pi \int_0^R (z^2 + a^2)^{-1/2} 2a\,da$$

3. La integral es de la forma $\int u^n\,du$, con $u = z^2 + a^2$, $du = 2a\,da$, y $n = -\frac{1}{2}$. Cuando $a = 0$, $u = z^2 + 0^2$ y cuando $a = R$, $u = z^2 + R^2$:

$$V = k\sigma\pi \int_{z^2+0^2}^{z^2+R^2} u^{-1/2}\,du = k\sigma\pi \left.\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$$= 2k\sigma\pi\left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2}\right)$$

4. Reordenar este resultado para determinar V:

$$V = \boxed{2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1\right)}$$

COMPROBACIÓN Para $|z| \gg R$, la función potencial V debe aproximarse a la de una carga puntual Q situada en el origen, es decir, para valores grandes de $|z|$, $V \approx kQ/|z|$. Para obtener una expresión de nuestro resultado para valores $|z| \gg R$, utilizamos la fórmula del desarrollo del binomio

$$\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} + \cdots$$

Por lo tanto,

$$V = 2\pi k\sigma|z|\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} + \cdots\right) - 1\right] \approx \frac{k(\sigma\pi R^2)}{|z|} = \frac{kQ}{|z|}$$

Según el ejemplo 23.9, el potencial existente sobre el eje de un disco uniformemente cargado es

$$V = 2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1\right) \qquad 23.20$$

POTENCIAL SOBRE EL EJE DE UN DISCO CARGADO

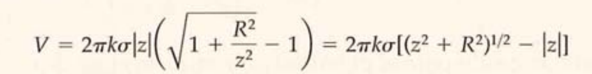
Ejemplo 23.10 Obtención de $\vec{E}$ conocido V

Calcular el campo eléctrico generado en el eje de un disco uniformemente cargado que tiene carga q y radio R a partir de las funciones del potencial obtenidas anteriormente para estas distribuciones de carga dadas en la ecuación 23.20.

PLANTEAMIENTO Podemos obtener E_z mediante $E_z = -dV/dz$ por diferenciación. Como no conocemos la variación de V con y e x, no podemos determinar E_x ni E_y por diferenciación. No obstante, la simetría de la distribución de carga impone que en el eje x, $E_x = E_z = 0$.

SOLUCIÓN

1. Expresar la ecuación 23.20 para el potencial en el eje de un disco cargado uniformemente:



$$V = 2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1\right) = 2\pi k\sigma[(z^2 + R^2)^{1/2} - |z|]$$

2. Calcular $-dV/dz$ para determinar E_z:

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -2\pi k\sigma\left[\frac{1}{2}(z^2 + R^2)^{-1/2}2z - \frac{d|z|}{dz}\right]$$

3. Resolver $d|z|/dz$. En la figura 23.14 se da la gráfica de $|z|$ versus z:*

$$\frac{d|z|}{dz} = \text{signo (z)} = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

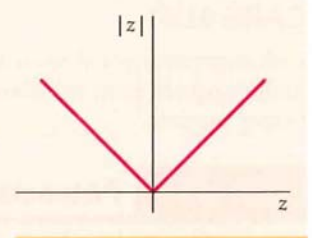


FIGURA 23.14 Representación de $|z|$ versus z.

4. Sustituyendo $d|z|/dz$ en el resultado del paso 2, se obtiene:

$$E_z = -2\pi k\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \text{signo (z)}\right)$$

$$= \boxed{2\pi k\sigma\left(\text{signo (z)} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)}$$

COMPROBACIÓN Extrayendo de la raíz $|z|$ en el resultado del paso 4, se obtiene

$$E_z = -2\pi k\sigma\left(\frac{z}{|z|\sqrt{1 + (a^2/z^2)}} - \text{signo (z)}\right) = \text{signo (z)}\cdot 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a^2/z^2)}}\right)$$

donde se ha usado que $z/|z| = \text{signo (z)}$. Esta expresión para E_z tiene la misma forma que la obtenida en la ecuación 22.9.

OBSERVACIÓN El resultado del paso 3, ($d|z|/dz = \text{signo } z$), define $d|z|/dz$ igual a cero cuando $z = 0$. De igual forma, usando $d|z|/dz = \text{signo } z$ en la comprobación, se define $z/|z|$ igual a cero cuando $z = 0$. Se suele definir el valor de una función en un punto en el que tiene una discontinuidad como el valor medio en una región próxima a la discontinuidad, tal como se ha hecho en los casos de $d|z|/dz$ y $z/|z|$.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.6 Usando la expresión para el potencial V en el eje de un anillo uniformemente cargado de radio R (ecuación 23.20), calcular $-dV/dz$ en el eje y obtener una expresión E_z en el eje. Demostrar que esta expresión tiene la misma forma que la de la ecuación 22.8.

POTENCIAL V DEBIDO A UN PLANO INFINITO DE CARGA

Si R se hace muy grande, nuestro disco se aproxima a un plano infinito. Cuando R se aproxima al infinito, la función potencial $V = 2\pi k\sigma|z|\ (\sqrt{1 + (R^2/z^2)} - 1)$ (ecuación 23.20) se aproxima también a un valor infinito. Sin embargo, obtuvimos

* Ver el apartado Observación al final de este ejemplo.

la ecuación 23.20 a partir de la 23.18, según la cual $V = 0$ en el infinito y, por lo tanto, la ecuación 23.20 no puede utilizarse por haber llegado a una contradicción. La ecuación 23.20 no es válida para un disco uniformemente cargado de radio infinito. Para distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito, debemos elegir $V = 0$ en algún punto finito y no en el infinito. Para estos casos, determinamos en primer lugar el campo eléctrico $\vec{E}$ (por integración directa o mediante la ley de Gauss) y luego calculamos el potencial a partir de su definición, $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$. Si se trata de un plano infinito de carga uniforme de densidad σ situado en el plano yz, el campo eléctrico para valores positivos de x viene dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i} = 2\pi k\sigma\hat{i} \qquad x > 0$$

El incremento de potencial dV para un incremento del desplazamiento $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dy\hat{k}$ es entonces

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -(2\pi k\sigma\hat{i})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = -2\pi k\sigma\, dx \qquad x > 0$$

Integrando ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$V = -2\pi k\sigma x + V_0 \qquad x > 0$$

donde la constante arbitraria V_0 es el potencial en $x = 0$. Obsérvese que el potencial disminuye con la distancia al plano y tiende a $-\infty$ cuando x se aproxima a $+\infty$. Por lo tanto, no podemos escoger un potencial nulo para $x = \infty$.

Para un valor de x negativo, el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -2\pi k\sigma\hat{i} \qquad x > 0$$

de modo que

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = +2\pi k\sigma\, dx \qquad x > 0$$

y el potencial es

$$V = V_0 + 2\pi k\sigma x = V_0 - 2\pi k\sigma|x| \qquad x > 0$$

Como x es negativo, el potencial disminuye de nuevo con la distancia al plano y tiende a $-\infty$ cuando x se aproxima a $-\infty$. Para valores positivos o negativos de x, el potencial se expresa en la forma

$$V = V_0 - 2\pi k\sigma|x| \qquad 23.21$$

POTENCIAL PRÓXIMO A UN PLANO INFINITO DE CARGA

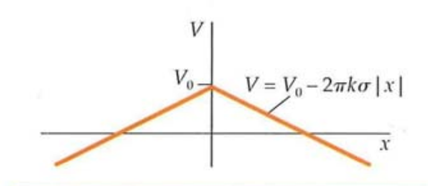


FIGURA 23.15 Representación gráfica de V en función de x para un plano infinito de carga situado en el plano yz. El potencial es continuo en $x = 0$, aunque $E_x = -dV/dx$ no lo sea. El punto de referencia donde $V = V_0$ no es el origen.

Ejemplo 23.11 Plano cargado y carga puntual

Un plano infinito de densidad de carga σ uniforme se encuentra en el plano $x = 0$ y una carga puntual q está colocada sobre el eje x en $x = a$ (figura 23.16). Determinar el potencial en un punto P situado a una distancia r de la carga puntual.

PLANTEAMIENTO Podemos utilizar el principio de superposición. El potencial V total es igual a la suma del potencial debido al plano y el debido a la carga puntual. Debemos incluir una constante arbitraria en nuestra expresión de V, la cual dependerá del punto de referencia elegido como $V = 0$. Podemos escoger libremente el punto de referencia, exceptuando $x = \pm\infty$ y $x = a$ del eje x. En este ejemplo, elegiremos $V = 0$ en el origen.

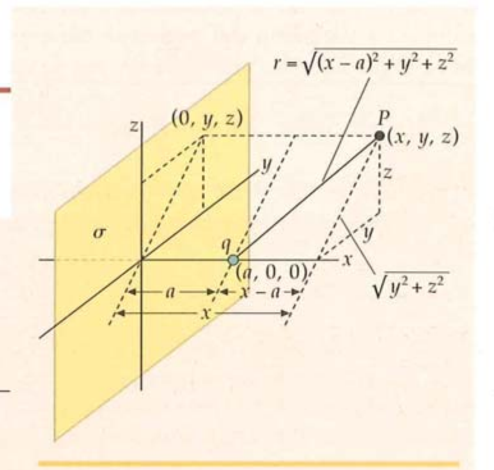


FIGURA 23.16

SOLUCIÓN

1. Dibujar la configuración de carga e incluir los ejes de coordenadas y el punto (x, y, z) donde se calcula el campo:

2. El potencial debido al plano viene dado por la expresión $V_{plano} = V_0 - 2\pi k\sigma|x|$ (ecuación 23.21) y el potencial debido a una carga puntual es $V_{punto} = kq/r - kq/r_{ref}$ (ecuación 23.7), donde r es la distancia desde el punto donde está la carga al punto campo. El potencial total es la suma de ambos:

$$V = V_{plano} + V_{punto} = -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{r} + C$$

donde la constante C ($= V_0 - kq/r_{ref}$) se elige usando la referencia del punto donde el potencial sea cero.

3. La distancia r desde la carga al punto de observación del campo es $\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$:

$$V = -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + C$$

4. Elegimos $V = 0$ en el origen. La condición de que $V = 0$ para $x = y = z = 0$ permite determinar la constante C:

$$0 = 0 + \frac{kq}{a} + C \quad \text{por tanto,} \quad C = -\frac{kq}{a}$$

5. Sustituyendo $C = -kq/a$ en (3), obtenemos:

$$V = -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{kq}{a}$$

$$= \boxed{-2\pi k\sigma|x| + kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 5 es el que cabía esperar superponiendo el potencial de un plano uniformemente cargado y una carga puntual.

OBSERVACIÓN La solución no es única. Se podría haber expresado el potencial con respecto a cualquier otro punto de referencia, exceptuando $x = a$ y $x = \pm\infty$.

POTENCIAL *V* EN EL INTERIOR Y EN EL EXTERIOR DE UNA CORTEZA ESFÉRICA CARGADA

A continuación, determinaremos el potencial debido a una corteza esférica de radio R y carga Q distribuida uniformemente en su superficie. Estamos interesados en hallar el potencial en todos los puntos del interior, del exterior y de la misma corteza. Puesto que, a diferencia del caso del plano infinito cargado, esta distribución de carga es de extensión finita, en principio podríamos calcular el potencial por integración directa de la ecuación 23.18. Sin embargo, hay una manera más sencilla. Como el campo eléctrico para esta distribución de carga se obtiene fácilmente mediante la ley de Gauss, determinaremos el potencial a partir del campo eléctrico conocido, mediante la expresión $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$.

Fuera de la corteza esférica, el campo eléctrico es radial y es el mismo que si toda la carga Q fuera puntual y localizada en el origen:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unidad cuya dirección se define alejándose del centro de la esfera. La variación del potencial correspondiente a un desplazamiento $d\vec{\ell}$ que tiene lugar fuera de la corteza es, por lo tanto,

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQ}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQ}{r^2}dr$$

El producto escalar $\hat{r}\cdot d\vec{\ell}$ es dr (la componente de $d\vec{\ell}$ en la dirección de $\hat{r}$). Integrando a lo largo de cualquier camino desde el punto r_P hasta el infinito, obtenemos

$$V_P = -\int_\infty^{\vec{r}_P}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_\infty^{r_P}\frac{kQ}{r^2}dr = -kQ\int_\infty^{r_P}r^{-2}\,dr = \frac{kQ}{r_P}$$

donde P es un punto de observación del campo cualquiera que pertenece a la región del espacio definida por $r \geq R$, y r_P es la distancia desde el centro de la corteza esférica al punto P. Se toma como potencial de referencia el valor cero de éste en el infinito. Como P es arbitrario, podemos elegir $r_P = r$ y obtenemos

$$V = \frac{kQ}{r} \qquad r \geq R$$

En cualquier punto del volumen encerrado por la corteza esférica, el campo eléctrico es cero. Integrando nuevamente desde el punto de referencia situado en el infinito hasta el punto P, obtenemos

$$V_P = -\int_\infty^{\vec{r}_P}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^{R}\frac{kQ}{r^2}dr - \int_R^{r_P}(0)\,dr = \frac{kQ}{R}$$

donde P es un punto arbitrario situado en la región $r < R$, y r_P es la distancia desde el centro de la corteza al punto P. El potencial dentro de la corteza es kQ/R, siendo R su radio. Dentro de ésta, V es constante, y es igual al trabajo necesario por unidad de carga para transportar una carga de prueba desde el infinito hasta la corteza. No se requiere ningún trabajo adicional para llevar esta carga de prueba desde la corteza hasta cualquier punto del interior del volumen. Por lo tanto, tenemos

$$V = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & (r \geq R) \\ \dfrac{kQ}{R} & (r \leq R) \end{cases} \qquad 23.22$$

POTENCIAL DEBIDO A UNA CORTEZA ESFÉRICA

FIGURA 23.17 Potencial eléctrico de una corteza esférica uniformemente cargada de radio R en función de la distancia r al centro de la corteza. Dentro de ella, el potencial tiene valor constante kQ/R. Fuera de la corteza, el potencial es el mismo que el originado por una carga puntual en el centro de la esfera.

Esta función potencial se representa en la figura 23.17.

Una región en la que el campo eléctrico es cero implica que el potencial es constante en todos sus puntos. Consideremos una corteza esférica con un pequeño orificio, de modo que podemos mover una carga testigo dentro y fuera de la corteza. Si desplazamos la carga testigo desde una distancia infinita hasta la corteza, el trabajo por unidad de carga que debemos realizar es kQ/R. Dentro de la corteza no hay campo eléctrico y, por lo tanto, no es necesario realizar ningún trabajo para mover la carga de prueba en el interior de la corteza. La cantidad total de trabajo por unidad de carga que se necesita para llevar la carga de prueba desde el infinito hasta cualquier punto del interior de la corteza coincide con el trabajo necesario para llevarla hasta la distancia de su radio R, que es kQ/R. Por consiguiente, el potencial es kQ/R en todos los puntos del interior de la corteza.

! Un error bastante extendido es pensar que el potencial deberá ser cero dentro de una corteza esférica porque el campo eléctrico es cero en toda esa región del espacio.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.7

¿Cuál es el potencial de una corteza esférica de radio 10 cm que posee una carga de 6 μC?

Ejemplo 23.12 Potencial *V* generado por una esfera cargada uniformemente

Inténtelo usted mismo

Asumimos que un protón es como una esfera cargada de radio R y carga Q distribuida uniformemente. El campo eléctrico dentro de la esfera viene dado por $E_r = k\dfrac{Q}{R^3}r$ (ecuación 22.18*b*). Determinar el potencial V generado dentro y fuera de la esfera.

PLANTEAMIENTO Fuera de la esfera, la carga se comporta como si fuera puntual, de modo que el potencial es $V = kQ/r$. Dentro de la esfera, V puede determinarse integrando $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$, donde el campo eléctrico en el interior de la esfera viene dado por $\vec{E} = (kQr/R^3)\hat{r}$ (ecuación 22.18*b*).

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Fuera de la esfera, el campo eléctrico es el mismo que el que habría si toda la carga de la esfera estuviera concentrada en su centro. Si se toma el potencial cero en el infinito, la expresión del potencial es la misma que la correspondiente a una carga puntual localizada en el centro de la esfera.	$V(r) = \boxed{\dfrac{kQ}{r} \quad r \geq R}$
2. Para $r \leq R$, determinar dV a partir de $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$, donde el campo eléctrico en el interior de la esfera viene dado por $\vec{E} = (kQr/R^3)\hat{r}$ (ecuación 22.18*b*).	$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\dfrac{kQr}{R^3}\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = -\dfrac{kQr}{R^3}dr$

3. Determinar el potencial calculando la integral definida desde el infinito hasta un punto arbitrario P localizado en el interior de la esfera ($r_P < R$), siendo r_p la distancia respecto de su centro. Para todo ello utilizar la expresión obtenida en el apartado 2.

$$V_P = -\int_{\infty}^{r_P} E_r\, dr = -\int_{\infty}^{R} \frac{kQ}{r^2}\, dr - \int_{R}^{r_P} \frac{kQ}{R^3} r\, dr$$
$$= \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R^3}(r_P^2 - R^2) = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r_P^2}{R^2}\right)$$

4. Como r_P es arbitrario, expresar el resultado en función de $r = r_P$.

$$V(r) = \boxed{\frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad r \leq R}$$

COMPROBACIÓN Sustituyendo $r = R$ en el resultado, se obtiene $V(R) = kQ/R$, como debe ser. Para $r = 0$, $V(0) = 3kQ/2R = 1{,}5\, kQ/R$, que es mayor que $V(R)$, como era de esperar, ya que el campo eléctrico se encuentra en la dirección radial positiva para $r < R$. (Un campo electrostático siempre apunta en la dirección de potenciales decrecientes.)

OBSERVACIÓN La figura 23.18 muestra $V(r)$ en función de (r). Obsérvese que ambos $V(r)$ y $E_r = -dV/dr$ son continuos en todos los puntos.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.8 Determinar el potencial si el punto de referencia donde $V = 0$ está en $r = R$ en lugar de $r = \infty$.

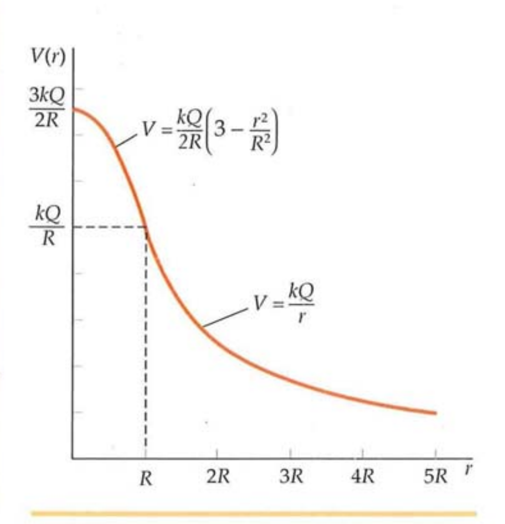


FIGURA 23.18

POTENCIAL V DEBIDO A UNA CARGA LINEAL INFINITA

Calculemos el potencial debido a una distribución de carga lineal infinita y uniforme cuya densidad es λ. Como en el caso del plano infinito, esta distribución no está localizada en una región finita del espacio, y por ello, no podemos calcular el potencial por integración de $dV = kdq/r$ (ecuación 23.18). En su lugar, obtenemos el potencial integrando el campo eléctrico directamente. El campo eléctrico de una carga lineal infinita viene dado por $\vec{E} = (2k\lambda/R)\,\hat{R}$ (equación 22.3), donde λ es la densidad lineal de carga y R la distancia radial desde la línea. La variación del potencial para un desplazamiento arbitrario $d\vec{\ell}$ viene dado por

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}\cdot d\vec{\ell}$$

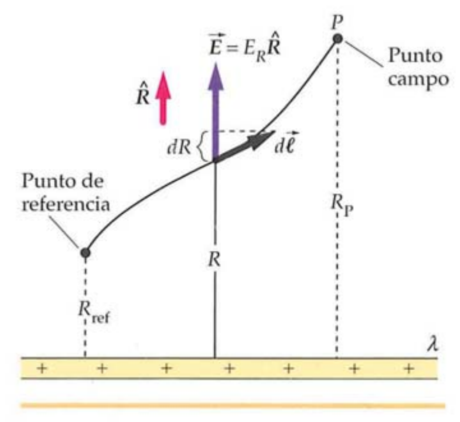


FIGURA 23.19

donde $\hat{R}$ es el vector unitario en la dirección radial. El producto escalar $\hat{R}\cdot d\vec{\ell} = dR$ es la componente de $d\vec{\ell}$ en la dirección de $\hat{R}$; por tanto, $dV = -(2k\lambda/R)\,dR$. Integrando desde un punto de referencia arbitrario hasta el punto P (figura 23.19), obtenemos

$$V_P - V_{\text{ref}} = -2k\lambda\int_{R_{\text{ref}}}^{R_P}\frac{dR}{R} = -2k\lambda\ln\frac{R_P}{R_{\text{ref}}}$$

donde R_P y R_{ref} son las distancias radiales desde la carga lineal hasta el punto de observación del campo y el de referencia, respectivamente. Para simplificar, podemos elegir un punto de referencia en el que $V_{\text{ref}} = 0$, el cual no puede ser $R_{\text{ref}} = 0$ porque $\ln(0) = -\infty$, ni tampoco R_{∞}, porque $\ln(\infty) = \infty$. Sin embargo, podemos elegir cualquier punto del intervalo $0 < R_{\text{ref}} < \infty$, y de esta forma la función potencial viene dada por

$$V = 2k\lambda\ln\frac{R_{\text{ref}}}{R} \qquad 23.23$$

POTENCIAL DEBIDO A UNA CARGA LINEAL

Las distribuciones de carga correspondientes a líneas o planos infinitos no son reales pero sirven de modelos simples para casos que sí lo son. Un ejemplo es el potencial cerca de una línea de alta tensión en un tramo que sea suficientemente recto y que tenga 500 metros de largo.

23.5 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Puesto que no existe campo eléctrico dentro de un conductor que esté en equilibrio electroestático, la variación de potencial de un punto a otro en el interior del conductor es cero. El potencial eléctrico es, por lo tanto, el mismo en todo el conductor, es decir, éste ocupa un **volumen equipotencial** y su superficie es una **superficie equipotencial**.

Como el potencial es constante sobre una superficie de este tipo, el cambio de V cuando una carga testigo experimenta un desplazamiento $d\vec{\ell}$ paralelo a la superficie es $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$. Como $\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ es cero para cualquier $d\vec{\ell}$ paralelo a la superficie, $\vec{E}$ debe ser perpendicular a todos los $d\vec{\ell}$ paralelos a ésta. La única forma de que el campo $\vec{E}$ sea perpendicular a cualquier $d\vec{\ell}$ paralelo a la superficie es que $\vec{E}$ sea normal a dicha superficie. En consecuencia, se puede concluir que las líneas de campo eléctrico son normales a cualquier superficie equipotencial. Las figuras 23.20 y 23.21 muestran las superficies equipotenciales próximas a un conductor esférico y a otro no esférico. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares a estas superficies en todos los puntos. Si nos desplazamos una corta distancia $d\vec{\ell}$ a lo largo de la línea del campo, desde una superficie equipotencial a otra, el potencial se modifica en $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -Ed\ell$. Por lo tanto, las superficies equipotenciales que poseen una diferencia de potencial fija entre ellas están más próximas entre sí allí donde es mayor el campo eléctrico.

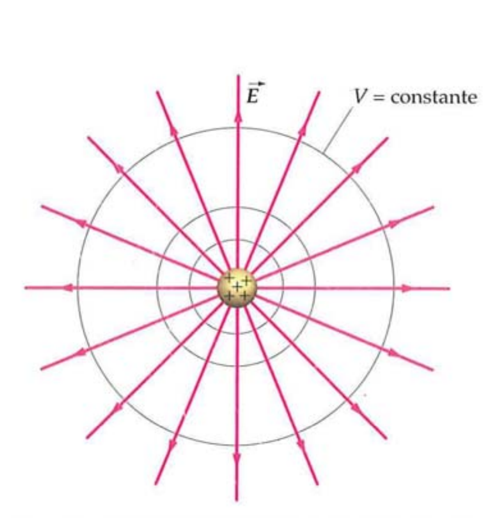


FIGURA 23.20 Superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico exteriores a un conductor esférico uniformemente cargado. Las superficies equipotenciales son esféricas. Las líneas de campo son radiales y perpendiculares a las superficies equipotenciales.

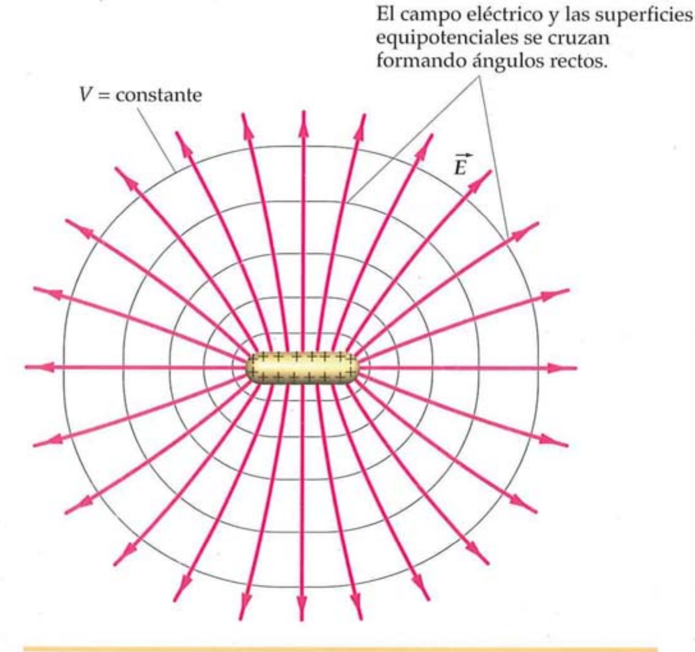


FIGURA 23.21 Superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico exteriores a un conductor no esférico.

Ejemplo 23.13 Esfera hueca

Un conductor esférico hueco descargado posee un radio interno a y un radio externo b. En el centro de la cavidad esférica existe una carga puntual $+q$. (a) Determinar la carga existente en cada superficie del conductor. (b) Determinar el potencial $V(r)$ en cualquier punto, suponiendo que $V = 0$ para $r = \infty$.

PLANTEAMIENTO (a) La distribución de carga tiene simetría esférica, por lo que aplicaremos la ley de Gauss para determinar la carga en la superficie interna y externa del conductor esférico. (b) El potencial total será la suma de los potenciales de las dos distribuciones superficiales de carga y el de la carga añadida en el interior de la esfera hueca. Los potenciales para un corteza esférica con distribución uniforme de carga y para una carga puntual ya han sido calculados (véanse las ecuaciones 23.8 y 23.22).

SOLUCIÓN

(a) 1. La carga encerrada por una superficie de Gauss es proporcional al flujo de $\vec{E}$ que sale a través de dicha superficie:

$$\phi_{\text{neto}} = 4\pi k Q_{\text{interior}}$$

donde $\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n \, dA$

2. Dibujar la carga puntual y la capa esférica. En un conductor en equilibrio, la carga se localiza exclusivamente en la superficie. Asignar un nombre a las diferentes cargas distribuidas superficialmente. Dibujar una superficie gausiana concéntrica con la esfera y que esté en el interior del conductor (figura 23.22):

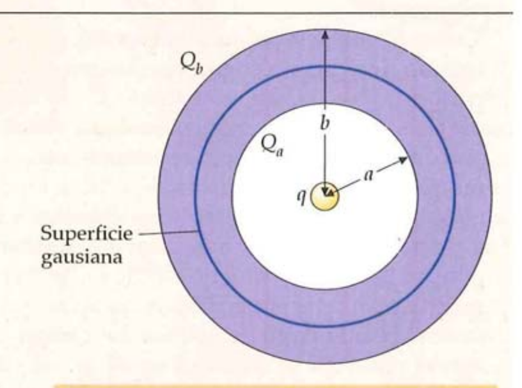


FIGURA 23.22

3. Tomando el resultado del paso 1, aplicar la ley de Gauss a la superficie gausiana para obtener la carga interior a la misma, y de esta forma obtener la carga en la superficie interna del conductor esférico hueco:

$$E_n = 0 \Rightarrow Q_{\text{interior}} = q + Q_a = 0$$

y así $Q_a = \boxed{-q}$

4. El conductor tiene carga total cero, por lo que la carga en su superficie exterior es:

$$Q_a + Q_b = 0$$

de tal forma que $Q_b = -Q_a = \boxed{+q}$

(b) 1. El potencial es la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas individuales:

$$V = V_q + V_{Q_a} + V_{Q_b}$$

2. El potencial para una corteza esférica fina cargada se da en la ecuación 23.22:

$$V = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & (r \geq R) \\ \dfrac{kQ}{R} & (r \leq R) \end{cases}$$

3. Sumar los potenciales en la región $r \geq b$:

$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kQ_a}{r} + \frac{kQ_b}{r} = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = \boxed{\frac{kq}{r} \quad r \geq b}$$

4. Sumar los potenciales en la región $a \leq r \leq b$:

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{b} = \boxed{\frac{kq}{b} \quad a \leq r \leq b}$$

5. Sumar los potenciales en la región $0 < r \leq a$:

$$V = \boxed{\frac{kq}{r} - \frac{kq}{a} + \frac{kq}{b} \quad 0 < r \leq a}$$

COMPROBACIÓN Todos los potenciales deben ser continuos. En consecuencia, los resultados de los pasos 3 y 4 deberían ser iguales para $r = b$ y los de los pasos 4 y 5 para $r = a$. Esto se cumple, tal como era de esperar. Para $r = b$, los resultados de los pasos 3 y 4 son ambos iguales a kq/b. Lo mismo ocurre en los resultados de los pasos 4 y 5, para $r = a$.

OBSERVACIÓN El punto de referencia de potencial cero para cada una de las funciones potencial de este ejemplo es $r = \infty$, por lo que el potencial total, suma de los tres, tiene también como punto de referencia $r = \infty$. Podríamos haber determinado el potencial resolviendo directamente $-\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r_P} E_r\, dr$. Existe una tercera ruta para obtener el potencial que consiste en resolver la integral indefinida $-\int E_r\, dr$ en cada región y determinar las constantes de integración asignando al valor del potencial resultante el de los valores frontera, es decir, aplicando las condiciones de contorno. El cálculo por esta tercera vía es válido, ya que el potencial debe ser una función continua.

La figura 23.23 muestra el potencial eléctrico como una función de la distancia al centro de la cavidad. Dentro del material, donde $a \leq r \leq b$, el potencial es constante, siendo su valor kq/b. Fuera del conductor, el potencial es el de una carga puntual q colocada en el centro de la esfera. Es importante hacer notar que el potencial es continuo en todos los puntos, y sin embargo, el campo eléctrico es discontinuo en las superficies del conductor, como queda patente en la curva de $V(r)$ para $r = a$ y $r = b$.

En general, dos conductores que estén separados en el espacio no estarán al mismo potencial. La diferencia de potencial entre los conductores depende de sus formas geométricas, de su separación y de la carga neta situada en cada conductor. Cuando se ponen en contacto dos conductores, la carga situada en ellos se distribuye por sí misma, de modo que en equilibrio electrostático el campo eléctrico es cero en el interior de ambos conductores. Mientras están en contacto, los dos conductores pueden considerarse como un solo conductor con una sola superficie equipotencial. Si ponemos en contacto un conductor esférico cargado con un segundo conductor esférico descargado, la carga fluirá hacia el conductor neutro, hasta que ambos conductores se encuentren al mismo potencial. Si los conductores son idénticos, la carga se repartirá por igual entre ambos, y si, posteriormente, se separan, cada uno poseerá la mitad de la carga original y ambos se encontrarán al mismo potencial.

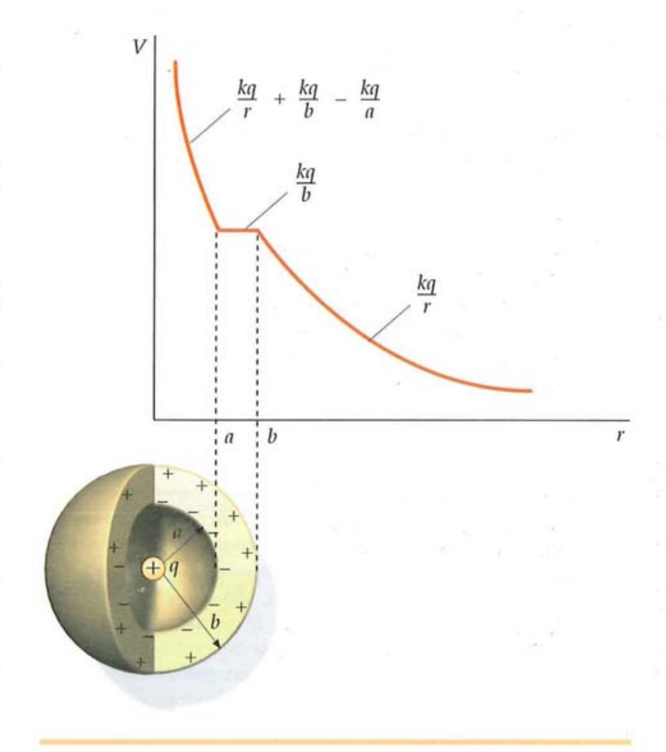


FIGURA 23.23

EL GENERADOR DE VAN DE GRAAFF

En la figura 23.24, un pequeño conductor que posee una carga positiva q está situado en el interior de la cavidad de otro segundo conductor más grande. En el equilibrio, el campo eléctrico es cero en el interior del material conductor de ambos conductores. Las líneas de fuerza que salen de la carga positiva q deben terminar en la superficie interna del conductor grande. Esto deberá ocurrir sin que importe qué carga esté situada en la superficie externa del conductor mayor. Independientemente de la carga del conductor grande, el conductor pequeño de la cavidad está a un potencial más alto debido a que las líneas del campo eléctrico van desde este conductor hasta el conductor mayor. Si, a continuación, se conectan los conductores, por ejemplo con un alambre conductor fino, toda la carga situada originalmente en el conductor más pequeño fluirá hacia el otro mayor. Cuando se rompa la conexión, no habrá ninguna carga en el conductor pequeño situado en el interior de la cavidad y tampoco existirán líneas de campo entre los conductores. La carga positiva transferida desde el conductor menor al mayor reside completamente en la superficie exterior de éste. Si ponemos más carga positiva sobre el conductor menor de la cavidad y de nuevo conectamos los conductores con un alambre fino, transferiremos de nuevo toda la carga al conductor exterior. Este procedimiento puede repetirse indefinidamente. Se utiliza este método para producir

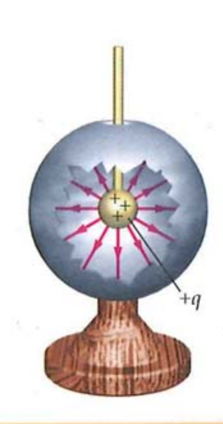
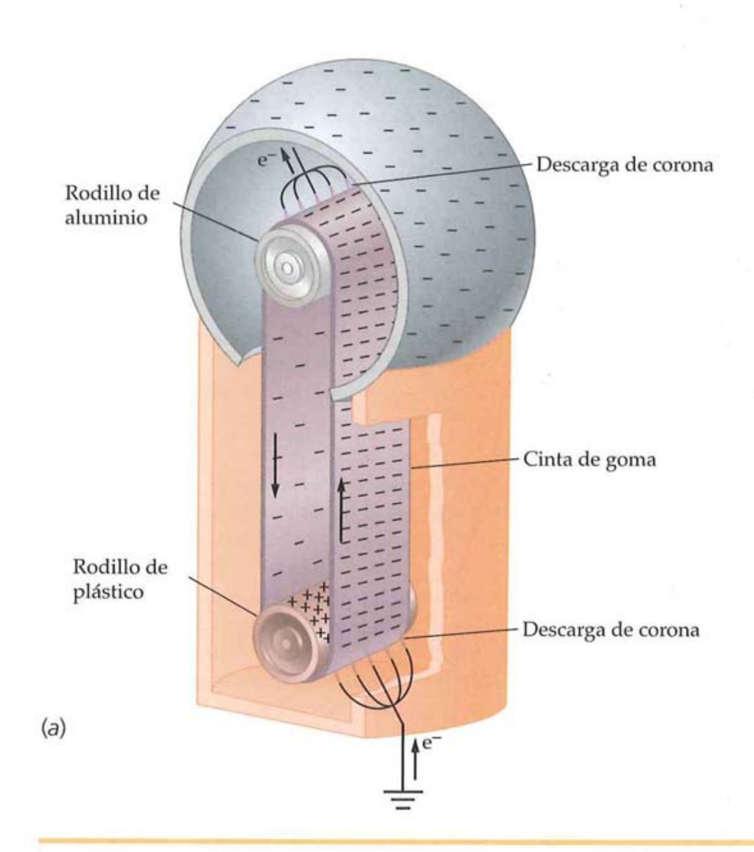


FIGURA 23.24 Conductor pequeño que posee una carga positiva situado en el interior de un conductor más grande.



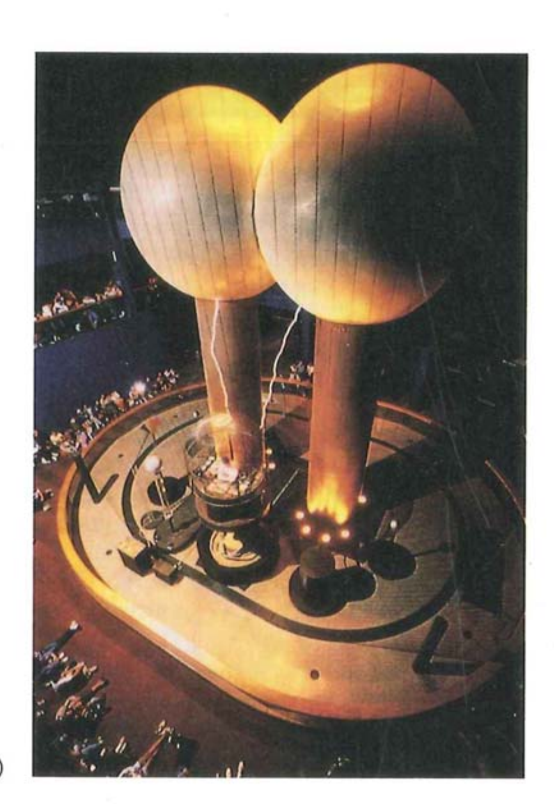


FIGURA 23.25 (*a*) Diagrama esquemático de un generador de Van de Graaff. El rodillo inferior se carga positivamente debido al contacto con la cinta móvil. (La superficie interna de la cinta adquiere una carga igual pero negativa que se distribuye por una superficie mayor.) La carga positiva del rodillo, muy densa, atrae los electrones de los extremos del alambre conductor inferior, en el cual tiene lugar la ruptura dieléctrica, de modo que se transporta carga negativa hasta la cinta mediante descarga de corona. En el rodillo superior, la cinta cargada negativamene repele los electrones de los extremos del alambre conductor correspondiente, de modo que se transfiere carga negativa desde la cinta al conductor. Finalmente, la carga es transferida a la superficie externa de la cúpula. (*b*) Estos grandes generadores de Van de Graaff expuestos en el Museo de Ciencias de Boston producen descargas espectaculares sobre la jaula de alambre conectada a tierra donde se encuentra el operador. *((b) © Karen R. Preuss.)*

grandes potenciales en el *generador de Van de Graaff*, en el cual se lleva carga hacia la superficie interior de un conductor esférico muy grande mediante una cinta transportadora continua (figura 23.25). Para llevar la carga desde el fondo a la parte superior de la cinta, donde el potencial es muy elevado, debe realizarse trabajo mediante un motor que mueve la cinta. A menudo se puede escuchar como decrece la velocidad del motor al cargarse la esfera. Cuanto mayor sea la carga neta situada en el conductor exterior, mayor será su potencial y mayor el campo eléctrico que se generará fuera del conductor. Un acelerador de Van de Graaff es un dispositivo que utiliza el campo eléctrico intenso producido por un generador de Van de Graaff para acelerar partículas positivas, tales como protones.

RUPTURA DIELÉCTRICA

Muchos materiales no conductores se ionizan en campos eléctricos muy altos y se convierten en conductores. Este fenómeno, llamado **ruptura dieléctrica**, tiene lugar cuando la intensidad del campo eléctrico es $E_{\text{máx}} \approx 3 \times 10^6$ V/m = 3 MN/C. En el aire, algunos iones se aceleran hasta conseguir grandes energías cinéticas

antes de chocar con las moléculas más próximas. La ruptura dieléctrica sucede cuando estos iones son acelerados hasta alcanzar energías cinéticas suficientes como para aumentar sensiblemente la concentración iónica debida a las colisiones con las moléculas circundantes. Este fenómeno limita el potencial máximo que puede obtenerse en un generador de Van de Graaff. En el vacío, los generadores de Van de Graaff pueden alcanzar potenciales mucho mayores. La intensidad del campo eléctrico para el cual tiene lugar la ruptura dieléctrica de un material se denomina **resistencia dieléctrica** de dicho material. Para el aire vale aproximadamente 3 MV/m. La descarga a través del aire resultante de la ruptura dieléctrica se denomina **descarga en arco**. Las descargas eléctricas que se experimentan al tocar el pomo metálico de una puerta después de andar sobre una alfombra un día con el tiempo seco es un ejemplo conocido de descarga en arco. Esto ocurre preferentemente en un ambiente seco, porque el aire húmedo conduce la carga fuera del cuerpo antes de que se alcance la condición de ruptura dieléctrica. El relámpago es un ejemplo de descarga en arco que se verifica a gran escala durante una tormenta.

Ejemplo 23.14 Ruptura dieléctrica para una esfera cargada

Un conductor esférico tiene un radio de 30 cm. (*a*) ¿Cuál es la carga máxima que puede situarse en la esfera sin que se produzca la ruptura dieléctrica del aire que la rodea? (*b*) ¿Cuál es el potencial máximo de la esfera?

PLANTEAMIENTO (*a*) Para determinar la carga máxima relacionamos la carga con el campo eléctrico y establecemos que éste es igual a la resistencia dieléctrica del aire, $E_{máx}$. (*b*) El potencial máximo se determina entonces a partir de la carga máxima calculada en (*a*).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La densidad superficial de carga en el conductor, σ, está relacionada con el campo eléctrico que se genera justo en el exterior del conductor (ecuación 22.21):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 4\pi k\sigma$$

2. Igualar este campo con $E_{máx}$:

$$E_{máx} = 4\pi k\sigma_{máx}$$

3. La carga máxima $Q_{máx}$ se obtiene de $\sigma_{máx}$:

$$\sigma_{máx} = \frac{\text{carga}}{\text{área}} = \frac{Q_{máx}}{4\pi R^2}$$

4. $Q_{máx}$ viene dada por:

$$Q_{máx} = 4\pi R^2\sigma_{máx} = 4\pi R^2\frac{E_{máx}}{4\pi k} = \frac{R^2E_{máx}}{k}$$

$$= \frac{(0{,}30\text{ m})^2(3\times10^6\text{ N/C})}{(8{,}99\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)} = \boxed{3\times10^{-5}\text{ C}}$$

(*b*) Utilizar esta carga máxima para calcular el máximo potencial de la esfera:

$$V_{máx} = \frac{kQ_{máx}}{R} = \frac{k}{R}\left(\frac{R^2E_{máx}}{k}\right) = RE_{máx}$$

$$= (0{,}30\text{ m})(3\times10^6\text{ N/C}) = \boxed{9\times10^5\text{ V}}$$

COMPROBACIÓN Pequeños generadores de Van der Graff se utilizan normalmente en demostraciones prácticas en las que se necesitan potenciales altos. El resultado de la parte (*b*) es ciertamente un potencial muy alto.

OBSERVACIÓN Los valores calculados corresponden a un generador con una cúpula de 2,0 pies de diámetro. Por razones de seguridad, las cúpulas de los generadores que se utilizan para demostraciones tienen un diámetro de 1 pie e incluso menos.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.9 Calcular la carga máxima y el potencial máximo de un generador de Van der Graff con una cúpula de 1 pie de diámetro.

Ejemplo 23.15 Dos conductores esféricos cargados

Dos conductores esféricos cargados, de radios $R_1 = 6$ cm y $R_2 = 2$ cm (figura 23.26), están separados por una distancia mucho mayor de 6 cm y conectados por un alambre conductor largo y delgado. Una carga total $Q = +80$ nC se sitúa en una de las esferas y se permite que el sistema alcance el equilibrio electrostático. (*a*) ¿Cuál es la carga de cada esfera? (*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico próximo a la superficie de cada esfera? (*c*) ¿Cuál es el potencial eléctrico de cada esfera? (Suponer que la carga en el cable de conexión es despreciable.)

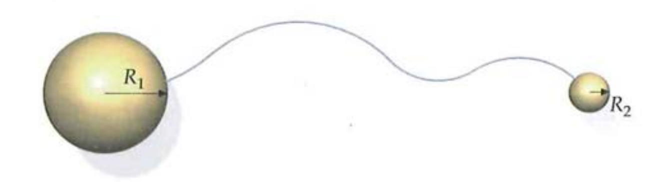


FIGURA 23.26

PLANTEAMIENTO La carga total se distribuirá con Q_1 sobre la esfera 1 y Q_2 sobre la esfera 2, de tal forma que las esferas estarán al mismo potencial. Utilizaremos $V = kQ/r$ para el potencial de cada esfera, ya que ambas están muy separadas.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La conservación de la carga nos da una relación entre las cargas Q_1 y Q_2:

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

2. Igualando el potencial de las esferas obtenemos una segunda relación para las cargas Q_1 y Q_2:

$$\frac{kQ_1}{R_1} = \frac{kQ_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1}Q_1$$

3. Combinar estos resultados y deducir Q_1 y Q_2:

$$Q_1 + \frac{R_1}{R_2}Q_1 = Q \quad \text{de esta forma}$$

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}Q = \frac{6{,}0\text{ cm}}{8{,}0\text{ cm}}(80\text{ nC}) = \boxed{60\text{ nC}}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 = \boxed{20\text{ nC}}$$

(*b*) Utilizar estos resultados para calcular los campos eléctricos que se generan en la superficie de las esferas:

$$E_1 = \frac{kQ_1}{R_1^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(60 \times 10^{-9}\text{ C})}{(0{,}060\text{ m})^2} = \boxed{150\text{ kN/C}}$$

$$E_2 = \frac{kQ_2}{R_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(20 \times 10^{-9}\text{ C})}{(0{,}020\text{ m})^2} = \boxed{450\text{ kN/C}}$$

(*c*) Calcular el potencial común de las esferas a partir de la expresión kQ/R:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(60 \times 10^{-9}\text{ C})}{0{,}060\text{ m}} = \boxed{9{,}0\text{ kV}}$$

COMPROBACIÓN Si usamos la esfera 2 para calcular V, obtenemos $V_2 = kQ_2/R_2 = (8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(20 \times 10^{-9}\text{ C})/0{,}02\text{ m} = 8{,}99 \times 10^3$ V. Puede realizarse otra comprobación adicional teniendo en cuenta que el campo eléctrico generado en la superficie de cada esfera es proporcional a su densidad de carga. Como el radio de la esfera 1 es tres veces mayor que el de la esfera 2, el área de su superficie es 9 veces el de la esfera 2. Y como posee 3 veces la carga de la esfera 2, su densidad de carga es un tercio de la correspondiente a esta esfera. Por lo tanto, el campo de la esfera 1 será 1/3 del correspondiente a la esfera 2, que es lo que hemos obtenido en el apartado (*b*).

OBSERVACIÓN La presencia de un largo y fino hilo conductor que conecta las dos esferas hace que el resultado de este ejemplo sea sólo aproximado dado que la función potencial $V = kQ/r$ es válida para la región fuera de la esfera si ésta está aislada. Considerar las esferas aisladas cuando están conectadas con el hilo es tan sólo una aproximación.

Cuando una carga se sitúa en un conductor de forma no esférica, como el de la figura 23.27*a*, la superficie de éste será equipotencial, pero la densidad superficial de carga y el campo eléctrico, justamente en el exterior del conductor, variarán de un punto a otro. Cerca de un punto de radio de curvatura pequeño, tal como el punto A de la figura, la densidad de carga superficial y el campo eléctrico serán grandes, mientras que cerca de un punto de radio de curvatura grande como el B, estas magnitudes serán pequeñas. Podemos entender esto cualitativamente considerando los extremos del conductor como si fueran esferas de radios distintos. Sea σ la densidad de carga superficial.

El potencial de una esfera de radio R es

$$V = \frac{kq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad 23.24$$

Como el área de una esfera es $4\pi R^2$, la carga de una esfera está relacionada con la densidad de carga por $Q = 4\pi R^2\sigma$. Sustituyendo q por esta expresión en la ecuación 23.24, resulta

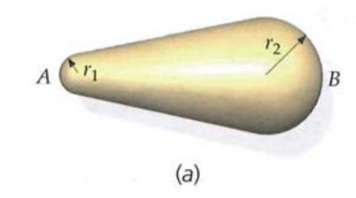
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{R} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0}$$

y despejando σ, obtenemos

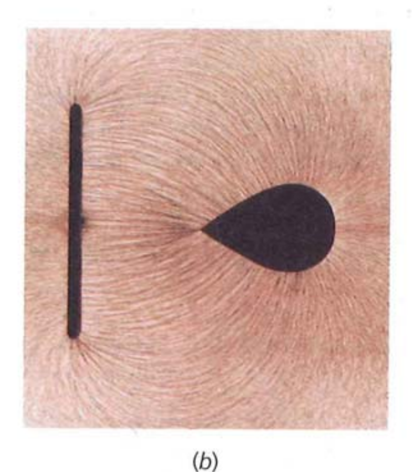
$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{R} \qquad 23.25$$

Como ambas esferas poseen el mismo potencial, la de menor radio tendrá mayor densidad superficial de carga. Y como $E = \sigma/\epsilon_0$, el campo eléctrico es mayor en los puntos del conductor donde el radio de curvatura es mínimo.

En el caso de un conductor de forma arbitraria, el potencial para el cual se produce la ruptura dieléctrica depende del radio más pequeño de curvatura de una parte cualquiera del conductor. Si el conductor tiene puntas de radio de curvatura muy pequeño, la ruptura dieléctrica se producirá con potenciales relativamente bajos. En el generador de Van de Graaff, la carga se transfiere a la cinta de transporte por conductores de bordes afilados próximos al fondo de la cinta y se extrae mediante conductores de iguales características situados en su parte alta (figura 23.25*a*). Los pararrayos situados en lo alto de un gran edificio extraen la carga de una nube próxima antes de que el potencial de la nube alcance un alto valor destructivo.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 23.27 (*a*) Conductor no esférico. Al cargarlo eléctricamente, se producirá un campo eléctrico más intenso cerca del punto A, donde el radio de curvatura es pequeño, que cerca del punto B, donde el radio de curvatura es grande. (*b*) Líneas de campo eléctrico próximas a un conductor no esférico y una placa cuyas caras están cargadas con cargas iguales y opuestas. Las líneas se indican mediante trocitos de hilo suspendidos en aceite. El campo eléctrico es más intenso cerca de los puntos de menor radio de curvatura, como los bordes de la placa y la parte izquierda puntiaguda del conductor. Las superficies equipotenciales están menos espaciadas entre sí allí donde la intensidad del campo es mayor. *((b) Harold M. Waage.)*

23.6 ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

Los objetos que se repelen tienen mayor energía potencial cuanto menor es la distancia entre ellos, y si se atraen es mayor su energía potencial cuanto mayor es la distancia entre ellos. Si tenemos una carga puntual q_1 en el punto 1, el potencial V_2 de un punto 2 situado a una distancia $r_{1,2}$ viene dado por

$$W_2 = q_2 V_2 = q_2\frac{kq_1}{r_{12}} = \frac{kq_2 q_1}{r_{12}}$$

donde V_2 es el potencial en el punto 2 debido a la carga q_1. (De ello se sigue que la energía potencial de estas dos cargas puntuales es el valor del trabajo cambiado de signo.)

$$V_2 = \frac{kq_1}{r_{12}}$$

El potencial en el punto 3, situado a una distancia r_{13} de q_1 y a una distancia r_{23} de q_2 viene dado por

$$V_3 = \frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}$$

Para traer una tercera carga puntual q_3 desde el infinito, donde se halla en reposo, hasta el punto 3, volviéndola a dejar en reposo, se requiere un trabajo adicional

$$W_3 = q_3V_3 = \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}$$

El trabajo total necesario para reunir las tres cargas puntuales es la **energía potencial electrostática** U del sistema de las tres cargas:

$$U = \frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}} \qquad 23.26$$

Esta cantidad de trabajo es independiente del orden en el cual las cargas se transportan hasta alcanzar sus posiciones finales. En general:

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una distancia infinita hasta sus posiciones finales.

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA DE UN SISTEMA

Los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación 23.26 pueden escribirse en la forma

$$\frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} = q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{kq_3}{r_{13}}\right) = q_1V_1$$

donde V_1 es el potencial debido a las cargas q_2 y q_3. De igual modo, el segundo y tercer términos representan el producto de la carga q_3 por el potencial debido a las cargas q_1 y q_2, y el primer y tercer términos representan el producto de la carga q_2 por el potencial debido a las cargas q_1 y q_3. Así, podemos expresar la ecuación 23.26 en la forma

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}\right) \\ &= \frac{1}{2}q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{kq_3}{r_{13}}\right) + \frac{1}{2}q_2\left(\frac{kq_3}{r_{23}} + \frac{kq_1}{r_{12}}\right) + \frac{1}{2}q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3) \end{aligned}$$

La energía potencial electrostática U de un sistema de n cargas puntuales es, por lo tanto,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i \qquad 23.27$$

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA DE UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

donde V_i es el potencial en la posición de la carga i producido por todas las demás cargas.

La ecuación 23.27 describe también la energía potencial electrostática de una distribución continua de carga. Consideremos un conductor esférico de radio R. Cuando la esfera contiene una carga q, su potencial relativo a $V = 0$ en el infinito es

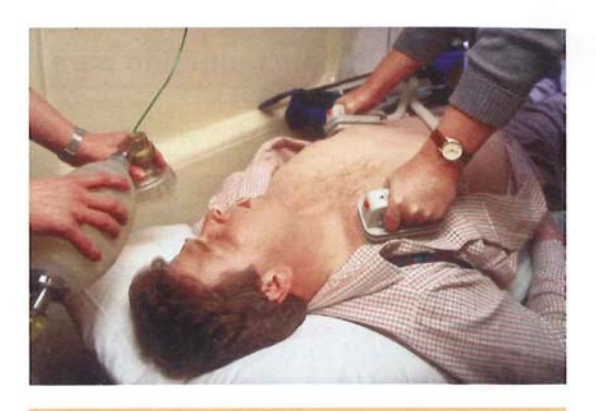
$$V = \frac{kq}{R}$$

El trabajo necesario para transportar una cantidad adicional de carga dq desde el infinito al conductor es $V\,dq$. Este trabajo es igual al incremento de energía potencial del conductor:

$$dU = V\,dq = \frac{kq}{R}\,dq$$

La energía potencial total U es la integral de dU cuando q crece desde cero hasta su valor final Q. Integrando, se obtiene:

$$U = \frac{k}{R}\int_0^Q q\,dq = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2}QV \qquad 23.28$$



En aproximadamente dos tercios de las personas que sufren paros cardíacos, su corazón se encuentra en un estado que se denomina fibrilación ventricular. En este estado, el corazón sufre estremecimientos y espasmos de forma caótica, por lo cual no bombea sangre como debiera. Para desfibrilar el corazón, se hace pasar a través de él una considerable corriente eléctrica produciéndole una parada. Entonces, un marcapasos puede restablecer el bombeo regular. El desfibrilador externo aplica un alto voltaje entre ambos lados del pecho. *(© Steve Allen/The Image Bank/Getty Images.)*

donde $V = kQ/R$ es el potencial generado en la superficie de la esfera cargada. Se puede interpretar la ecuación 23.28 como $U = Q \times \frac{1}{2}V$, donde $\frac{1}{2}V$ es el potencial medio de la esfera durante el proceso de cargar la esfera. En este proceso, el primer elemento de carga que se transporta a la misma desde el infinito no requiere realizar ningún trabajo porque la esfera está descargada. Por lo tanto, en este primer proceso de cargar la esfera, ésta no repele al elemento de carga. Según va acumulándose la carga en la esfera, transportando sucesivos elementos de carga, se necesita realizar cada vez más trabajo, siendo el último escalón del proceso cuando se requiere el máximo trabajo para vencer la fuerza repulsiva originada por la carga ya acumulada.* El potencial medio en la esfera durante el proceso de carga es la mitad de su valor final V, y el trabajo requerido para llevar la totalidad de la carga de la esfera es $\frac{1}{2}QV$.

De forma alternativa, si definimos $V_i = V$ y $Q = \sum_i q_i$, la ecuación 23.27 se convierte en la 23.28. Se puede considerar la carga en la corteza esférica uniformemente cargada como un conjunto de cargas infinitesimales puntuales que están todas al mismo potencial V. De esta forma, la ecuación 23.27 nos lleva a la 23.28.

Aunque la ecuación 23.28 se ha deducido para un conductor esférico, es válida para cualquier conductor. El potencial de un conductor es proporcional a su carga q, es decir, $V = \alpha q$, donde α es una constante. Por tanto, el trabajo necesario para transportar una carga adicional dq desde el infinito al conductor es $V\,dq = \alpha q\,dq$, y el trabajo total necesario para depositar la carga Q sobre el conductor será $\frac{1}{2}\alpha Q^2 = \frac{1}{2}QV$. Si tenemos una serie de n conductores con el conductor i al potencial V_i con la carga Q_i, la energía potencial electrostática es

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i \qquad 23.29$$

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA DE UN SISTEMA DE CONDUCTORES

* Se considera que todos los elementos diferenciales de carga son del mismo tamaño.

Ejemplo 23.16 Trabajo requerido para mover cargas puntuales

Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices de un cuadrado de lado *a*. Cuatro cargas puntuales positivas de valor *q* se encuentran inicialmente en reposo y separadas una distancia infinita. (*a*) Calcular el trabajo total necesario para situar cada una de las cargas puntuales en un vértice del cuadrado, determinando por separado el trabajo correspondiente al transporte de cada carga a su posición final. (*b*) Demostrar que la ecuación 23.27 expresa el trabajo total.

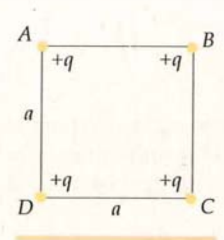


FIGURA 23.28

PLANTEAMIENTO Para situar la primera carga en el punto *A* no se necesita trabajo alguno, ya que el potencial en este punto es cero cuando las otras tres cargas están en el infinito. A medida que cada carga adicional ocupa su puesto, debe realizarse el trabajo correspondiente a la presencia de las cargas previas.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar el cuadrado y marcar los vértices con las letras *A*, *B*, *C* y *D* (figura 23.28):

2. Situar la primera carga en *A*. Para ello, el trabajo necesario W_A es cero:

$$W_A = 0 \qquad x > 0$$

3. Transportar la segunda carga al punto B. El trabajo requerido es $W_B = qV_A$, donde V_A es el potencial en *B* debido a la primera carga situada en *A* a la distancia *a*:

$$W_B = qV_A = q\left(\frac{kq}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}$$

4. $W_C = qV_C$, donde V_C es el potencial en *C* debido a la presencia de *q* en *A* a la distancia $\sqrt{2}a$, y de *q* en *B* a la distancia *a*:

$$W_C = qV_C = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a}$$

5. Consideraciones semejantes permiten calcular el trabajo W_D necesario para transportar la cuarta carga al punto *D*:

$$W_D = qV_D = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a}\right) = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a}$$

6. Sumando las contribuciones individuales, se obtiene el trabajo total necesario para reunir las cuatro cargas:

$$W_{total} = W_A + W_B + W_C + W_D = \boxed{(4 + \sqrt{2})\frac{kq^2}{a}}$$

(*b*) 1. Calcular el trabajo total a partir de la ecuación 23.27. Usar V_D del paso 5 del apartado (*a*) para el potencial en el punto donde se localiza la carga:

$$W_{total} = U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V_i$$

donde $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_D$ y $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$

2. El potencial en la posición de cada carga es V_D del paso 4. Sustituir V_D por V_i, y q por q_i para obtener W_{total}:

$$W_{total} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} qV_D = \frac{1}{2}qV_D\sum_{i=1}^{4} 1$$

$$= \frac{1}{2}qV_D 4 = 2q\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq}{a}$$

$$= \boxed{(4 + \sqrt{2})\frac{kq^2}{a}}$$

COMPROBACIÓN Las partes (*a*) y (*b*) tienen resultados idénticos.

OBSERVACIÓN W_{total} es la energía total electrostática de la distribución de carga. Es el trabajo que un agente externo deberá realizar para formar la configuración de cargas, comenzando el proceso cuando las cuatro cargas están separadas entre sí por una distancia infinita.

PROBLEMA PRÁCTICO 23.10 (*a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para transportar una quinta carga positiva *q* desde el infinito al centro del cuadrado? (*b*) ¿Cuál es el trabajo total requerido para reunir el sistema de cinco cargas?

Relámpagos—Campos de atracción

Los científicos han observado y analizado los relámpagos desde hace más de 100 años. En los últimos años, el uso de grabaciones digitales de alta velocidad,[1] cámaras de televisión de baja intensidad de luz[2] y satélites con relojes sincronizados[3] han proporcionado nueva información acerca de las descargas entre nubes y tierra (NT) denominadas relámpagos.



Un rayo cae cerca de una terminal del aeropuerto. *(Tom Fox/Dallas Morning News/Corbis.)*

En las tormentas, las nubes tienen diferentes capas, unas con carga positiva y otras con carga negativa, que actúan como potentes y enormes dipolos. Los relámpagos NT se producen, normalmente, por el movimiento de cargas negativas que, desde la parte baja de la masa nubosa, viajan a gran velocidad a tierra abriéndose camino por la ionización del aire. Este movimiento tiene diferentes pautas en su viaje a través del aire, cuyas pausas pueden durar tiempos del orden de milisegundos. El efecto visible del rayo, el relámpago, suele generarse por el movimiento extremadamente rápido de carga positiva que sigue un camino inverso a través del aire ionizado. La mayoría de los destellos luminosos se deben a la sucesión de entre 3 y 10 rayos que van de atrás hacia adelante entre la nube y la tierra y que duran unos milisegundos. Los rayos inician su recorrido a través del aire caliente ionizado transfiriendo entre 25 y 30 coulombs de carga negativa, y los relámpagos NT transportan la carga negativa almacenada a tierra por la existencia de una diferencia de potencial de alrededor de 1 millón de volts.[5]

Algunos relámpagos NT extremadamente potentes acompañados de truenos transportan hasta 400 C[6] de carga positiva a la Tierra para lo cual se requieren hasta 10 millones de volts. En algunas concentraciones tormentosas, como los tornados,[7,8] la mayor parte de los rayos y relámpagos transportan más carga positiva desde la parte alta de las nubes a tierra que carga negativa desde la zona intermedia de la masa nubosa a tierra. A estos relámpagos les acompañan fuertes estallidos en forma de explosiones en las que al principio del destello luminoso se emite gran cantidad de energía radiada y poco después del primer rayo se suceden ligeros relámpagos que se propagan a lo largo de muchos kilómetros en la parte alta de las nubes.[9]

No obstante, se han observado fuertes estallidos de energía radiada que se producen microsegundos antes de otros rayos negativos menos potentes.[10,11,12,13] Algunas explosiones de energía se repiten y pueden ser detectables por satélites hasta 4 horas después de observarse el primer rayo. Aunque los estallidos duran menos de un milisegundo, son muy energéticos y se les asocia con el ruido radioeléctrico que puede ser detectado en el hemisferio opuesto del planeta.[14]

Dado que se ha detectado en diversas ocasiones radiación electromagnética generada por los rayos, los científicos están intentando construir nuevos modelos sobre la generación de rayos y relámpagos. Uno de estos posibles modelos es la "ruptura aislada o peregrina". Como en la tormentas se forman enormes campos eléctricos, es posible que electrones o iones aislados y dispersos sean acelerados a velocidades próximas a la de la luz[15] y, a estas velocidades, el electrón podría ser tan energético que, al colisionar con las partículas de la nube, podría no ser detenido e incluso llegar a ionizar varias moléculas. Los iones formados podrían acelerarse por el campo eléctrico existente en el interior de la tormenta y producir una "ducha", o estallido, de energía. Muchos científicos están convencidos de que la "ruptura peregrina" explica la existencia de los rayos NT en casos en los que las nubes generan campos eléctricos 10 veces menores que los requeridos para superar la capacidad aislante del aire.[16]

Como la tecnología actual para detectar los estallidos de energía producidos en los destellos de los relámpagos es muy reciente, actualmente se están desarrollando nuevas teorías y experimentos con los que ratificar o rectificar estos modelos nuevos. El estudio de los rayos es un campo de estudio con gran interés.

1 Wang, D., et al., "Observed Leader and Return-Stroke Propagation Characteristics in the Bottom 400 m of a Rocket-Triggered Lightning Channel." *Journal of Geophysical Research*, Jun. 27, 1999, Vol. 104, No. D12, pp. 14,369–14,376.
2 Lyons, W. A., et al., "Upward Electrical Discharges from Thunderstorm Tops." *Bulletin of the American Meteorological Society*, Apr. 2003, pp. 445–454.
3 Gurevich, A. V., and Zybin, K. P., "Runaway Breakdown and the Mysteries of Lightning." *Physics Today*, May 2005, pp. 37–43.
4 Uman, M. A., *Lightning*. New York: Dover, 1984.
5 Uman, M. A., op. cit.
6 Rakov, V. A., "A Review of Positive and Bipolar Lightning Discharges." *Bulletin of the American Meteorological Society*, Jun. 2003, pp. 767–776.
7 Lang, T. J., et al., "The Severe Thunderstorm Electrification and Precipitation Study." *Bulletin of the American Meteorological Society*, Aug. 2004, pp. 1107–1125
8 Wiens, K. C., "The 29 June 2000 Supercell Observed During STEPS. Part II: Lightning and Charge Structure."[Need journal name, volume, pages.]
9 Lyons, W. A., et al., op. cit.
10 Dwyer, J. H., et al., "X-Ray Bursts Associated Leader Steps in Cloud-to-Ground Lightning." *Geophysical Research Letters*, Vol. 32, Letter 01803, 2005.
11 Dwyer, J. R., "A Ground Level Gamma-Ray Burst Observed in Association with Rocket-Triggered Lightning." *Geophysical Research Letters*, Vol. 31, Letter 05119, 2004.
12 Greenfield, M. B., et al., "Near-Ground Detection of Atmospheric γ Rays Associated with Lightning." *Journal of Applied Physics*, Feb. 1, 2003, Vol. 93, No. 3, pp. 1839–1844.
13 Gurevich, A. V., and Zybin, K. P., op. cit.
14 Inan, U., "Gamma Rays Made on Earth." *Science*, Feb. 18, 2005, Vol. 307, No. 5712, pp. 1054–1055.
15 Inan, U., op. cit.
16 Schrope, M., "The Bolt Catchers." *Nature*, Sept. 19, 2004, Vol. 431, pp. 120–121.

Resumen

1. El potencial eléctrico, definido como la energía potencial electrostática por unidad de carga, es un importante concepto físico que está relacionado con el campo eléctrico.
2. Como el potencial es una magnitud escalar, frecuentemente es más fácil de calcular que el vector campo eléctrico. Una vez conocido V, puede determinarse el valor de $\vec{E}$.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Diferencia de potencial	La diferencia de potencial $V_b - V_a$ se define como el trabajo por unidad de carga, cambiado de signo, que realiza el campo eléctrico cuando una carga testigo se desplaza del punto a al punto b: $\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$	23.2*b*
Diferencia de potencial para desplazamientos infinitesimales	$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$	23.2*a*
2. Potencial eléctrico		
Potencial debido a una carga puntual	$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}}$ $\quad (V = 0 \text{ si } r = r_{ref})$	23.7
Potencial de Coulomb	$V = \frac{kq}{r}$ $\quad (V = 0 \text{ si } r = \infty)$	23.8
Potencial debido a un sistema de cargas puntuales	$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}$ $\quad (V = 0 \text{ si } r_i = \infty, i = 1, 2, \ldots)$	23.10
Potencial debido a distribuciones continuas de carga	$V = \int \frac{k\,dq}{r}$ $\quad (V = 0 \text{ si } r = \infty)$ donde dq es un incremento de carga y r la distancia desde este incremento al punto donde se calcula el campo. Esta expresión puede utilizarse sólo si la distribución de carga está contenida en un volumen finito, de modo que el potencial pueda considerarse nulo en el infinito.	23.18
Continuidad del potencial eléctrico	La función potencial V es continua en todos los puntos del espacio.	
3. Determinación del campo eléctrico a partir del potencial	El campo eléctrico apunta en la dirección de la máxima disminución del potencial.	
	La variación del potencial cuando la carga de prueba se desplaza $d\vec{\ell}$ viene dada por $E_{tan} = -\frac{dV}{d\ell}$	23.12
Gradiente	Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuyo módulo es igual a la derivada de dicha función respecto a la distancia en la dirección indicada, se llama gradiente de la función. El campo eléctrico $\vec{E}$ es el gradiente negativo del potencial V.	
Potencial como función de x	$E_x = -\frac{dV(x)}{dx}$	23.13
Potencial como función de r	$E_r = -\frac{dV(r)}{dr}$	23.14
4. *Relación general entre $\vec{E}$ y V	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$ o $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$	23.17

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
5. Unidades		
V y ΔV	La unidad del SI de potencial y diferencia de potencial es el volt (V):	
	$$1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$$	23.4
Campo eléctrico	$$1\ \text{N/C} = 1\ \text{V/m}$$	23.5
Electronvolt	El electronvolt (eV) es la variación de energía potencial que experimenta una partícula de carga e cuando se desplaza de a a b, siendo $\Delta V = V_b - V_a = 1$ volt:	
	$$1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \cdot \text{V} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$$	23.6
6. Energía potencial de dos cargas puntuales	$$U = q_0 V = \frac{kq_0 q}{r} \qquad (U = 0 \text{ si } r = \infty)$$	23.9
7. Funciones potenciales		
En el eje de un anillo uniformemente cargado	$$V = \frac{kQ}{\sqrt{z^2 + a^2}} \qquad (V = 0 \text{ si } \lvert z \rvert = \infty)$$	23.19
En el eje de un disco uniformemente cargado	$$V = 2\pi k\sigma \lvert z \rvert \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1 \right) \qquad (V = 0 \text{ si } \lvert z \rvert = \infty)$$	23.20
Para a un plano infinito cargado	$$V = V_0 - 2\pi k\sigma \lvert x \rvert \qquad (V = V_0 \text{ si } x = 0)$$	23.21
Para una corteza esférica de carga	$$V = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & r \geq R \\ \dfrac{kQ}{R} & r \leq R \end{cases} \qquad (V = 0 \text{ si } r = \infty)$$	23.22
Para una línea infinita de carga	$$V = 2k\lambda \ln \frac{R_{\text{ref}}}{R} \qquad (V = 0 \text{ si } r = R_{\text{ref}})$$	23.23
8. Carga en un conductor no esférico	En un conductor de forma arbitraria, la densidad de carga superficial σ es máxima en los puntos donde el radio de curvatura es mínimo.	
9. Ruptura dieléctrica	La cantidad de carga que puede depositarse en un conductor viene limitada por el hecho de que las moléculas del medio que le rodea se ionizan en campos eléctricos muy intensos y el medio se hace conductor.	
Resistencia dieléctrica	La intensidad del campo eléctrico para la cual tiene lugar la ruptura dieléctrica de un material se denomina resistencia dieléctrica de este material. Para el aire es	
	$$E_{\text{máx}} \approx 3 \times 10^6\ \text{V/m} = 3\ \text{MV/m}$$	
10. Energía potencial electrostática	La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para llevar las cargas desde el infinito a sus posiciones finales.	
De cargas puntuales	$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$	23.27
De un conductor con carga Q y potencial V	$$U = \tfrac{1}{2} QV$$	23.28
De un sistema de conductores	$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i V_i$$	23.29

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

23.1 El cambio en el potencial es cero si el movimiento se realiza en una dirección perpendicular a la del campo eléctrico $\vec{E}$.

23.2 El potencial eléctrico crece más respecto de la distancia si uno se mueve en la dirección opuesta a la del campo eléctrico $\vec{E}$.

Respuestas a los problemas prácticos

23.1 Potencial creciente

23.2 $V(x) = -(5\ \text{V/m}^2)x^2$

23.3 $-4{,}35 \times 10^{-18}\ \text{J}$

23.4 (*a*) el plano $x = 4{,}0$ m, (*b*) $V = -(25\ \text{V/m})x$

23.5 $3{,}7 \times 10^{-6}\ \text{J}$

23.6 $V = \text{sign}\,(z) \cdot 2\pi k\sigma \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + (R^2/z^2)}}\right)$

23.7 $5{,}39 \times 10^5\ V = 539\ \text{kV}$

23.8 $V(r) = kQ/r - kQ/R$ for $r \geq R$

$V(r) = \frac{1}{2}(kQ/R)(1 - r^2/R^2)$ para $r \leq R$

23.9 $7{,}5 \times 10^{-6}\ \text{C}$, $4{,}4 \times 10^5\ \text{V}$

23.10 (*a*) $4\sqrt{2}kq^2/a$, (*b*) $(4 + 5\sqrt{2})kq^2/a$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*
- Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Un protón se mueve en dirección opuesta a un campo eléctrico. ¿El protón se mueve en dirección creciente o decreciente de potencial eléctrico? La energía potencial del protón, ¿está aumentando o disminuyendo? SSM

2 • Un electrón se mueve en dirección opuesta a un campo eléctrico. ¿El electrón se mueve en dirección creciente o decreciente de potencial eléctrico? Y la energía potencial, ¿es creciente o decreciente?

3 • Si el potencial eléctrico es constante en toda una región del espacio, ¿qué podemos decir del campo eléctrico generado en esa región?

4 • ¿Si V es conocido en sólo un punto, puede determinarse el valor de $\vec{E}$ en ese punto?

5 •• La figura 23.29 muestra una esfera metálica con una carga $-Q$ y una carga puntual $+Q$. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales en la proximidad de este sistema de cargas. SSM



+Q

FIGURA 23.29 Problema 5

6 •• Repetir el problema 5 cambiando la carga de la esfera metálica a $+Q$ y la carga puntual $-Q$.

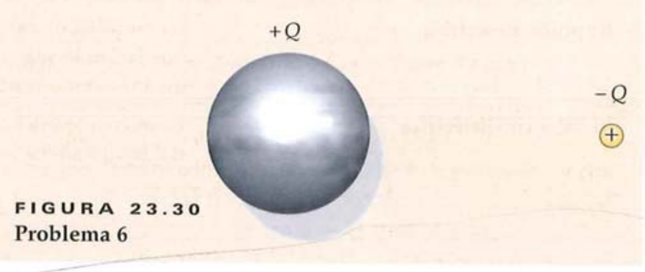


FIGURA 23.30 Problema 6

7 •• Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales cercanas y alejadas del conductor de la figura 23.31, suponiendo que el conductor posee cierta carga Q.

FIGURA 23.31 Problema 7

8 •• Dos cargas positivas iguales están separadas por una pequeña distancia. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales de este sistema.

9 •• (*a*) Dos cargas puntuales positivas e iguales $+Q$ se encuentran sobre el eje x. Una se encuentra en $x = -a$ y la otra en $x = +a$. En el origen, ¿cuál de estos resultados es verdadero?

(1) $\vec{E} = 0$ y $V = 0$

(2) $\vec{E} = 0$ y $V = 2kq/a$

(3) $\vec{E} = (2kq/a^2)\hat{i}$ y $V = 0$

(4) $\vec{E} = (2kq/a^2)\hat{i}$ y $V = 2kq/a$

(5) Ninguno de los anteriores es correcto.

(*b*) Dos cargas puntuales de igual valor absoluto, pero de signo opuesto, se encuentran sobre el eje x; $+Q$ se encuentra en $x = -a$ y $-Q$ en $x = +a$. En el origen, ¿cuál de estos resultados es verdadero?

(1) $\vec{E} = 0$ y $V = 0$

(2) $\vec{E} = 0$ y $V = 2kq/a$

(3) $\vec{E} = (2kq/a^2)\hat{i}$ y $V = 0$

(4) $\vec{E} = (2kq/a^2)\hat{i}$ y $V = 2kq/a$

(5) Ninguno de los anteriores es correcto.

10 •• La medida de un potencial electrostático resulta ser $V(x, y, z) = 4{,}00|x| + V_0$, donde V_0 es una constante y x viene dado en metros. (*a*) Dibujar el campo eléctrico debido a este potencial. (*b*) La distribución de carga responsable de este potencial es: (1) una lámina plana cargada negativamente colocada en $x = 0$, (2) una carga puntual, (3) una lámina plana cargada positivamente en el plano $x = 0$, o (4) una esfera uniformemente cargada con su centro en el origen.

11 •• Si E es constante sobre una superficie conductora, ¿significa esto que σ es constante? Explique su respuesta. SSM

12 •• Tres cargas puntuales idénticas y positivas están en los vértices de un triángulo equilátero. Si la longitud de cada lado se reduce a una cuarta parte de su longitud original, ¿cuál es el factor de reducción de su energía potencial electrostática? (La energía potencial electrostática se aproxima a cero si la longitud de cada lado del triángulo tiende a infinito.)

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

13 • Estimar la diferencia de potencial existente entre una nube de tormenta y la Tierra, sabiendo que el campo eléctrico de ruptura dieléctrica del aire es aproximadamente $3{,}0 \times 10^6$ V/m. SSM

14 • Para que salte la chispa en el motor de un automóvil, la anchura del arco voltaico necesario debe ser aproximadamente igual al grosor de la cartulina de la cubierta de un libro. Como la mezcla de aire y gas está altamente comprimida en el cilindro, el campo para el que se produce la ruptura dieléctrica es, aproximadamente, de $2{,}0 \times 10^7$ V/m. Estimar la máxima diferencia de potencial a través de dicho arco voltaico cuando el motor está en marcha.

15 • Podemos suponer que el "radio" de un protón es 10^{-15} m. Dos protones con momentos iguales y de signo contrario colisionan frontalmente. Estimar la mínima energía cinética (en MeV) de cada uno para que colisionen a pesar de la repulsión electrostática. Hacerlo sin considerar la relatividad. *Ayuda: la energía en reposo del protón es 938 MeV. Si el valor de la energía cinética es mucho menor que ésta, puede considerarse justificado el hacer el cálculo no relativista.*

16 • Si después de andar sobre una alfombra en un día seco tocamos a un compañero, puede saltar una chispa a una distancia de 2 mm. Estimar la diferencia de potencial entre nosotros y el compañero antes de saltar la chispa.

17 • Estimar la densidad de carga superficial máxima que puede existir en la punta de un pararrayos para que no se produzca la ruptura dieléctrica del aire.

18 •• La intensidad del campo eléctrico de la Tierra es alrededor de 300 V/m. (*a*) Estimar la densidad de carga en la superficie de la Tierra. (*b*) Estimar la carga total de la Tierra (*c*) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico en la superficie de la Tierra? (Asumir que el potencial en el infinito es cero.) (*d*) Si toda la energía potencial electrostática de la Tierra pudiera ser utilizada y convertida en energía eléctrica con un rendimiento razonable, ¿cuánto tiempo podría satisfacer el consumo doméstico en los Estados Unidos si se asume que éste es de alrededor de 500 kW · h de energía eléctrica por cada mes?

DIFERENCIA DE POTENCIAL ELECTROSTÁTICO, ENERGÍA ELECTROSTÁTICA Y CAMPO ELÉCTRICO

19 • Una partícula puntual tiene una carga igual a $+2{,}00$ μC y está en el origen. (*a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto que está a 4,00 m del origen, asumiendo que el potencial en el infinito es cero? (*b*) ¿Cuánto trabajo deberá hacerse para llevar una segunda partícula con carga $+3$ μC desde el infinito hasta una distancia de 4,00 m de la de $+2$ μC?

20 •• Dos placas conductoras paralelas poseen densidades de carga iguales y opuestas, de modo que el campo eléctrico entre ellas es aproximadamente uniforme. La diferencia de potencial entre las placas es 500 V y están separadas 10 cm. Se deja en libertad un electrón desde el reposo en la placa negativa. (*a*) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico entre las placas? (*b*) ¿Qué placa está a potencial más elevado, la positiva o la negativa? (*c*) Hallar el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando un electrón se mueve desde la placa negativa a la positiva. Expresar la respuesta en electronvolts y en joules. (*d*) ¿Cuál es la variación de energía potencial del electrón cuando se mueve desde la placa negativa hasta la positiva? (*e*) ¿Cuál es su energía cinética cuando llega a la placa positiva?

21 •• Un campo eléctrico uniforme de valor 2 kN/C está en la dirección $+x$. Se deja en libertad una carga puntual $Q = 3$ μC que está inicialmente en reposo en el origen. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V(4\text{ m}) - V(0)$? (*b*) ¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga desde $x = 0$ hasta $x = 4$ m? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética de la carga cuando está en $x = 4$ m? (*d*) Calcular el potencial $V(x)$ si se toma $V(x)$ como cero para $x = 0$.

22 •• La distancia entre los iones K^+ y Cl^- en el KCl es $2{,}80 \times 10^{-10}$ m. Calcular la energía necesaria para separar los dos iones considerando que se trata de cargas puntuales que se encuentran inicialmente en reposo. (*b*) Si se aporta dos veces la energía calculada en el apartado (*a*), ¿cuál será la energía cinética de los dos iones cuando lleguen al infinito? Expresar la respuesta en eV.

23 •• En un acelerador de Van de Graaff se liberan los protones desde el reposo, a un potencial de 5 MV y éstos se desplazan a través del vacío hasta una región con potencial cero. (*a*) Calcular la velocidad final de los protones de 5 MeV. (*b*) Si la variación de potencial es uniforme a lo largo de una distancia de 2,0 m, calcular el campo eléctrico acelerador. SSM

24 •• Un cañón de electrones dispara estas partículas contra la pantalla de un tubo de televisión. Los electrones parten del reposo y se aceleran dentro de una diferencia de potencial de 30 000 V. (*a*) ¿Qué zona es de mayor potencial, la pantalla o la posición inicial del electrón? (*b*) ¿Cuál es la energía de los electrones al chocar contra la pantalla, expresada en electronvolts y (*b*) en joules? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de los electrones al chocar con la pantalla del tubo de televisión?

25 ••• (*a*) Una partícula cargada positivamente describe una trayectoria antes de colisionar de frente con un núcleo pesado cargado positivamente que inicialmente está en reposo. La partícula tiene inicialmente una energía cinética K_i. Además, la partícula está inicialmente alejada del núcleo. Deducir una expresión para la mínima distancia a la que llegan las dos cargas en función de la energía cinética inicial, K_i, de la partícula, la carga ze de la partícula y la carga Ze del núcleo, donde z y Z son enteros. (*b*) Encontrar un valor numérico para la distancia mínima entre una partícula α de 5,00 MeV y un núcleo de oro en reposo y entre otra partícula α de 9 MeV y otro núcleo de oro en reposo. (Los valores 5,00 y 9,00 MeV son las energías cinéticas de las partículas α. Despreciar el movimiento del núcleo de oro después de la colisión.) (*c*) El radio del núcleo de oro es de 7×10^{-15} m. Si la partícula α se aproximase más de esa distancia, experimentaría la interacción fuerte además de la fuerza eléctrica de repulsión. En los primeros años del siglo XX, antes de que se descubriera la interacción nuclear fuerte Ernest Rutherford bombardeó núcleos de oro con partículas α que tenían energías cinéticas de unos 5 MeV. ¿Podría poner de manifiesto esta experiencia la interacción fuerte? Explique sus respuestas.

POTENCIAL DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

***Nota:* en todos los problemas de esta sección, asumir, a no ser que se diga otra cosa, que el potencial eléctrico es cero en puntos alejados de todas las cargas.**

26 • Cuatro cargas puntuales de 2 μC se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 4 m de lado. Calcular el potencial en el centro del cuadrado (tomando como potencial cero el correspondiente al infinito) si (*a*) todas las cargas son positivas, (*b*) tres de las cargas son positivas y la otra negativa y (*c*) dos son positivas y las otras dos negativas.

27 • Tres cargas puntuales están en el eje *x*: q_1 en el origen, q_2 en $x = 3$ m y q_3 en $x = 6$ m. Calcular el potencial en el punto $x = 0$, $y = 3$ m si (*a*) $q_1 = q_2 = q_3 = 2\ \mu$C, (*b*) $q_1 = q_2 = 2\ \mu$C y $q_3 = -2\ \mu$C y (*c*) $q_1 = q_3 = 2\ \mu$C y $q_2 = -2\ \mu$C. (Asumir que el potencial es cero lejos de donde están las cargas.) SSM

28 • Los puntos *A*, *B* y *C* están en los vértices de un triángulo equilátero de 3 m de lado. Cargas iguales positivas de 2 μC están en *A* y *B*. (*a*) ¿Cuál es el potencial del punto *C*? (Asumir que el potencial es cero lejos de donde están las cargas.) (*b*) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de 5 μC desde el infinito hasta el punto *C* si se mantienen fijas las otras cargas? (*c*) ¿Cuánto trabajo adicional se requiere para mover los +5,00 μC desde el punto C hasta la mitad del segmento *AB*?

29 •• Tres partículas puntuales idénticas con carga *q* se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero circunscrito en una circunferencia de radio *a* que está en el plano $z = 0$ y centrada en el origen. La carga *q* y el radio *a* son +3 μC y 60,0 cm, respectivamente. (Asumir que el potencial es cero lejos de las cargas.) (*a*) ¿Cuál es el potencial en el origen? (*b*) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el origen? (*c*) ¿Cuáles serían si las cargas estuvieran en la circunferencia pero una de ellas no estuviera en un vértice del triángulo? Explicar las respuestas.

30 •• Dos cargas puntuales *q* y *q'* están separadas por una distancia *a*. En un punto a la distancia $a/3$ de *q* y a lo largo de la línea que une las dos cargas, el potencial es cero. (Asumir que el potencial es cero lejos de las cargas.) (*a*) ¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?
(1) Las cargas tienen el mismo signo.
(2) Tienen signo opuesto.
(3) El signo no puede determinarse con los datos aportados.

(*b*) ¿Cuáles de estas otras afirmaciones son ciertas?
(1) $|q| > |q'|$.
(2) $|q| < |q'|$.
(3) $|q| = |q'|$.
(4) Los valores absolutos de las cargas no se pueden determinar con los datos del problema.

(*c*) Determinar la relación q/q'.

31 •• Dos cargas positivas $+q$ están en el eje *x* en $x = +a$ y $x = -a$. (*a*) Hallar el potencial $V(x)$ como una función de *x* para todos los puntos situados en el eje *x*. (*b*) Representar $V(x)$ en función de *x*. SSM

32 •• Se sitúa una carga puntual de $+3e$ en el origen y una segunda carga de $-2e$ en el eje *x* a la distancia $x = a$. (*a*) Dibujar la función potencial $V(x)$ en función de *x* para todo valor de *x*. (*b*) ¿Para qué punto o puntos es $V(x)$ igual a cero? (*c*) ¿En qué puntos del eje *x*, si los hay, el el campo eléctrico es cero? ¿Son estas posiciones las mismas que las encontradas en la parte (*b*)? Explicar las respuestas. (*d*) ¿Cuál es el trabajo que hay que realizar para llevar una tercera carga $+e$ al punto $x = \frac{1}{2}a$ sobre el eje *x*?

33 ••• Un dipolo consiste de dos cargas puntuales iguales y de signo opuesto, *q* y $-q$, separadas una distancia dada. Si el centro del dipolo se localiza en el origen y su eje se alinea con el eje *z* (figura 23.32), la distancia entre las cargas es *L*. Sea $\vec{r}$ el vector posición del punto donde se desea calcular el campo y θ el ángulo de $\vec{r}$ con el eje *z*. (*a*) Demostrar que a grandes distancias del dipolo (es decir $r \gg L$), el potencial generado por el dipolo es $V(r, \theta) \approx k\vec{p} \cdot \hat{r}/r^2 = kp\cos\theta/r^2$, donde $\vec{p}$ es el momento dipolar, y θ el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{p}$. (*b*) ¿En qué puntos en la región $r \gg L$, aparte del infinito, el campo eléctrico es cero? SSM

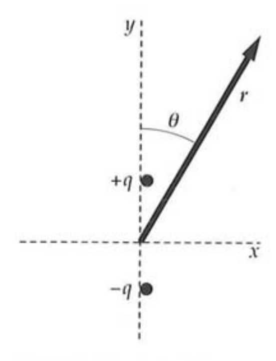


FIGURA 23.32
Problema 33

34 ••• Una configuración de cargas consiste en tres cargas puntuales situadas en el eje *z* (figura 23.33). Una, que está en el origen, tiene una carga igual a $-2q$ y las otras dos, que están en $z = +L$ y $z = -L$, tienen cargas $+q$ y $-q$, respectivamente. Esta configuración puede considerarse como si fueran dos dipolos: uno centrado en $z = +L/2$ y otro en $z = -L/2$. Cada uno de estos dipolos tiene un momento dipolar, cuyo módulo es *qL*. Los dos dipolos forman un *cuadrupolo* (existen otras agrupaciones geométricas de dipolos que equivalen a cuadrupolos pero nos son lineales.) (*a*) Usando el resultado del problema 33, demostrar que a grandes distancias del cuadrupolo (es decir, $r >> L$), el potencial eléctrico viene dado por $V_{\text{quad}}(r, \theta) = 2kB\cos^2\theta/r^3$, donde $B = qL^2$ (*B* es el módulo del momento cuadrupolar de la configuración de cargas.) (*b*) Demostrar que en la dirección positiva del eje *z*, este potencial implica la existencia de un campo eléctrico (para $z \gg L$) de $\vec{E} = (6kB/z^4)\hat{k}$. (*c*) Mostrar cómo se puede obtener el resultado de la parte (*b*) mediante el cálculo del campo eléctrico de las tres cargas.

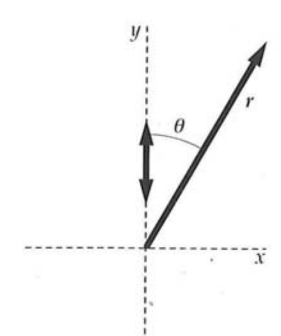


FIGURA 23.33
Problema 34

DETERMINACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL

35 • Un campo eléctrico uniforme tiene el sentido de las x negativas. Los puntos a y b están en el eje x, a en $x = 2$ m y b en $x = 6$ m. (*a*) ¿Es positiva o negativa la diferencia de potencial $V_b - V_a$? (*b*) Si el valor de $|V_b - V_a|$ es 100 kV, ¿cuál es el valor del campo eléctrico E?

36 • Un campo eléctrico viene dado por la expresión $\vec{E} = bx^3\hat{i}$, donde $b = 2{,}00$ kV/m^4. Calcular la diferencia de potencial entre el punto $x = 1{,}00$ m y $x = 2{,}00$ m ¿Cuál de estos puntos es de mayor potencial?

37 •• El campo eléctrico en el eje x debido a una carga puntual colocada en el origen viene dado por $\vec{E} = (b/x^2)\hat{i}$, donde $b = 6{,}00$ kV·m y $x \neq 0$. (*a*) Obtener el valor y el signo de la carga puntual y (*b*) la diferencia de potencial entre los puntos $x = 1{,}00$m y $x = 2{,}00$ m ¿Cuál de estos puntos es de mayor potencial?

38 •• El potencial debido a una distribución particular de carga se mide en diversos puntos a lo largo del eje x como se muestra en la figura 23.34. ¿Para qué valor (o valores) del intervalo $0 < x < 10$ m es $E_x = 0$? ¿En qué punto o puntos el potencial es cero? Explique sus respuestas.

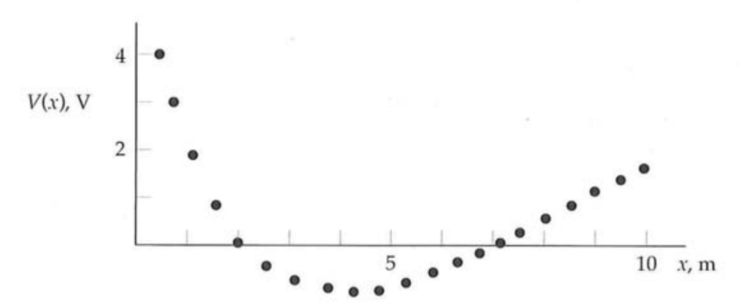


FIGURA 23.34 Problema 38

39 •• Tres cargas iguales se encuentran sobre el plano xy. Dos de ellas están sobre el eje y en $y = -a$ e $y = +a$, y la tercera está en el eje x en $x = a$. (*a*) ¿Cuál es el potencial $V(x)$ debido a estas cargas en un punto del eje x? (*b*) Determinar E_x a lo largo del eje x a partir de la función potencial $V(x)$. Comprobar las respuestas de (*a*) y (*b*) en el origen y para $x = \infty$ para ver si se obtienen los resultados esperados.

CÁLCULO DE *V* PARA DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

40 • Una carga q de $+10^{-8}$ C está distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de 12 cm de radio (asumir que el potencial es cero muy lejos de las cargas). (*a*) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo en el exterior de la corteza y justo en el interior de la misma? (*b*) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico justo en el exterior y justo en el interior de la corteza? (*c*) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el centro de la corteza? (*d*) ¿Cuál es el módulo del campo eléctrico en dicho punto?

41 • Una línea de carga infinita con densidad lineal de carga $+1{,}50$ μC/m está en el eje z. Calcular el potencial eléctrico a estas distancias de la línea de carga: (*a*) 2,00 m, (*b*) 4,00 m, y (*c*) 12,0 m. Asumir que $V = 0$ a una distancia de 2,5 m de la línea de carga. SSM

42 • (*a*) Determinar la máxima carga neta que puede ponerse en un conductor esférico de radio 16 cm antes de que suceda la ruptura dieléctrica. (*b*) ¿Cuál es el potencial de la esfera cuando tiene la carga máxima? (Asumir que el potencial es cero muy lejos de donde están las cargas.)

43 • Determinar la máxima densidad superficial de carga que existe en la superficie de un conductor antes de que ocurra la ruptura dieléctrica.

44 •• Una corteza conductora esférica de radio interior b y radio exterior c rodea concéntricamente una pequeña esfera metálica de radio $a < b$. La esfera metálica tiene una carga positiva Q. La carga total sobre la corteza esférica conductora es $-Q$. (*a*) ¿Cuál es el potencial de la corteza esférica? (*b*) ¿Cuál es el potencial de la esfera metálica?

45 •• Dos cortezas cilíndricas conductoras de gran longitud poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la exterior tiene un radio b y una carga $-q$. La longitud de cada corteza cilíndrica es L, siendo L mucho más larga que b. Hallar la diferencia de potencial existente entre las dos capas de la corteza $V_a - V_b$. SSM

46 •• Dos esferas conductoras se cargan, se sitúan muy separadas una de otra y se conectan mediante un cable largo delgado. El radio de la esfera menor es de 5 cm y el de la mayor, 12 cm. El campo eléctrico en la superficie de la esfera mayor es 200 kV/m. Determinar la densidad superficial de carga en cada esfera.

47 •• Dos conductores en forma de corteza esférica concéntrica poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la corteza exterior tiene un radio b y una carga $-q$. Hallar la diferencia de potencial existente entre las cortezas, $V_a - V_b$.

48 •• Una esfera uniformemente cargada tiene un potencial de 450 V en su superficie. A una distancia radial de 20 cm de esta superficie, el potencial es 150 V. (Asumir que el potencial es cero muy lejos de la esfera.) ¿Cuál es el radio de la esfera y cuál es su carga?

49 •• Consideremos dos láminas paralelas infinitas cargadas, una en el plano yz y la otra a una distancia $x = a$. (*a*) Hallar el potencial en todos los puntos del espacio, con $V = 0$ en $x = 0$, si las láminas llevan una densidad de carga positiva igual $+\sigma$. (*b*) Hacer lo mismo si las densidades de carga son iguales y opuestas, siendo la lámina del plano yz la que tiene la carga positiva.

50 ••• La expresión del potencial a lo largo del eje x de un disco muy estrecho cargado uniformemente es $V = 2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1\right)$ (ecuación 23.20), donde R y σ son el radio y la carga por unidad de área del disco, respectivamente. Demostrar que esta expresión se reduce a $V = kQ/|z|$ para $|z| \gg R$, donde $Q = \sigma\pi R^2$ es la carga total del disco. Explicar el porqué de este resultado. *Ayuda: usar el teorema binomial para desarrollar la raíz cuadrada.*

51 •• Una barra de longitud L tiene una carga total Q uniformemente distribuida. La barra está localizada en el eje y, con su centro en el origen. (*a*) Obtener una expresión para el potencial eléctrico a lo largo del eje x en función de la posición. (*b*) Demostrar que el resultado que se obtiene en la parte (*a*) es $V = kQ/|x|$ para $|x| \gg L$. Explicar el resultado. SSM

52 •• Una barra de longitud L tiene una carga total Q uniformemente distribuida. La barra está localizada en el eje y, con uno de sus extremos en el origen. (*a*) Obtener una expresión para el potencial eléctrico a lo largo del eje x en función de la posición. (*b*) Demostrar que el resultado que se obtiene en la parte (*a*) es $V = kQ/|x|$ para $|x| \gg L$. Explicar el resultado.

53 •• Un disco de radio R tiene una distribución de carga superficial dada por $\sigma = \sigma_0 r^2/R^2$, donde σ_0 es una constante y r es la distancia desde el centro del disco. (*a*) Determinar la carga total del disco. (*b*) Obte-

ner una expresión para el campo eléctrico a una distancia z del centro del disco en su eje perpendicular que pasa por el centro. SSM

54 ••• Un disco de radio R tiene una distribución de carga superficial dada por $\sigma = \sigma_0 R/r$, donde σ_0 es una constante y r es la distancia desde el centro del disco. (*a*) Determinar la carga total del disco. (*b*) Obtener una expresión para el potencial eléctrico a una distancia z del centro del disco en su eje perpendicular que pasa por el centro.

55 •• Una barra de longitud L y carga Q uniformemente distribuida a lo largo de su longitud está colocada sobre el eje x con su centro en el origen. (*a*) ¿Cuál es el potencial en función de x para $x > L/2$? (*b*) Demostrar que para $x >> L/2$, el resultado se reduce al debido a una carga puntual Q.

56 ••• Un círculo de radio a se extrae del centro de un disco de radio b (una corona circular de radios a y b) que está uniformemente cargado con una densidad superficial de carga σ. (*a*) Obtener una expresión para el potencial en el eje x a una distancia x del centro del disco. (*b*) Demostrar que para $x >> b$, el potencial eléctrico en el eje de la corona uniformemente cargada se puede aproximar a kQ/x, donde $Q = \sigma\pi(b^2 - a^2)$ es su carga total.

57 ••• La expresión para el potencial eléctrico dentro de una esfera sólida uniformemente cargada es $V(r) = \dfrac{kQ}{2R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$, donde R es el radio de la esfera y r la distancia desde el centro. Esta expresión se dedujo en el ejemplo 23.12. En este problema, se debe deducir la misma expresión considerando la esfera como un conjunto de capas esféricas y calculando el potencial total en un punto interior como suma del generado por las capas. El potencial dV a una distancia r del centro de la esfera de una capa esférica uniformemente cargada con radio r' y una carga dQ viene dado por la expresión $dV = dQ/r$ para $r \geq r'$ y $dV = dQ/r'$ para $r \leq r'$ (ecuación 23.22). Considerar una esfera de radio R y carga Q uniformemente distribuida y calcular V en un punto interior de la esfera (es decir $r < R$). (*a*) Obtener la expresión para la carga dQ de una capa esférica de radio r' y grosor dr'. (*b*) Obtener la expresión del potencial debido a esta capa en r, donde $r \leq r' \leq R$. (*c*) Integrar el resultado de la parte (*b*) desde $r' = r$ hasta $r' = R$ para calcular el potencial en r debido a toda la carga en la región más alejada que r del centro de la esfera. (*d*) Obtener una expresión para dV en r debido a la carga de la capa esférica de radio r' y anchura dr', siendo $r' \leq r$. (*e*) Integrar la expresión de la parte (*d*) desde $r' = 0$ hasta $r' = r$ para calcular el potencial en r debida a la carga contenida en puntos más próximos que r del centro de la esfera. (*f*) Calcular el potencial V en r sumando el resultado de la parte (*c*) con el de la parte (*e*).

58 •• Calcular el potencial eléctrico en un punto $R/2$ del centro de la esfera de una capa esférica uniformemente cargada de radio R y carga Q (asumir que el potencial es cero lejos de la capa).

59 •• Se extrae un círculo de radio a del centro de un disco uniformemente cargado de radio a formando una corona circular de radios inferior a y superior b. Demostrar que el potencial en un punto en el eje del disco a distancia z de su centro viene dado por $V(z) = 2\pi k\sigma(\sqrt{z^2 + b^2} - \sqrt{z^2 + a^2})$, donde σ es la densidad de carga del disco. SSM

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

60 • Una lámina infinita plana tiene una densidad superficial de carga igual a $3{,}5\ \mu C/m^2$. ¿Qué separación tienen las superficies equipotenciales cuya diferencia de potencial es de 100 V?

61 •• Considerar dos planos infinitos uniformemente cargados con una carga del mismo valor absoluto, pero de signo opuesto. (*a*) ¿Cómo son las superficies equipotenciales entre ellos? (*b*) ¿Cómo son fuera de la región entre los planos estas superficies equipotenciales? Razonar las respuestas. SSM

62 •• Un tubo Geiger está formado por dos elementos: una capa cilíndrica de metal y un hilo recto en el eje del cilindro. Considerar que tanto el hilo como el cilindro son infinitamente largos. El hilo central está cargado positivamente y la capa cilíndrica está negativamente cargada. La diferencia de potencial entre hilo y cilindro es de 1,00 kV. (*a*) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico dentro del tubo? (*b*) ¿Qué elemento está a mayor potencial? (*c*) ¿Qué forma tienen las superficies equipotenciales dentro del tubo? (*d*) Suponer que entre dos de estas superficies equipotenciales existe una diferencia de potencial de 10 V. ¿Tienen estas dos superficies equipotenciales la misma separación cerca del hilo que la que tendrían cerca del cilindro? ¿En dónde están más separadas las superficies equipotenciales? Explicar las respuestas.

63 •• Suponer que el cilindro del tubo Geiger del problema 62 tiene un diámetro interior de 4,00 cm y el hilo de 0,500 mm. El cilindro está conectado a tierra, de forma que su potencial es cero. (*a*) ¿Cuál es el radio de la superficie equipotencial de 500 V? ¿Esta superficie está más próxima al hilo o al cilindro? (*b*) ¿Qué separación existe entre las superficies equipotenciales que están a 200 y 225 V? (*c*) Comparar los resultados de la parte (*b*) con los que se obtienen entre dos superficies equipotenciales de 700 V y 725 V, respectivamente ¿Qué podemos concluir de esta comparación con respecto a la intensidad del campo eléctrico como función de la distancia del hilo central? SSM

64 •• Una partícula puntual puesta en el origen tiene una carga de 11,1 nC. (*a*) ¿Qué forma tienen las superficies equipotenciales en la región alrededor de la carga? (*b*) Asumiendo que el potencial es cero en el infinito, calcular los radios de 5 superficies que tienen potenciales de 20,0 V, 40,0 V, 60,0 V, 80,0 V, y 100,0 V, y hacer un dibujo a escala centrado en la carga. (*c*) ¿Están espaciadas estas superficies por igual? Explicar la respuesta. (*d*) Estimar la intensidad del campo eléctrico entre las superficies equipotenciales de 40,0 V y 60,0 V dividiendo la diferencia entre los dos potenciales por la diferencia de sus dos radios. Comparar esta estimación con el valor exacto en el punto medio entre las dos superficies.

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

65 • Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x: q_1 en el origen, q_2 en $x = 3$ m y q_3 en $x = 6$ m. Determinar la energía potencial electrostática de esta distribución de carga si (*a*) $q_1 = q_2 = q_3 = 2\ \mu C$, (*b*) $q_1 = q_2 = 2\ \mu C$ y $q_3 = -2\ \mu C$ y (*c*) $q_1 = q_3 = 2\ \mu C$ y $q_2 = -2\ \mu C$. (Asumir que la energía potencial es cero cuando las cargas están muy lejos entre sí.)

66 • En los vértices de un triángulo equilátero de lado 2,5 m se encuentran las cargas puntuales q_1, q_2 y q_3. Determinar la energía potencial electrostática de esta distribución de carga si (*a*) $q_1 = q_2 = q_3 = 4{,}2\ \mu C$, (*b*) $q_1 = q_2 = 4{,}2\ \mu C$ y $q_3 = -4{,}2\ \mu C$, (*c*) $q_1 = q_2 = -4{,}2\ \mu C$ y $q_3 = +4{,}2\ \mu C$. (Asumir que la energía potencial es cero cuando las cargas están muy lejos entre sí.)

67 •• (*a*) ¿Cuánta carga hay en la superficie de un conductor esférico aislado que tiene un radio de 10 cm y se carga a 2,00 kV? (*b*) ¿Cuál es la energía potencial electrostática de este conductor? (Asumir que el potencial es cero lejos de la esfera.) SSM

68 ••• Cuatro cargas puntuales de módulo 2 μC se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado 4 m. Hallar la energía potencial electrostática si (*a*) todas las cargas son negativas, (*b*) tres de las cargas son positivas y una es negativa, (*c*) las cargas de dos vértices adyacentes son positivas y las otras dos son negativas, y (*d*) las cargas en dos vértices opuestos son positivas y las otras dos negativas. (Asumir que la energía potencial es cero cuando las cargas están muy lejos entre sí.)

69 •• En los vértices de un cuadrado centrado en el origen y de lado $2a$, se encuentran cuatro cargas del modo siguiente: q en $(-a, +a)$; $2q$ en (a, a); $-3q$ en $(a, -a)$; y $6q$ en $(-a, -a)$. Una quinta partícula que tiene masa m y carga $+q$ se sitúa en el origen y se deja libre desde el reposo. Determinar el módulo de su velocidad cuando se encuentra a gran distancia del origen. SSM

70 •• Considerar dos partículas puntuales cargadas con $+e$ separadas $1{,}50 \times 10^{-15}$ m que están en reposo. (*a*) ¿Cuánto trabajo se requiere hacer para llevarlas a su posición final desde una distancia muy larga? (*b*) Si se les permite separarse, ¿qué velocidad adquirirán cada una de ellas cuando estén a una distancia doble de la que tenían en el momento inicial? (*c*) La masa de cada partícula es 1,00 u (1,00 uma) ¿Qué velocidad tendrán cuando estén muy lejos la una de la otra?

71 ••• Considerar un electrón y un protón que están inicialmente en reposo separados 2,00 nm. Despreciando el movimiento del protón por ser de mucha mayor masa que el electrón, ¿cuál es la mínima (*a*) energía cinética y (*b*) velocidad con la que el electrón deberá ser proyectado para que el electrón llegue a estar a 12,0 nm del protón? (*c*) ¿A qué distancia llegará el electrón del protón cuando tenga el doble de la energía cinética inicial?

PROBLEMAS GENERALES

72 • Un dipolo eléctrico está formado por una carga positiva de $4{,}8 \times 10^{-19}$ C separada de una carga negativa de igual valor absoluto por $6{,}4 \times 10^{-10}$ m. ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico en un punto situado a $9{,}2 \times 10^{-10}$ m de cada una de las dos cargas?

73 • Dos cargas positivas $+q$ están sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$. (*a*) Determinar el potencial para cualquier punto del eje x. (*b*) Utilizar los resultados de (*a*) para calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje x. SSM

74 • Si una esfera conductora se carga a un potencial de 10,0 kV, ¿cuál es el mínimo radio que debe tener la esfera para que el campo eléctrico cerca de la superficie no exceda del necesario para producir la ruptura dieléctricca del aire?

75 •• **HOJA DE CÁLCULO** Dos hilos infinitos paralelos contienen densidades lineales de carga λ y $-\lambda$, respectivamente. Los hilos son paralelos al eje z y están contenidos en el plano xz. El hilo con carga positiva corta al eje x en $x = -a$ y el de carga negativa en $x = +a$. (*a*) Eligiendo el origen como punto de referencia en el cual el potencial es cero, expresar el potencial en un punto cualquiera (x, y) del plano xy en función de x, y, λ y a. Utilizar esta expresión para determinar el potencial en un punto cualquiera del eje y. (*b*) Usando los datos $a = 5{,}00$ cm y $\lambda = 5{,}00$ nC/m, obtener la ecuación para la superficie equipotencial del plano xy que pasa por el punto $x = 0{,}25a$, $y = 0$. (*c*) Usar la hoja de cálculo para representar la superficie equipotencial obtenida en la parte (*b*). SSM

76 •• La curva equipotencial cuya gráfica ha sido obtenida en el problema 75 se parece a una circunferencia. (*a*) Demostrar matemáticamente que es una circunferencia. (*b*) La circunferencia equipotencial en el plano xy es la intersección de la superficie equipotencial en el espacio de tres dimensiones con el plano xy. Describir brevemente la superficie equipotencial en el espacio tridimensional.

77 ••• Un modelo válido para el átomo de hidrógeno puede ser el de una carga puntual, que representa al protón, cuyo valor es $+|e|$, rodeada por una carga negativa, que representa al electrón, cuya densidad de carga es $\rho = \rho_0 e^{-2r/a}$ (expresión que atribuye la Mecánica Cuántica a dicha carga electrónica), donde $a = 0{,}523$ nm es la distancia más probable de separación del electrón con respecto del protón. (*a*) Calcular el valor de ρ_0 para que la carga total sea nula, que es la condición de neutralidad eléctrica del átomo. (*b*) Calcular el potencial electrostático (relativo al infinito) a una distancia r del protón.

78 •• En el generador de Van de Graff se transfiere carga a la cúpula mediante una correa a razón de 200 μC/s cuando el potencial entre la correa y la cúpula es de 1,25 MV. La cúpula transfiere carga a la atmósfera con la misma velocidad, de tal forma que la diferencia de potencial de 1,25 MV se mantiene ¿Qué potencia mínima se necesita para mover la correa y mantener la diferencia de potencial de 1,25 MV?

79 •• Una carga puntual positiva $+Q$ está localizada en el punto $x = -a$. (*a*) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una segunda carga puntual igual y positiva $+Q$ desde el infinito a $x = +a$? (*b*) Si tenemos dos cargas iguales positivas en $x = -a$ y $x = +a$, ¿cuánto trabajo se requiere para desplazar una tercera carga $-Q$ desde el infinito hasta el origen? (*c*) ¿Cuánto trabajo es necesario para mover la carga $-Q$ desde el origen hasta el punto $x = 2a$ a lo largo de una trayectoria semicircular (figura 23.35)?

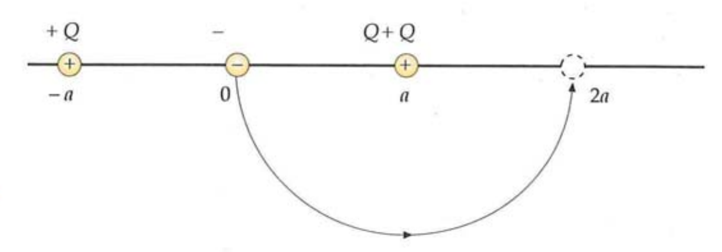


FIGURA 23.35 Problema 79

80 •• Una carga de 2 nC está uniformemente distribuida alrededor de un anillo de radio 10 cm que tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x. Una carga puntual de 1 nC está localizada en $x = 50$ cm. Determinar el trabajo necesario para desplazar la carga puntual.

81 •• Los centros de dos esferas metálicas de radio 10 cm están separados 50 cm sobre el eje x. Las esferas son inicialmente neutras, pero una carga Q se transfiere de una esfera a la otra, creando una diferencia de potencial entre las esferas de 100 V. Un protón se libera desde el reposo en la superficie de la esfera positivamente cargada y se mueve hacia la esfera cargada negativamente. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética del protón justo en el instante en que choca con la esfera de carga negativa? ¿A qué velocidad choca contra la esfera negativa?

82 • **HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Utilizando un programa de hoja de cálculo, representar $V(z)$ en función de x para un anillo uniformemente cargado situado en el plano yz, usando $V(z) = kQ/\sqrt{a^2 + z^2}$ (ecuación 23.19). (*b*) ¿En qué punto $V(z)$ es máximo? ¿Cuál es el valor de E_z en este punto?

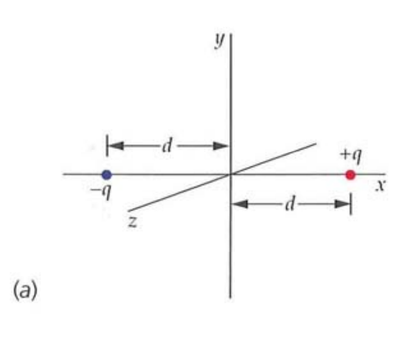
83 •• Un conductor esférico de radio R_1 está cargado a 20 kV. Cuando se conecta mediante un fino y largo alambre a una segunda esfera conductora situada lejos de él, su potencial cae a 12 kV. ¿Cuál es el radio de la segunda esfera?

84 •• Una esfera metálica centrada en el origen tiene una densidad superficial de carga $\sigma = 24{,}6$ nC/m^2. En $r = 2{,}0$ m, el potencial es 500 V y el módulo del campo eléctrico es 250 V/m. (Asumir que el potencial es cero lejos de la esfera.) Determinar el radio de la esfera metálica. (*b*) ¿Cuál es el signo de la carga de la esfera? Explique la respuesta.

85 •• Un disco uniformemente cargado genera, en un punto situado en su eje a 0,6 m de su centro, un potencial de 80 V y un campo eléctrico cuyo módulo es 80 V/m. A una distancia de 1,5 m, el potencial es 40 V y el módulo del campo eléctrico es 23,5 V/m. Determinar la carga total contenida en el disco. (Asumir que el potencial es cero lejos de la esfera.)

86 •• El núcleo ^{210}Po radiactivo emite partículas α de carga $+2e$ que a gran distancia del núcleo tienen una energía de 5,30 MeV. Suponer que la partícula alfa, en el instante en que se forma y escapa del núcleo, está a una distancia R del centro del núcleo hijo ^{206}Pb, cuya carga es $+82e$. Determinar el radio del núcleo ^{206}Pb. (Despreciar el radio de la partícula α y asumir que el núcleo ^{206}Pb permanece en reposo.)

87 ••• (*a*) La configuración *A* está formada por dos cargas puntuales, una con carga $+q$ en el eje x en $x = +d$ y otra $-q$ en $x = -d$ (figura 23.36*a*). Asumiendo que el potencial es cero a grandes distancias de este sistema de cargas, demostrar que el potencial es cero en cualquier punto del plano $x = 0$. (*b*) La configuración *B* está formada por una carga puntual q que está a una distancia d de una superficie plana infinita conductora y conectada a tierra (figura 23.36*b*). La carga puntual tiene una carga igual a $+q$ y el plano, al estar conectado a tierra, tiene potencial cero. Tomamos la línea perpendicular al plano y que pasa por el punto donde está la carga $+q$ como eje x y tomamos el origen en la superficie de la placa conductora más cercana a la partícula. (Con estas condiciones la partícula está en $x = +d$.) Para la configuración *B*, el potencial eléctrico es cero en todos los puntos del plano ($x = 0$), tal como es en la configuración *A*. Además, en esta configuración *B*, el potencial es cero en los puntos que están muy alejados de él y de la partícula, de tal forma que se puedan considerar en el infinito. El *teorema de unicidad* demuestra que, en el semiespacio de $x > 0$, el potencial y, por lo tanto, el campo eléctrico son idénticos para las dos configuraciones. Utilizando este resultado, calcular el campo $\vec{E}$ en cualquier punto del plano yz de la segunda configuración. (El teorema de unicidad nos demuestra que el campo eléctrico en cada punto del plano yz es idéntico para ambas configuraciones.) Utilizar el resultado obtenido para calcular la densidad superficial de carga σ en cualquier punto del plano conductor de la primera configuración. SSM



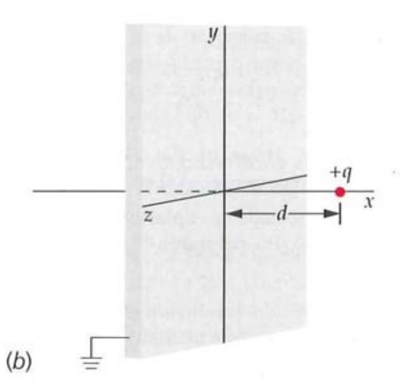


FIGURA 23.36
Problema 87

88 ••• Una partícula de masa m que posee una carga positiva q está restringida a moverse a lo largo del eje x. En los puntos $x = -L$ y $x = L$ hay dos cargas anulares de radio L (figura 23.37). Cada anillo está centrado sobre el eje x y localizado en un plano perpendicular al mismo, con la misma carga positiva Q. (*a*) Obtener una expresión del potencial debido a las cargas anulares en función de x. (*b*) Demostrar que en esta región $V(x)$ pasa por un mínimo para $x = 0$. (*c*) Demostrar que para $x << L$, el potencial es de la forma $V(x) = V(0) + ax^2$. (*d*) Utilizando el resultado de la parte (*c*), deducir una expresión para la frecuencia angular de oscilación de la masa m si se desplaza ligeramente del origen y se deja libre. (Asumir que el potencial es cero en puntos alejados de los anillos.)

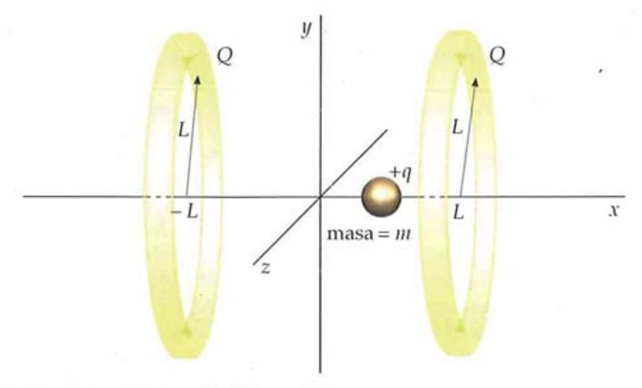


FIGURA 23.37 Problema 88

89 ••• Tres cortezas conductoras esféricas y concéntricas poseen radios a, b y c, siendo $a < b < c$. Inicialmente, la corteza interna está descargada, la del medio posee una carga positiva $+Q$ y la exterior una carga negativa $-Q$. (*a*) Hallar el potencial eléctrico de las tres cortezas. (*b*) Si las cortezas interna y externa se conectan mediante un alambre que está aislado al pasar a través de la corteza media, ¿cuál es el potencial eléctrico de cada una de las tres cortezas? ¿Cuál es la carga final de cada corteza?

90 ••• Consideremos dos cortezas metálicas esféricas y concéntricas de radios a y b, siendo $b \geqslant a$. La corteza exterior posee una carga Q, pero la corteza interior está conectada a tierra. Esto significa que la corteza interior posee un potencial cero y que hay líneas de campo eléctrico que abandonan la corteza exterior y se dirigen al infinito, pero también existen otras que se dirigen desde la corteza externa a la interna. Determinar la carga de la corteza interna.

91 ••• Demostrar que el trabajo necesario para formar una densidad uniforme de carga en una esfera de carga Q y radio R viene dado por $3Q^2/(20\pi\epsilon_0 R)$, donde U es la energía potencial electrostática de la esfera. *Sugerencia: considerar r como la densidad de carga de la esfera cargada con carga Q y radio R. Calcular el trabajo dW necesario para llevar una carga dq desde el infinito a la superficie de una esfera cargada uniformemente de radio r (r < R) y densidad de carga ρ. (No se requiere ningún trabajo para esparcir la carga dq en la capa esférica de radio r, grosor dr y densidad de carga ρ.)* SSM

92 ••• (*a*) Utilizando el resultado del problema 91, calcular el radio clásico del electrón, radio de una esfera uniformemente cargada con carga $-e$, considerando que la energía electrostática es igual a la energía en reposo de esta partícula, cuyo valor es $5{,}11 \times 10^5$ eV. Analizar los defectos de este modelo para el electrón. (*b*) Repetir el cálculo de la parte (*a*) para un protón cuya energía en reposo es 938 MeV. Los experimentos indican que el protón tiene un radio aproximado de $1{,}2 \times 10^{-15}$ m ¿Se aproxima el resultado obtenido en la parte (*b*) al valor del radio obtenido experimentalmente?

93 ••• (*a*) Considerar una esfera uniformemente cargada de radio R y carga Q compuesta de un fluido incompresible, tal como es el agua. Si la esfera se separa en dos mitades de igual volumen y carga, y ambas llegan a estabilizarse adquiriendo forma esférica, ¿cuál es el radio R' de las nuevas esferas? (*b*) Usando la expresión de la energía potencial obtenida en el problema 91, calcular la variación de la energía potencial electrostática del sistema después de la división de la primera esfera de fluido en las otras dos, asumiendo que éstas están separadas una gran distancia SSM

94 ••• El problema 93, con algunas modificaciones, se puede utilizar como modelo muy simple de fisión nuclear. Cuando el núcleo ^{235}U absorbe un neutrón, éste se puede dividir en dos fragmentos ^{140}Xe y ^{94}Sr, más dos neutrones. El ^{235}U tiene 92 protones, mientras que los átomos de ^{140}Xe y ^{94}Sr tienen 54 y 38, respectivamente. Estimar la energía liberada en MeV por esta fisión nuclear, asumiendo que la densidad de masa del núcleo es constante, siendo su valor r aproximadamente igual a 4×10^{17} kg/m^3.



CAPÍTULO 24

LA ENERGÍA PARA EL DESTELLO LUMINOSO DE UNA CÁMARA FOTOGRÁFICA SE OBTIENE DE UN CONDENSADOR EXISTENTE EN EL PROPIO DISPOSITIVO DEL *FLASH*. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

Capacidad



¿Cómo se determina la energía almacenada en un condensador? (Véase el ejemplo 24.3.)

¿Cuántas personas puede haber hoy en día que no dispongan de cámaras digitales, teléfonos móviles con o sin cámara digital, o cualquiera de los dispositivos electrónicos portátiles? Prácticamente, todos los dispositivos electrónicos portátiles tienen uno o más condensadores y hoy en día es impensable vivir sin estos instrumentos electrónicos. En la vida cotidiana nos comunicamos con las personas de nuestro entorno con teléfonos móviles, disfrutamos escuchando música con un reproductor Mp3 e incluso revisamos nuestro correo electrónico y enviamos mensajes mediante los dispositivos PDA (*Personal Digital Assistant*).

En los capítulos anteriores, estudiamos la relación entre campo eléctrico y cargas, y cómo la interacción entre cargas se convierte en energía potencial eléctrica. A continuación, demostraremos que la energía potencial se puede almacenar y transmitir utilizando la capacidad eléctrica.

En este capítulo, se analizan circuitos con baterías y condensadores. En los próximos capítulos, se tratan con más detalle los conceptos de potencial eléctrico y capacidad eléctrica aplicándolos a circuitos que contienen inductores, resistencias y otros dispositivos.

24.1 CAPACIDAD

El potencial de un único conductor aislado, que contiene una carga Q, es proporcional a esta carga y depende del tamaño y forma del conductor. En general, cuanto mayor es la superficie del conductor, mayor es la cantidad de carga que puede almacenar para un determinado potencial. Por ejemplo, el potencial de un conductor esférico de radio R, portador de una carga Q es

$$V = \frac{kQ}{R}$$

Esta ecuación para una esfera aislada, $V = kQ/R$, ya se estableció en el capítulo 23 (ecuación 23.22). La relación Q/V entre la carga y el potencial de un conductor aislado se denomina capacidad C. Un **condensador** es un dispositivo constituido por dos conductores, uno de ellos cargado con carga Q y el otro con $-Q$. La relación entre la carga Q y la diferencia de potencial existente entre los dos conductores se define como **capacidad** del condensador.



Los condensadores se usan en un gran número de dispositivos electrónicos de uso cotidiano, como la televisión. Algunos condensadores pueden usarse para almacenar energía, aunque la mayoría de ellos se usan como filtros de frecuencias eléctricas que no se desea aplicar a los correspondientes circuitos. (© *Tom Pantages Images.*)

$$C = \frac{Q}{V} \qquad 24.1$$

DEFINICIÓN: CAPACIDAD

Esta magnitud mide la "capacidad" de almacenar carga para una determinada diferencia de potencial. Como el potencial es siempre proporcional a la carga, esta relación no depende ni de Q ni de V, sino sólo del tamaño y forma del conductor. La capacidad de un conductor esférico es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \qquad 24.2$$

La unidad del SI de capacidad es el coulomb por volt, conocida como **farad** (F) en honor al gran físico experimental inglés, Michael Faraday:

$$1\ \text{F} = 1\ \text{C/V} \qquad 24.3$$

Como el farad es una unidad relativamente grande, se utilizan frecuentemente los submúltiplos como el microfarad ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F) o el picofarad ($1\ \text{pF} = 10^{-12}$ F). Como la capacidad se mide en farads y R en metros, en la ecuación 24.2 vemos que la unidad del SI de permitividad del vacío, ϵ_0, se expresa en farads por metro:

$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} = 8{,}85\ \text{pF/m} \qquad 24.4$$

CONSTANTE ELÉCTRICA

PROBLEMA PRÁCTICO 24.1

Determinar el radio de un conductor esférico que tiene la capacidad de 1 F.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 24.1

Una esfera de capacidad C_1 contiene una carga de 20 μC. Si la carga crece hasta 60 μC, ¿cuál es la nueva capacidad C_2?

El ejercicio anterior nos muestra que el farad es ciertamente una unidad muy grande.

CONDENSADORES

Un sistema de dos conductores portadores de cargas iguales y opuestas constituye un condensador. Habitualmente, un condensador se carga transfiriendo una carga Q de un conductor al otro, con lo cual uno de los conductores queda con la carga $+Q$ y el

otro con $-Q$. La capacidad del dispositivo se define por el cociente Q/V, donde Q es el valor absoluto de la carga de cualquiera de los conductores y V el valor absoluto de la diferencia de potencial existente entre los conductores. Para calcular la capacidad, situamos cargas iguales y opuestas en los conductores y después determinamos la diferencia de potencial V a partir del campo eléctrico $\vec{E}$ que se genera entre ellos.

Cuando hablamos de la carga de un condensador, nos referimos a la carga de cualquiera de los conductores. El uso de V en lugar de ΔV para la diferencia de potencial existente entre las placas es habitual y simplifica muchas de las ecuaciones relacionadas con la capacidad.

El primer condensador fue la *botella de Leyden* (figura 24.1), un recipiente de vidrio recubierto exterior e interiormente con láminas de oro. Fue inventada en el siglo XVIII en la Universidad de Leyden (Holanda) cuando uno de los experimentadores, que estaba estudiando los efectos de las cargas eléctricas sobre las personas y los animales, tuvo la idea de almacenar una gran cantidad de carga en una botella de agua. Para ello, sostenía la botella en una mano mientras la carga procedente de un generador electrostático era conducida hasta el agua por medio de una cadena. Cuando trató de sacar la cadena del agua con la otra mano, sufrió una sacudida eléctrica que le dejó inconsciente. Benjamin Franklin comprobó que el dispositivo para almacenar cargas no debía tener necesariamente la forma de botella y utilizó en su lugar vidrios de ventana recubiertos de hojas metálicas, que se llamaron vidrios de Franklin. Con varios de estos vidrios conectados en paralelo, Franklin almacenó una gran carga y con ello trató de matar un pavo. En su lugar, sufrió él mismo una fuerte descarga. Más tarde, Franklin escribió: "Trataba de matar un pavo y por poco no maté un ganso".



FIGURA 24.1 Un vaso tipo Leyden con dos campanillas. Una de las campanillas se conecta a través del tapón metálico que está unido a un conductor en la superficie interna del vaso. La segunda campanilla se conecta fuera de la superficie exterior del vaso. Se carga el sistema colocando una batería entre las dos campanillas durante un plazo de tiempo breve. Se quita la batería y se pone una bolita metálica que, balanceándose entre las dos campanillas, transfiere una pequeña cantidad de carga. *(Gentileza de Bernhard Thomas.)*

CONDENSADORES DE PLACAS PARALELAS

Un condensador común es el **condensador de placas paralelas**, formado por dos grandes placas conductoras paralelas. En la práctica, las placas pueden ser láminas metálicas muy finas, separadas y aisladas una de otra por una lámina delgada de plástico. Este "sandwich" se enrolla, dando lugar a una superficie grande concentrada en un espacio pequeño. Sea A el área de cada placa y d la distancia de separación, que es pequeña comparada con la longitud y anchura de las placas. Situamos una carga $+Q$ en una placa y $-Q$ en la otra. Estas cargas se atraen entre sí y se distribuyen uniformemente por las superficies interiores de las placas. Como las placas están muy próximas, el campo en cualquier punto situado entre ellas es, aproximadamente, igual al campo debido a dos planos infinitos con cargas iguales y opuestas. Cada placa contribuye con un campo uniforme de módulo $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ (ecuación 22.21) resultando así un campo total $E = \sigma/\epsilon_0$, siendo $\sigma = Q/A$ la carga por unidad de área de cada una de las placas. Como el campo que existe entre las placas de este condensador es uniforme (figura 24.2), la diferencia de potencial entre las placas es igual al campo $\vec{E}$ multiplicado por la separación de las placas, d:

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d = Qd/(\epsilon_0 A) \qquad 24.5$$

donde hemos sustituido σ por Q/A. La capacidad del condensador de placas paralelas es, por lo tanto,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/(\epsilon_0 A)} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad 24.6$$

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS

Obsérvese que como V es proporcional a Q, la capacidad no depende de Q ni de V. En un condensador de placas paralelas, la capacidad es proporcional a la superficie de las placas e inversamente proporcional a la distancia de separación. En general, la capacidad depende del tamaño, forma, geometría y posición relativa de los conductores y también de las propiedades del medio aislante que los separa, tal como veremos en la sección 24.4.

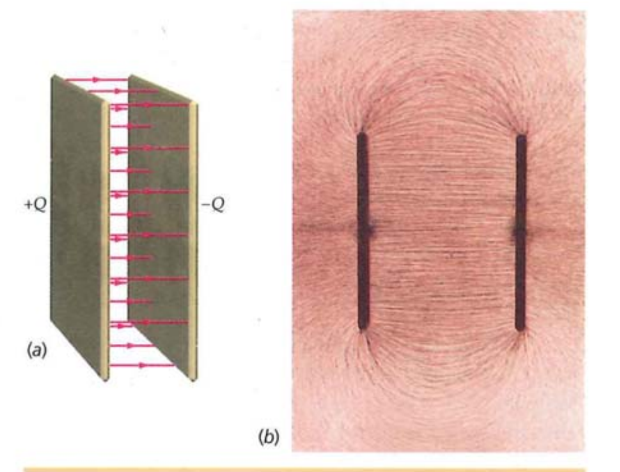


FIGURA 24.2 (*a*) Las líneas del campo eléctrico entre las placas de un condensador plano están separadas por el mismo espacio, lo que indica que el campo es uniforme en dicha zona. (*b*) Las líneas de campo eléctrico entre las placas de un condensador plano pueden visualizarse mediante pequeñas porciones de hilo suspendidas en aceite. *(Harold M. Waage.)*

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de la capacidad

PLANTEAMIENTO Se hace un dibujo esquemático del condensador, que incluye una placa conductora con carga $+Q$ y otra con carga $-Q$.

SOLUCIÓN

1. Determinar el campo eléctrico $\vec{E}$, normalmente usando el teorema de Gauss.
2. Determinar la diferencia de potencial entre las dos placas (entre los dos conductores) resolviendo la integral $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ (ecuación 23.2*a*).
3. La capacidad es $C = Q/V$.

COMPROBACIÓN Comprobar que el resultado depende solamente de la constante dieléctrica* y de factores geométricos tales como longitudes y superficies.

Ejemplo 24.1 Capacidad de un condensador de placas paralelas

Un condensador de placas paralelas está formado por dos conductores cuadrados de lado 10 cm separados por 1 mm de distancia. (*a*) Calcular su capacidad. (*b*) Si este condensador está cargado con 12 V, ¿cuánta carga se transfiere de una placa a la otra?

PLANTEAMIENTO La capacidad C viene determinada por el área y la separación de las placas. Una vez calculada C, la carga correspondiente a un determinado voltaje V se obtiene a partir de la definición de capacidad $C = Q/V$.

SOLUCIÓN

(*a*) Determinamos la capacidad a partir de la ecuación 24.6:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8{,}85\ \text{pF/m})(0{,}10\ \text{m})^2}{0{,}0010\ \text{m}} = 88{,}5\ \text{pF} = \boxed{89\ \text{pF}}$$

(*b*) La carga transferida se determina a partir de la definición de capacidad:

$$Q = CV = (88{,}5\ \text{pF})(12\ \text{V}) = 1{,}06 \times 10^{-9}\ \text{C} = \boxed{1{,}1\ \text{nC}}$$

COMPROBACIÓN La expresión de la parte (*b*) tiene unidades de farads multiplicado por volts. Como $1\ \text{F} = 1\ \text{C}/1\ \text{V}$ (ecuación 24.3), el producto de farads y volts es igual a coulombs, que es la unidad de carga.

OBSERVACIÓN Q es el valor absoluto de la carga existente en cada placa del condensador. En este caso, Q corresponde aproximadamente a $6{,}6 \times 10^9$ electrones.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.2 ¿Qué dimensiones deberían tener las placas del ejemplo para que la capacidad fuese de 1 F?

CONDENSADORES CILÍNDRICOS

Un condensador cilíndrico consta de un pequeño cilindro o alambre conductor de radio R_1 y una corteza cilíndrica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior. Un cable coaxial, como el utilizado en la televisión por cable, puede considerarse como un condensador cilíndrico. La capacidad por unidad de longitud de un cable coaxial es importante en la determinación de las características de transmisión del cable.

* La capacidad depende también de las propiedades del material aislante que se coloque entre las placas conductoras del condensador. Esta dependencia se estudia en la sección 24.4.

Ejemplo 24.2 Expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico

Determinar la expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico formado por dos conductores de longitud L. Un cilindro tiene de radio R_1 y el otro es una corteza cilíndrica coaxial de radio interno R_2, siendo $R_1 < R_2 << L$, como indica la figura 24.3.

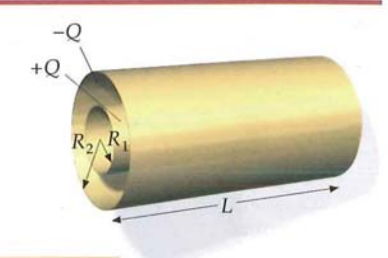


FIGURA 24.3

PLANTEAMIENTO Disponemos la carga $+Q$ en el conductor interno y la carga $-Q$ en el conductor externo, y calculamos la diferencia de potencial $V = V_{R_2} - V_{R_1}$ a partir del campo eléctrico que se genera entre los conductores, el cual puede calcularse por medio de la ley de Gauss. Como el campo eléctrico no es uniforme (depende de R), debemos integrar $\vec{E}$ para determinar la diferencia de potencial.

SOLUCIÓN

1. La capacidad se define por la relación Q/V:

$$C = Q/V$$

2. V está relacionado con el campo eléctrico:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

3. Para determinar E_R, tomamos una superficie cilíndrica gausiana de radio R y longitud ℓ situada entre los conductores ($R_1 < R < R_1$). La superficie gausiana se encuentra lejos de los extremos de los conductores (figura 24.4):

FIGURA 24.4

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\,dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. Lejos de los extremos de las placas, el campo $\vec{E}$ es radial. Por lo tanto, el flujo de $\vec{E}$ en las bases del cilindro es cero. El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi R\ell$. Entonces, la ley de Gauss proporciona el siguiente resultado:

donde $$\oint_S E_n\,dA = \int_{\text{izq}} E_n\,dA + \int_{\text{lateral}} E_n\,dA + \int_{\text{der}} E_n\,dA$$
$$= 0 + \int_{\text{lateral}} E_R\,dA + 0 = E_R\int_{\text{lateral}} dA = E_R 2\pi R\ell$$

5. Sustituyendo $\oint_S E_n\,dA$ en el paso anterior, se obtiene:

$$E_R 2\pi R\ell = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

6. Asumiendo que la carga por unidad de longitud está distribuida uniformemente en la placa interior, obtenemos la carga encerrada por la superficie gausiana, Q_{interior}:

$$\frac{Q_{\text{interior}}}{Q} = \frac{\ell}{L} \quad \text{entonces,} \quad Q_{\text{interior}} = \frac{\ell}{L}Q$$

7. Sustituyendio la carga por unidad de longitud en el resultado del paso 5 y despejando E_R, se obtiene:

$$E_R 2\pi R\ell = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\ell}{L}Q \quad \text{así, tenemos} \quad E_R = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0 R}$$

8. Integramos para obtener $V = |V_{R_2} - V_{R_1}|$:

$$V_{R_2} - V_{R_1} = \int_{V_{R_1}}^{V_{R_2}} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E_R\,dR = -\frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R} = -\frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

por tanto, $$V = |V_{R_2} - V_{R_1}| = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

9. Del resultado anterior, se deduce C:

$$C = \frac{Q}{V} = \boxed{\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 9 es dimensionalmente correcto. Las capacidades siempre tienen la dimensión de ϵ_0 multiplicado por longitud.

OBSERVACIÓN La capacidad de un condensador cilíndrico es proporcional a la longitud de los conductores. La integración en el paso 4 es muy fácil porque, por simetría, el campo E_R es el mismo en todos los puntos de la superficie gausiana entre los dos conductores.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 24.2

¿Cómo se modifica la capacidad si el potencial a través de un condensador cilíndrico se incrementa de 20 a 80 V?

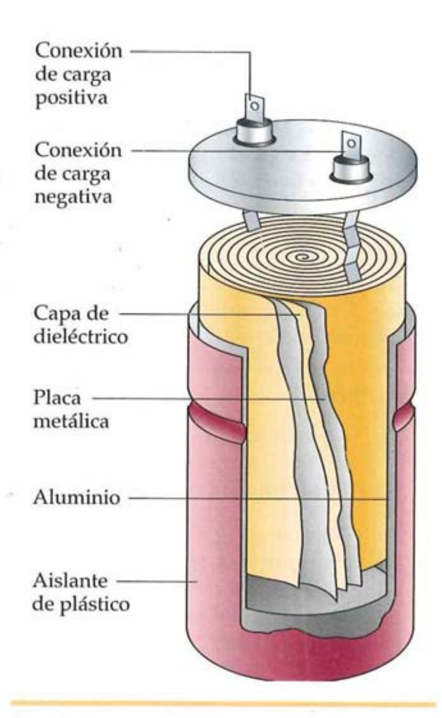
El ejemplo 24.2 nos muestra que la capacidad de un condensador cilíndrico es

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \qquad 24.7$$

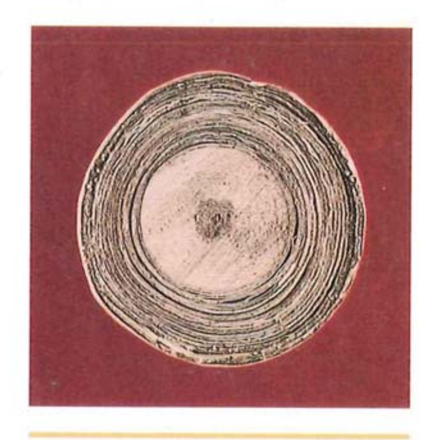
CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR CILÍNDRICO



Un cable coaxial es un largo condensador cilíndrico con un alambre grueso como conductor interno y una malla de hilo metálico como conductor externo. El revestimiento de plástico ha sido parcialmente eliminado para mostrar los conductores y el aislante de plástico blanco que los separa. Un trenzado de hilo metálico constituye el apantallamiento que bloquea los campos magnéticos externos y salvaguarda de interferencias a la información de interés (tal como las señales de audio y vídeo) que circula por el cable interno. *(John Perry Fish.)*



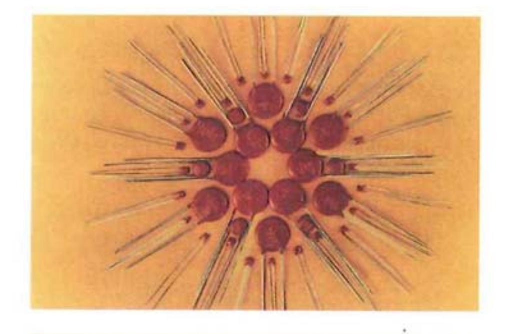
Sección transversal de un condensador electrolítico. El dieléctrico es un aislante.



Sección transversal de un condensador de lámina enrollada. *(© Bruce Iverson.)*



Condensador variable con espaciado de aire, muy utilizado en los circuitos de sintonía de los antiguos aparatos de radio. Las placas semicirculares giran entre las placas fijas, cambiando la cantidad de área superficial enfrentada y, por lo tanto, la capacidad. *(Loren Winters/Visuals Unlimited.)*



Condensadores cerámicos con aplicaciones en los circuitos electrónicos. *(Gentileza de Tusonix, Tucson, AZ.)*

24.2 ALMACENAMIENTO DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA

Cuando un condensador se carga, se transfieren electrones del conductor cargado positivamente al cargado negativamente. Entonces, el conductor cargado positivamente tiene un déficit de electrones cuyo valor es idéntico al superávit del conductor que está cargado negativamente. Una opción alternativa es cargar el condensador transfiriendo cargas positivas del conductor negativo al positivo. Cualquiera que sea el método empleado, la energía potencial electrostática almacenada en el condensador procederá del trabajo necesario para colocar las diferentes cargas en cada una de sus placas.

Consideramos inicialmente dos conductores descargados que no están en contacto entre sí. Sea q la carga transferida al cabo de cierto tiempo durante el proceso de cargar el condensador. La diferencia de potencial es entonces $V = q/C$. Si se transfiere ahora una pequeña cantidad adicional de carga dq desde el conductor negativo a potencial cero hasta el conductor positivo a un potencial V (figura 24.5), la energía potencial del condensador se incrementa en

$$dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

La energía potencial U es la suma o integral de los incrementos de esta energía procedentes de las transferencias de carga desde que ésta es cero hasta que toma su valor final Q (figura 24.6):

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Esta energía potencial es la energía almacenada en el condensador. Dado que $C = Q/V$ podemos expresar esta energía de varios modos:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \qquad 24.8$$

ENERGÍA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR

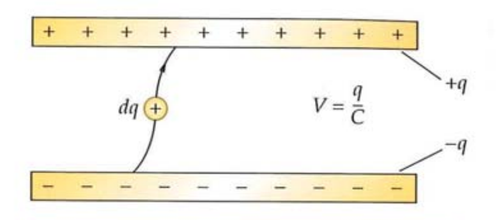


FIGURA 24.5 Cuando una pequeña cantidad de carga dq se mueve desde el conductor negativo hacia el conductor positivo, su energía potencial se incrementa en $dU = V\,dq$, donde V es la diferencia de potencial entre los conductores.

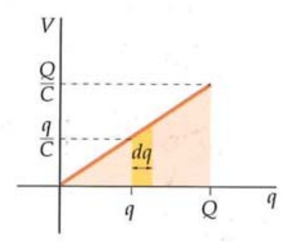


FIGURA 24.6 El trabajo necesario para cargar un condensador resulta ser la integral de $V\,dq$ desde la carga original $q = 0$ hasta la carga final $q = Q$. Este trabajo es igual al área triangular, de anchura Q y altura Q/C, encerrada debajo de la curva.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.3

Un condensador de 185 μF se carga a 200 V. ¿Cuánta energía puede almacenar este condensador?

PROBLEMA PRÁCTICO 24.4

Deducir la expresión de la energía electrostática almacenada en un condensador (ecuación 24.8) a partir de la ecuación 23.29, utilizando $Q_1 = -Q$, $Q_2 = +Q$, $n = 2$, y $V_2 = V_1 + V$.

Cargamos un condensador conectándolo a una batería. La diferencia de potencial V del condensador cuando está totalmente cargado, con una carga Q, coincide con la que existía entre los bornes de la batería antes de que se conectara al condensador. La energía total aportada por la batería al cargar el condensador es QV, es decir, el doble de la energía electrostática almacenada por el condensador. La energía adicional que aporta la batería se disipa en forma de energía térmica en la propia batería, y en los hilos que se utilizan para conectar la batería y el condensador,* y también puede ser irradiada como energía electromagnética en forma de ondas.†

Ejemplo 24.3 Proceso de carga de un condensador de placas paralelas con una batería

Un condensador de placas paralelas y cuadradas, de lado 14 cm y separadas 2,0 mm se conecta a una batería y se carga a 12 V. (*a*) ¿Cuál es la carga del condensador? (*b*) ¿Cuánta energía se almacena originalmente en el condensador? (*c*) Se desconecta entonces la batería del condensador y la separación de las placas se incrementa a 3,5 mm. ¿En cuánto se incrementa la energía al modificar la separación de las placas?

PLANTEAMIENTO (*a*) La carga depositada sobre el condensador puede calcularse a partir de la capacidad y luego utilizarse para calcular la energía en (*b*). (*c*) Al separar el condensador de la batería, la carga en las placas permanece constante. El crecimiento de la energía se determina calculando la nueva energía a partir de la carga y el nuevo potencial y restándole la energía original.

* En la sección 25.6, veremos que si el condensador está conectado a una batería por cables de resistencia R, la mitad de la energía suministrada por la batería se disipa en forma de calor en los cables.

† En la sección 30.3, veremos que, bajo ciertas condiciones, el circuito actúa como una antena emisora, de tal forma que una parte significativa del trabajo se transforma en emisión de radiación electromagnética.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La carga del condensador es igual al producto de C_0 por V_0, donde C_0 es la capacidad y $V_0 = 12$ V el voltaje de la batería:

$$Q = C_0V_0$$

2. Calcular la capacidad del condensador de placas paralelas, mediante la ecuación 24.6:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0}$$

3. Sustituir en el paso 1 para calcular Q:

$$Q = C_0V_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0}V_0 = \frac{(8{,}85\ \text{pF/m})(0{,}14\ \text{m})^2}{0{,}0020\ \text{m}}(12\ \text{V}) = 1{,}04\ \text{nC}$$

$$= \boxed{1{,}0\ \text{nC}}$$

(*b*) Calcular la energía original almacenada:

$$U_0 = \tfrac{1}{2}QV_0 = \tfrac{1}{2}(1{,}04\ \text{nC})(12\ \text{V}) = 6{,}24\ \text{nJ} = \boxed{6{,}2\ \text{nJ}}$$

(*c*) 1. Se desconecta la batería y se incrementa la separación entre placas a 3,5 mm. Entonces, la variación de la energía es proporcional al cambio de voltaje:

$$\Delta U = U - U_0 = \tfrac{1}{2}QV - \tfrac{1}{2}QV_0 = \tfrac{1}{2}Q(V - V_0)$$

2. El voltaje es el campo eléctrico multiplicado por la distancia de separación d:

$$V = Ed \quad \text{y} \quad V_0 = E_0d_0$$

3. En la superficie del conductor, la intensidad del campo es proporcional a la densidad de carga $\sigma = Q/A$. Como Q es constante, también lo es σ y así tenemos que E es igual a:

$$E = E_0$$

4. Combinando los dos últimos pasos, tenemos que V es proporcional a d:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{d_0} \quad \text{así, tenemos} \quad V = \frac{d}{d_0}V_0$$

5. Sustituir V en la ecuación del paso 1 de la parte (*c*) con el valor obtenido en el paso 4 de esta misma parte (*c*). Calcular ΔU, tomando el valor de U_0 de la parte (*b*):

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q\left(\frac{d}{d_0}V_0 - V_0\right) = \left(\frac{d}{d_0} - 1\right)\left(\frac{1}{2}QV_0\right) = \left(\frac{d}{d_0} - 1\right)U_0$$

$$= \left(\frac{3{,}5\ \text{mm}}{2{,}0\ \text{mm}} - 1\right)(6{,}24\ \text{nJ}) = \boxed{4{,}7\ \text{nJ}}$$

COMPROBACIÓN Es lógico esperar un crecimiento en la energía potencial al aumentar la separación de las placas, dado que al tener éstas cargas de diferente signo, existe una fuerza atractiva entre ellas. En consecuencia, es preciso realizar trabajo para separarlas, lo cual implica un aumento de la energía potencial del sistema.

OBSERVACIÓN La figura 24.7 muestra una aplicación de la dependencia que existe entre la capacidad y la distancia de separación.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.5 Determinar el voltaje final entre las placas del condensador.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.6 (*a*) Determinar la capacidad inicial C_0 en este ejemplo cuando la separación de las placas es 2,0 mm. (*b*) Calcular la capacidad final C cuando la separación de las placas es 3,5 mm.

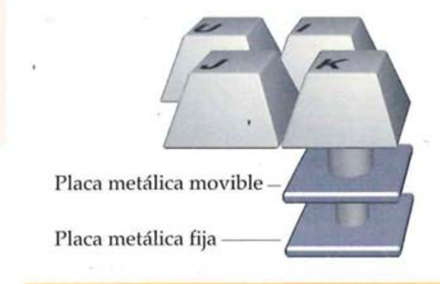


FIGURA 24.7 Interruptor de capacidades del teclado de un ordenador. Una placa metálica acoplada a cada tecla actúa como tope de un condensador. Al oprimir la tecla, disminuye la separación entre la placa superior y la inferior y crece la capacidad, lo cual pone en marcha el circuito electrónico del ordenador que actúa en consecuencia.

Es interesante resolver el apartado (*c*) del ejemplo 24.3 por un camino distinto. Como las placas de un condensador poseen cargas opuestas, se ejercen entre sí fuerzas atractivas. Para aumentar la separación de las placas tendrá que realizarse un trabajo en contra de estas fuerzas. Supongamos que se fija la placa inferior y desplazamos la superior. La fuerza que actúa sobre esta placa superior es igual al producto de la carga Q de la placa multiplicada por el campo eléctrico $\vec{E}'$ *debido a la placa inferior*. Este campo es igual a la mitad del campo total $\vec{E}$ existente entre las placas, ya que la carga de la placa superior también contribuye igualmente al

campo. Cuando la diferencia de potencial es de 12 V y la separación es de 2 mm, el campo total entre las placas es

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12\text{ V}}{2{,}0\text{ mm}} = 6{,}0\text{ V/mm} = 6{,}0\text{ kV/m}$$

El módulo de la fuerza ejercida sobre la placa superior por la placa inferior es, por lo tanto,

$$F = QE' = Q(\tfrac{1}{2}E) = (1{,}04\text{ nC})(3{,}0\text{ kV/m}) = 3{,}1\ \mu\text{N}$$

Entonces, el trabajo que debe realizarse para desplazar la placa superior una distancia $\Delta d = 1{,}5$ mm, será

$$W = F\,\Delta d = (3{,}1\ \mu\text{N})(1{,}5\text{ mm}) = 4{,}7\text{ nJ}$$

Esta cantidad de joules es igual a la calculada en el apartado (*c*) del ejemplo 24.3. Es decir, el trabajo realizado es igual al incremento de energía almacenada.

ENERGÍA DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO

En el proceso de carga de un condensador, se crea un campo eléctrico entre las placas. El trabajo necesario para cargar el condensador puede considerarse como el requerido para crear el campo eléctrico. Es decir, la energía almacenada en el condensador reside en el campo eléctrico y, por ello, se llama **energía del campo electrostático**.

Consideremos un condensador de placas paralelas. Es posible relacionar la energía almacenada en el condensador con el campo eléctrico E existente entre las placas. La diferencia de potencial entre las placas está relacionada con el campo eléctrico por $V = Ed$, donde d es su separación. Y la capacidad viene dada por $C = \epsilon_0 A/d$ (ecuación 24.8). La energía almacenada es

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(Ad)$$

El producto Ad es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador, que contiene el campo eléctrico. La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía** u_e, cuyo valor en un campo eléctrico E es

$$u_e = \frac{energía}{volumen} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad 24.9$$

DENSIDAD DE ENERGÍA DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

Así, la energía por unidad de volumen del campo electrostático es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. *Aunque la ecuación 24.9 se ha obtenido considerando el campo eléctrico comprendido entre las placas de un condensador de placas paralelas, el resultado es válido para cualquier campo eléctrico.* Siempre que exista un campo eléctrico en el espacio, la energía electrostática por unidad de volumen viene dada por la ecuación 24.9.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.7

(*a*) Calcular la densidad de energía u_e del ejemplo 24.3 cuando la separación de las placas es 2,0 mm.

(*b*) Demostrar que el incremento de energía del ejemplo 24.3 es igual al producto de u_e por el incremento de volumen ($A\,\Delta d$) entre las placas.

Para comprobar el carácter general de la ecuación 24.9, calcularemos la energía del campo electrostático de un conductor esférico de radio R que contiene una carga Q. La capacidad de un conductor esférico viene dada por $C = R/k$ (ecua-

ción 24.2) y la energía potencial electrostática viene dada por $U = \frac{1}{2}Q^2/C$ (ecuación 24.8). Así, para un conductor esférico tenemos:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{R/k} = \frac{kQ^2}{2R} \qquad 24.10$$

Es posible obtener este mismo resultado considerando la densidad de energía de un campo eléctrico, dada por la ecuación 24.9. Cuando el conductor es portador de una carga Q, el campo eléctrico es radial y viene dado por

$$E_r = 0 \qquad r < R \text{ (dentro del conductor)}$$

$$E_r = \frac{kQ}{r^2} \qquad r > R \text{ (fuera del conductor)}$$

Como el campo eléctrico es simétricamente esférico, elegimos un elemento infinitesimal de volumen en forma de corteza esférica. Si el radio de la corteza es r y su espesor dr, el volumen es $d\mathcal{V} = 4\pi r^2\,dr$ (figura 24.8). La energía dU de este elemento de volumen es

$$dU = u_e\,d\mathcal{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2(4\pi r^2\,dr) = \frac{1}{2}(4\pi\epsilon_0 k^2)Q^2\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}kQ^2\frac{dr}{r^2}$$

donde hemos utilizado $4\pi\epsilon_0 = 1/k$. Como el campo eléctrico es cero para $r < R$, la energía total del campo eléctrico puede obtenerse integrando desde $r = R$ hasta $r = \infty$:

$$U = \int u_e\,d\mathcal{V} = \frac{1}{2}kQ^2\int_R^\infty r^{-2}\,dr = \frac{1}{2}k\frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad 24.11$$

que es la misma ecuación 24.8.

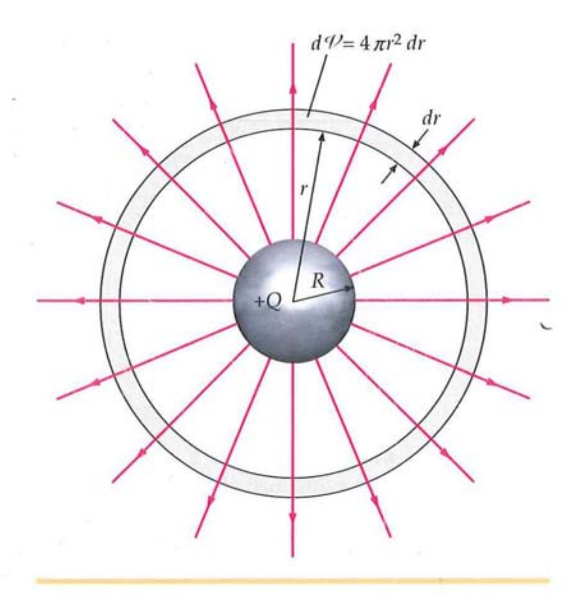


FIGURA 24.8 Geometría para el cálculo de la energía electrostática de un conductor esférico con carga Q. El volumen del espacio comprendido entre r y $r + dr$ es igual a $d\mathcal{V} = 4\pi r^2\,dr$. La energía del campo electrostático en este elemento de volumen es $u_e\,d\mathcal{V}$, donde $u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ es la densidad de energía.

24.3 CONDENSADORES, BATERÍAS Y CIRCUITOS

Examinemos lo que ocurre cuando se conecta un condensador inicialmente descargado a los bornes de una batería. La diferencia de potencial entre los bornes es el **voltaje característico** de la batería. Un terminal o borne de la batería está cargado positivamente y el otro negativamente; la diferencia de carga entre bornes se mantiene en la batería mediante reacciones químicas (figura 24.9). Dentro de la batería existe, por lo tanto, un campo eléctrico dirigido desde el borne positivo al negativo.* Cuando una de las placas de un condensador inicialmente descargado se pone en contacto con el terminal negativo, una determinada cantidad de carga negativa pasa de la batería a la placa, de tal forma que, momentáneamente, la carga del terminal negativo de la batería queda reducida. Si se conecta la otra placa del condensador al borne positivo de la batería, ocurre el mismo proceso de transferencia de carga del borne a la placa, pero en este caso se trata de carga positiva. Estas reducciones de carga en los terminales de la batería tienen como consecuencia una disminución del potencial inicial V entre bornes de la misma. Este decrecimiento del potencial activa el proceso químico en el seno de la batería, que tiene como efecto una transferencia de carga de un terminal al otro con el objeto de mantener el potencial inicial, el cual se denomina **voltaje entre bornes en circuito abierto**. La actividad química termina cuando la batería ha transferido la suficiente carga de una placa a la otra como para que entre ambas placas del condensador exista una diferencia de potencial igual a la existente entre los bornes de la batería en circuito abierto.

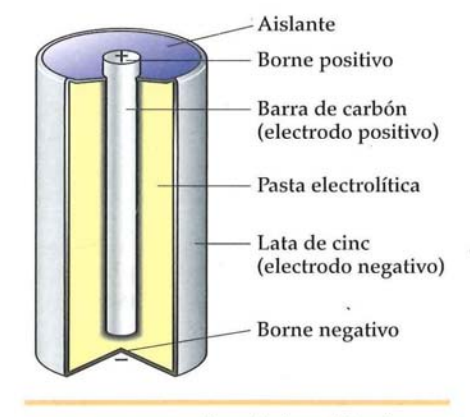


FIGURA 24.9 Batería de carbón-cinc.

* El campo eléctrico entre los bornes positivo y negativo existe tanto dentro como fuera de la batería.

Para entender el proceso, podemos imaginar que la batería efectúa un "bombeo de carga". Cuando se conecta un condensador descargado a los terminales de una batería (figura 24.10), el voltaje de los terminales cae, provocando el bombeo de carga desde una placa a la otra hasta que el voltaje en circuito abierto es restablecido.

En los diagramas de circuitos, la batería queda simbolizada por ⊣|⊢*, donde la línea más larga y delgada representa el terminal o borne positivo, y la más corta y de mayor grosor representa el negativo. El símbolo de un condensador es ⊣⊢.

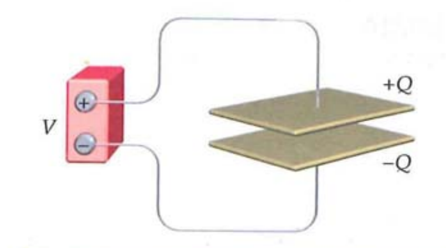


FIGURA 24.10 Cuando los conductores de un condensador descargado se conectan a los terminales de una batería, ésta transfiere carga desde un conductor al otro hasta que la diferencia de potencial entre los conductores es igual a la que existe entre los bornes de la batería en circuito abierto. La cantidad de carga transferida a través de la batería es $Q = CV$.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.8

Un condensador de 6 μF, inicialmente descargado, se conecta a los terminales de una batería de 9 V. ¿Cuál es la carga total que fluye a través de la batería?

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Ejemplo 24.4 Condensadores conectados en paralelo

Un circuito está formado por un condensador de 6 μF, otro de 12 μF, una batería de 12 V y un interruptor, conectados como se muestra en la figura 24.11. Inicialmente, el interruptor está abierto y los condensadores descargados. Se cierra el interruptor y los condensadores se cargan. Cuando los condensadores quedan completamente cargados, abrimos el circuito y el voltaje en circuito abierto de la batería queda restablecido. (*a*) ¿Cuál es el potencial de cada conductor? (Tomar como origen de potenciales el terminal negativo de la batería.) (*b*) ¿Cuál es la carga de cada una de las placas de los condensadores? (*c*) ¿Cuál es la carga total que pasa a través de la batería?

FIGURA 24.11

PLANTEAMIENTO En un conductor en equilibrio electrostático, el potencial es constante en todo él. Una vez que las cargas han dejado de moverse y se ha alcanzado la situación de equilibrio, todos los conductores conectados por hilos metálicos están al mismo potencial. La carga de un condensador y la diferencia de potencial entre sus placas están relacionadas mediante la ecuación $Q = CV$ (pasos 2 y 3). Las cargas en las placas son iguales pero de signo contrario.

SOLUCIÓN

(*a*) Marcar con color rojo el borne positivo (+) y los conductores conectados a él (figura 24.12), y con color azul el borne negativo (−) y los correspondientes conductores conectados a éste:

Todos los puntos coloreados con rojo se encuentran al potencial

$\boxed{V_a = 12\text{ V}}$

Todos los puntos en azul están a

$\boxed{V_b = 0}$

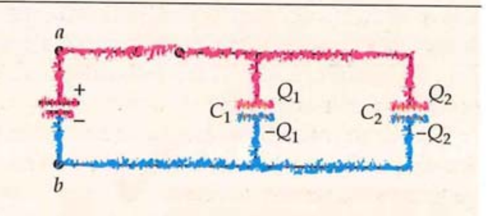


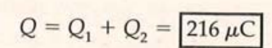
FIGURA 24.12

(*b*) Utilizar $Q = CV$ para determinar el valor de la carga de las placas. La placa que se encuentra a mayor potencial es la de la carga positiva:

$Q_1 = C_1V = (6{,}0\ \mu\text{F})(12{,}0\text{ V}) = \boxed{72\ \mu\text{C}}$

$Q_2 = C_2V = (12{,}0\ \mu\text{F})(12{,}0\text{ V}) = \boxed{144\ \mu\text{C}}$

(*c*) Las placas se cargan porque la batería les bombea carga:



$Q = Q_1 + Q_2 = \boxed{216\ \mu\text{C}}$

COMPROBACIÓN La carga en un condensador de 12,0 μF es el doble que en el de 6,0 μF cuando el voltaje es de 12 V, tal como era de esperar. La capacidad de un condensador es la capacidad para acumular carga dado un determinado voltaje.

OBSERVACIÓN La capacidad equivalente de la asociación de los condensadores es Q/V, donde Q es la carga que ha sido transferida por medio de la batería y V es el voltaje entre bornes en circuito abierto. Para el ejemplo propuesto, $C_{eq} = (216\ \mu\text{C})/(12{,}0\text{ V}) = 18{,}0\ \mu\text{F}$.

* Estudiaremos las baterías con mayor detalle en el capítulo 25. Aquí, lo que se desea transmitir es que una batería almacena y suministra energía, y bombea carga para restablecer la diferencia de potencial entre sus extremos para que la diferencia de potencial en circuito abierto sea V.

Cuando dos condensadores se conectan como indica la figura 24.13, de tal modo que las placas superiores de los dos condensadores están unidas por un alambre conductor y, por lo tanto, a un potencial común V_a, y las placas inferiores están también conectadas entre sí a un potencial común V_b, se dice que los condensadores están **conectados en paralelo**. Los dispositivos que se conectan en paralelo comparten la misma diferencia de potencial entre sus respectivos extremos *debido únicamente al modo en que están conectados*.

En la figura 24.13, se supone que los puntos a y b están conectados a una batería o a algún otro dispositivo que mantiene una diferencia de potencial $V = V_a - V_b$ entre las placas de cada condensador. Si las capacidades son C_1 y C_2, las cargas Q_1 y Q_2 almacenadas en las placas vienen dadas por

$$Q_1 = C_1V$$

y

$$Q_2 = C_2V$$

La carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V = (C_1 + C_2)V$$

Una asociación de condensadores en un circuito puede reemplazarse por un solo condensador que almacene la misma cantidad de carga para una determinada diferencia de potencial. Decimos entonces que el condensador sustituto posee una **capacidad equivalente** o efectiva. Esto es, si una asociación de condensadores inicialmente descargados se conecta a una batería, la carga Q que fluye a través de ella según se va cargando el sistema de condensadores es la misma que la que fluiría a través de la citada batería si se conectara a un condensador único con una capacidad equivalente. Por lo tanto, la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo viene determinada por la relación entre la carga $Q_1 + Q_2$ y la diferencia de potencial:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2 \qquad 24.12$$

Así pues, la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo, C_{eq} es igual a la suma de las capacidades individuales. Cuando añadimos un segundo condensador en paralelo, incrementamos la capacidad, ya que esencialmente el área del conductor crece, permitiendo que una carga mayor se almacene con la misma diferencia de potencial.

El mismo razonamiento puede extenderse a tres o más condensadores conectados en paralelo, como indica la figura 24.14:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \qquad 24.13$$

CAPACIDAD EQUIVALENTE DE CONDENSADORES EN PARALELO

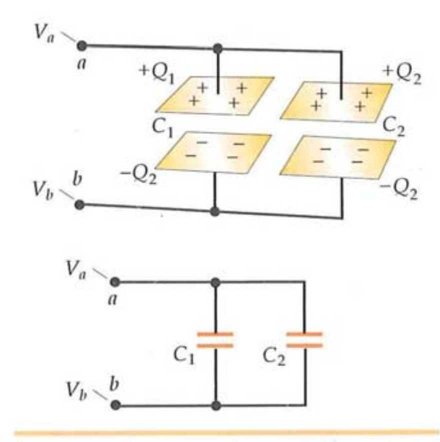


FIGURA 24.13 Dos condensadores en paralelo. Las placas superiores están conectadas entre sí y se encuentran, por lo tanto, al mismo potencial V_a; las placas inferiores están igualmente conectadas entre sí y, por lo tanto, tienen el potencial común V_b.

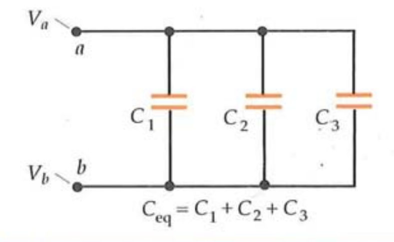


FIGURA 24.14 Tres condensadores en paralelo. El efecto de sumar un condensador en paralelo a un circuito, consiste en aumentar la capacidad efectiva.

Ejemplo 24.5 Condensadores en serie

Un circuito esta constituido por un condensador de 6 μF, otro de 12 μF, una batería de 12 V y un interruptor, conectado todo ello tal como muestra la figura 24.15. Inicialmente, el interruptor está abierto y los condensadores descargados. Cuando se cierra el interruptor, los condensadores se cargan. Una vez totalmente cargados y el voltaje en circuito abierto de la batería restablecido, (*a*) ¿cuál es el potencial de cada conductor en este circuito? (Tómese el borne negativo de la batería como punto de referencia de potencial cero.) Representar mediante símbolos los potenciales desconocidos en el circuito. (*b*) ¿Cuál es la carga en cada una de las placas de los condensadores? (*c*) ¿Cuál es la carga que atraviesa la batería?

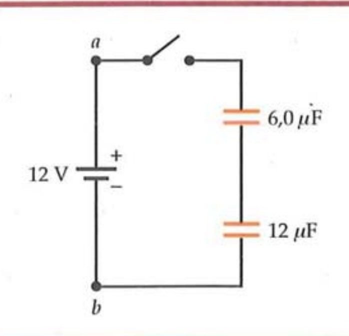


FIGURA 24.15

PLANTEAMIENTO El potencial en un conductor en equilibrio es constante en todo él. Una vez que las cargas han dejado de moverse, todos los conductores unidos con un hilo también conductor se encuentran al mismo potencial. La carga del condensador se relaciona con la diferencia de potencial mediante la expresión $Q = CV$ (apartados b y c). Las cargas no pueden pasar de una placa a otra de un condensador a través de él.

SOLUCIÓN

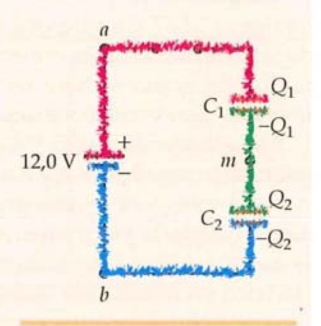


FIGURA 24.16

(*a*) Marcar en rojo el borne positivo (+) de la batería y los conductores conectados a él, en azul el negativo (−) y los correspondientes conductores conectados a éste y en verde los otros conductores conectados entre sí, tal como indica la figura 24.16:

Los puntos en rojo están a $\boxed{V_a = 12\text{ V}}$

Los puntos en azul están a $\boxed{V_b = 0}$

Los puntos en verde están a potencial todavía desconocido $\boxed{V_m}$

(*b*) 1. Expresar la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador en términos de los resultados del apartado (*a*):

$$V_1 = V_a - V_m \quad \text{y} \quad V_2 = V_m - V_b$$

2. Utilizar la expresión $Q = CV$ para relacionar carga y diferencia de potencial en cada condensador:

$$Q_1 = C_1V_1 = C_1(V_a - V_m)$$

y

$$Q_2 = C_2V_2 = C_2(V_m - V_b)$$

3. Despejando V_m, se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} V_a - V_m &= \frac{Q_1}{C_1} \\ V_m - V_b &= \frac{Q_2}{C_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

4. En el proceso de carga, no existe transferencia de ésta hacia los conductores en verde en la figura 24.16 ni desde éstos hacia los otros de diferente color, por lo que la carga neta de los conductores en verde es cero:

$$(-Q_1) + Q_2 = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad Q_1 = Q_2$$

5. $Q = Q_1 = Q_2$. Utilizar esta expresión para obtener la carga Q:

$$V_a - V_b = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{así} \quad Q = \frac{V_a - V_b}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{12\text{ V} - 0}{\dfrac{1}{6{,}0\ \mu\text{F}} + \dfrac{1}{12\ \mu\text{F}}} = 48\ \mu\text{C}$$

$$Q_1 = Q_2 = \boxed{48\ \mu\text{C}}$$

(*c*) Toda carga que pasa a través de la batería termina en la placa de mayor potencial del condensador *C1*.

$$Q_1 = Q = \boxed{48\ \mu\text{C}}$$

COMPROBACIÓN La diferencia de potencial a través de un condensador es igual a Q/C. Entonces, la diferencia de potencial entre las placas de los condensadores de 6,0 y 12,0 μF es $(48\ \mu\text{C})/(6{,}0\ \mu\text{F}) = 8{,}0$ V y $(48\ \mu\text{C})/(12\ \mu\text{F}) = 4{,}0$ V, respectivamente. La suma de estas diferencias de potencial es 8,0 V + 4,0 V = 12,0 V, como era de esperar, ya que la batería es de 12 V.

OBSERVACIÓN La capacidad equivalente de la asociación de los dos condensadores es Q/V, donde Q es la carga aportada por la batería y V el potencial de ésta en circuito abierto. Para este ejemplo, $C_{eq} = (48\ \mu\text{C})/(12\text{ V}) = 4{,}0\ \mu\text{F}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.9 Determinar el potencial V_m de los conductores coloreados en verde de la figura 24.16.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 24.3

Durante la carga de los condesadores del ejemplo 24.5, la carga neta de la batería, ¿crece, decrece o permanece constante?

Considerar el circuito de la figura 24.15. Si comenzamos en el punto *b* y seguimos un recorrido a través del circuito en sentido horario, el potencial crece en primer lugar los 12 volts de la batería y cae después 4 V en el condensador de 6 μF y 8 en el de 12 μF, de tal forma que al acabar el recorrido por el circuito en el punto *b* otra vez el potencial es como al principio. Los cambios de potencial (+12 V, −4 V, y −8 V) implican un cambio nulo de potencial a lo largo del recorrido completo en el circuito. El añadir los cambios de potencial a lo largo del circuito cerrado y comprobar que es cero, es una práctica útil en el análisis de circuitos denominada **regla de la malla de Kirchhoff**. Esta regla se cumple porque la diferencia de potencial entre dos puntos es independiente del camino recorrido para llegar a ellos.

Las suma de las diferencias de potencial a lo largo de un circuito cerrado es cero.

REGLA DE LAS MALLAS DE KIRCHHOFF

Un **nudo** es un punto en el que un cable eléctrico se divide en dos o más cables. La figura 24.17 muestra dos condensadores conectados de tal forma que una placa de un condensador se conecta a otra de otro condensador mediante un cable sin nudos, tal como se hace en el ejemplo 24.5. La disposición de conexión de esta forma se denomina conexión en **serie**.

Los condensadores C_1 y C_2 de la figura 24.17 se conectan en serie estando inicialmente descargados. Si a y b son los puntos donde se conectan los bornes de la batería, se bombean electrones desde la placa superior de C_1 hacia la inferior de C_2. Como consecuencia, la placa superior de C_1 se carga con $+Q$ y la inferior de C_2 con $-Q$. Si una carga $+Q$ se deposita en la carga superior del primer condensador, el campo eléctrico producido por dicha carga inducirá una carga negativa igual a $-Q$ en su placa inferior. Esta carga procede de los electrones extraídos de la placa superior del segundo condensador. Por lo tanto, existirá una carga igual a $+Q$ en la placa superior del segundo condensador y una carga correspondiente $-Q$ en su placa inferior. La diferencia de potencial a través del primer condensador es

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

De forma similar, la diferencia de potencial a través del segundo condensador es

$$V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

La diferencia de potencial entre los dos condensadores en serie es la suma de estas diferencias de potencial:

$$V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad 24.14$$

La capacidad equivalente de dos condensadores en serie es

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \qquad 24.15$$

donde Q es la carga que pasa a través de la batería durante el proceso de carga. Sustituyendo Q/C_{eq} por V en la ecuación 24.14 y dividiendo ambos miembros de la igualdad por Q, se obtiene

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad 24.16$$

La ecuación 24.16 puede generalizarse para tres o más condensadores conectados en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad 24.17$$

CAPACIDAD EQUIVALENTE DE CONDENSADORES EN SERIE CON LA MISMA CARGA

PROBLEMA PRÁCTICO 24.10

Dos condensadores tienen capacidades de 20 μF y 30 μF. Determinar la capacidad equivalente de estos condensadores cuando están conectados (*a*) en paralelo, (*b*) en serie.

Es preciso hacer notar que la capacidad equivalente calculada en el ejercicio anterior es menor que la de cualquiera de los condensadores acoplados en serie. Esto implica que añadiendo un condensador en serie, $1/C_{eq}$ crece y, por consiguiente, la capacidad equivalente C_{eq} decrece. Cuando añadimos un condensador conectado en serie, disminuimos la capacidad del sistema. La separación entre placas aumenta, necesitando mayor diferencia de potencial para almacenar la misma carga.

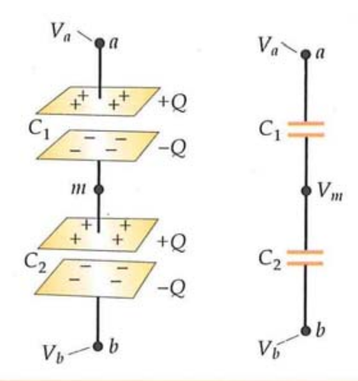
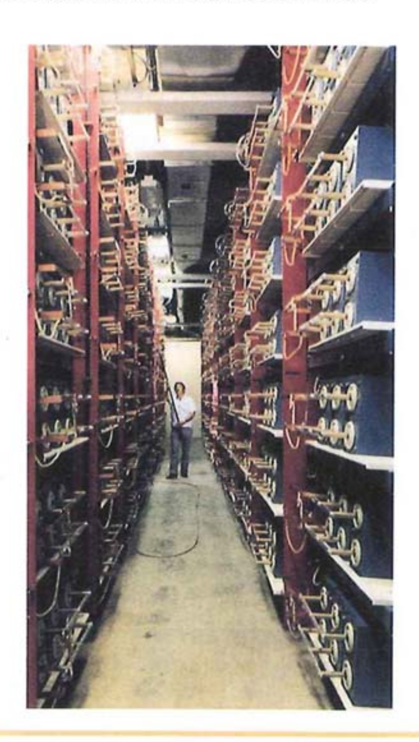


FIGURA 24.17 La carga total de las placas interconectadas de los dos condensadores es cero. La diferencia de potencial entre la primera placa del primero y la última del segundo es la suma de las diferencias de potencial entre las placas de cada uno de los condensadores. Estos condensadores están conectados en serie.



Banco de condensadores para almacenar energía en el láser de impulsos Nova utilizado en los Lawrence Livermor Laboratories para el estudio de la fusión. *(Lawrence Livermore National Laboratory.)*

! La ecuación 24.10 es válida solamente si los condensadores están en serie y la carga total en cada par de placas de dos condensadores contiguos conectados por hilos es cero.

Ejemplo 24.6 Uso de la fórmula de equivalencia

Conectamos en serie dos condensadores de 6 μF y de 12 μF, inicialmente descargados, a una batería de 12 V. Utilizando la fórmula de equivalencia para condensadores conectados en serie, determinar la carga de cada condensador y la diferencia de potencial entre las placas de cada uno de ellos.

PLANTEAMIENTO La figura 24.18*a* muestra el circuito de este ejemplo y la figura 24.18*b* muestra el condensador equivalente que posee la misma carga $Q = C_{eq}V$. Una vez determinada la carga, podemos calcular la caída de potencial a través de cada condensador.

(*a*) (*b*)

FIGURA 24.18

SOLUCIÓN

1. La carga de cada condensador es igual a la carga del condensador equivalente: $Q = C_{eq}V$

2. La capacidad equivalente de los condensadores en serie se determina mediante la expresión:
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6{,}0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{12\ \mu\text{F}} = \frac{3}{12\ \mu\text{F}}$$
$$C_{eq} = 4{,}0\ \mu\text{F}$$

3. Utilizar este valor para determinar la carga Q. Esta es la carga que suministra la batería. Es la carga de cada condensador:
$$Q = C_{eq}V = (4{,}0\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = \boxed{48\ \mu\text{C}}$$

4. A partir del valor de Q calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador de 6 μF:
$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{48\ \mu\text{C}}{6{,}0\ \mu\text{F}} = \boxed{8{,}0\ \text{V}}$$

5. Utilizar de nuevo el resultado de Q para calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador de 12 μF:
$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{48\ \mu\text{C}}{12\ \mu\text{F}} = \boxed{4{,}0\ \text{V}}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que la suma de estas diferencias de potencial es, lógicamente, 12 V.

OBSERVACIÓN Los resultados son como los del ejemplo 24.5.

Ejemplo 24.7 Conexión en serie, paralelo o ambas *Conceptual*

Considerar los condensadores mostrados en la figura 24.19*a*. (*a*) Identificar las asociaciones de condensadores en paralelo. (*b*) Identificar las asociaciones en serie.

PLANTEAMIENTO Los condensadores conectados en paralelo comparten una diferencia de potencial común a todos ellos que depende del camino recorrido en dicha conexión. El potencial en un conductor es constante. Utilizar marcas de diferentes colores para identificar cada uno de los conductores del circuito que están al mismo potencial. Dos condensadores están en serie si una placa de uno se conecta a otra placa de otro mediante un conductor sin nudos.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Marcar con un único color los conductores que están al mismo potencial. El potencial sólo cambia ante la presencia de una batería o un condensador:

2. Los condensadores conectados en paralelo comparten una misma diferencia de potencial que depende únicamente de los elementos, condensadores o baterías que se encuentra en el camino recorrido en el circuito: Los únicos condensadores conectados en paralelo son el 4 y el 7.

(*b*) Dos condensadores están conectados en serie cuando lo están mediante un cable exento de nudos que une una placa de uno con otra del otro: Los únicos condensadores conectados en serie son el 8 y el 9.

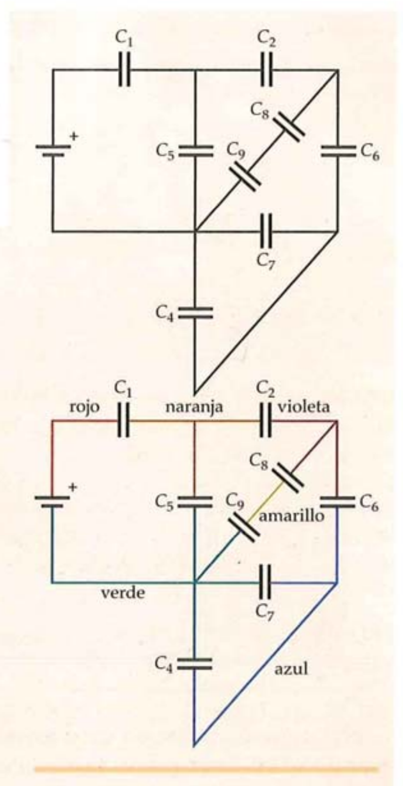


FIGURA 24.19

OBSERVACIÓN Los condensadores 1 y 2 no están en serie porque existe un nudo en el hilo que los conecta. Los condensadores 2 y 5 no están en paralelo aun teniendo cada uno de ellos una placa conectada a un hilo de color naranja, es decir, con el mismo potencial, puesto que el 2 está conectado a un cable de color violeta y el 5 no. En consecuencia, podemos decir que los condensadores 2 y 5 no tienen en común la diferencia de potencial entre sus placas.

Ejemplo 24.8 Condensadores reconectados

Los dos condensadores del ejemplo 24.6 se separan de la batería y se desconectan cuidadosamente uno de otro, de modo que la carga almacenada en las placas no se altere, como indica la figura 24.20*a*. Se conectan de nuevo en un circuito con interruptores abiertos, pero ahora uniendo entre sí las placas positivas por un lado y las negativas por el otro, como muestra la figura 24.20*b*. Determinar la diferencia de potencial entre los condensadores y la carga de cada uno de ellos cuando se cierran los interruptores y las cargas dejan de fluir.

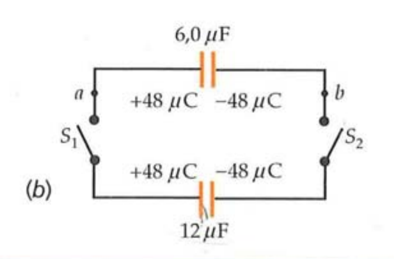


FIGURA 24.20

PLANTEAMIENTO Justo después de desconectar los dos condensadores de la batería, contienen cargas iguales de 48 μC. Una vez se cierran los interruptores, S_1 y S_2, del nuevo circuito, los condensadores están en paralelo entre los puntos *a* y *b*. La diferencia de potencial entre ambos condensadores es la misma. Utilizar la definición de capacidad y la conservación de la carga para obtener la carga de cada condensador y una vez que estas cargas son calculadas determinar la diferencia de potencial entre placas.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el circuito cerrado con los interruptores y los condensadores C_1 =6,0 μF y C_2 = 12 μF (figura 24.21):
2. Las conexiones se hacen de tal forma que cuando los interruptores se cierran la diferencia de potencial entre las placas de los dos condensadores es la misma: $V = V_1 = V_2$
3. Para cada condensador, $V = Q/C$. Sustituir esta expresión en el resultado del paso 2: $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$
4. La suma de las cargas en las placas de la izquierda de los dos condensadores es 96 μC: $Q_1 + Q_2 = 96\ \mu C$
5. Para determinar la carga de cada condensador, se resuelven simultáneamente las ecuaciones de los pasos 3 y 4: $Q_1 = \boxed{32\ \mu C}$ $Q_2 = \boxed{64\ \mu C}$
6. Calcular la diferencia de potencial: $V = \frac{Q_1}{C_1} = \boxed{5{,}3\ V}$

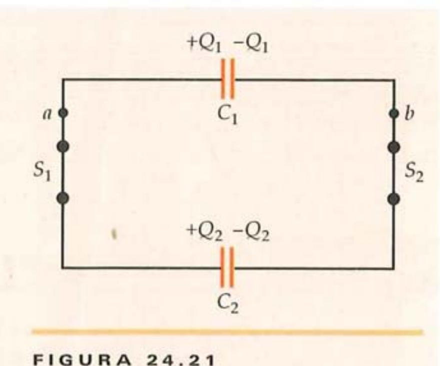


FIGURA 24.21

COMPROBACIÓN Obsérvese que $Q = Q_1 + Q_2 = 96\ \mu C$ y que $Q_2/C_2 = 5{,}3$ V, lo que concuerda con lo esperado.

OBSERVACIÓN Después de cerrar los interruptores, los dos condensadores están conectados en paralelo de tal forma que la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* es la que existe entre las placas de cada uno de los dos condensadores. Así, tenemos que $C_{eq} = C_1 + C_2 = 18\ \mu F$, $Q = Q_1 + Q_2 = 96\ \mu C$, y $V = Q/C_{eq} = 5{,}3$ V. Además, después de que los interruptores se cierran, los condensadores están conectados en serie. Sin embargo, la fórmula de equivalencia en serie (ecuación 24.17) no es válida porque la suma de las cargas de cada par de placas, una de cada condensador, que están conectadas por un hilo sencillo y aislado, no es cero.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.11 Determinar la energía almacenada en los condensadores antes y después de su conexión.

Hay una disminución de energía potencial almacenada en los condensadores cuando se vuelven a conectar. Esta diferencia de energía potencial o bien se disipa como energía térmica en los cables o se irradia.

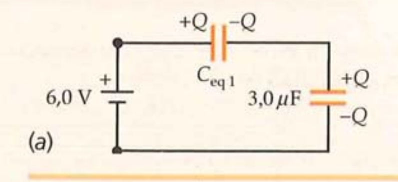
! La carga se conserva cuando los condensadores se conectan, pero la energía potencial no.

Ejemplo 24.9 Condensadores en serie y en paralelo

(*a*) Determinar la capacidad equivalente del circuito formado por los tres condensadores de la figura 24.19. (*b*) Inicialmente los condensadores están descargados. Se conecta el circuito a una batería de 6 V como se indica en la figura 24.23 (*a*). Determinar la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador y su carga después de conectarse la batería y el flujo de cargas haya cesado.

FIGURA 24.22

PLANTEAMIENTO Los condensadores de 2,0 μF y 4,0 μF se conectan en paralelo y esta asociación en paralelo se conecta en serie con el condensador de 3,0 μF. En primer lugar, se calcula la capacidad equivalente de la asociación en paralelo (figura 24.23*a*), y después consideramos esta capacidad resultante conectada en serie con el condensador de 3,0 μF para obtener el resultado final de la capacidad equivalente del circuito completo (figura 24.23*b*). La carga en la placa positiva del condensador de 3,0 μF es la que pasa a través de la batería $Q = C_{eq}V$, tal como se muestra en la figura 24.23*a*.



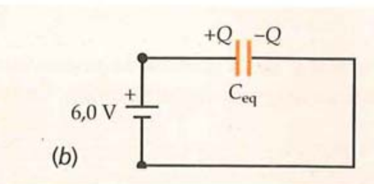


FIGURA 24.23

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La capacidad equivalente de los dos condensadores en paralelo es la suma de sus capacidades individuales:

$$C_{eq\,1} = C_1 + C_2 = 2{,}0\ \mu\text{F} + 4{,}0\ \mu\text{F} = 6{,}0\ \mu\text{F}$$

2. Determinar la capacidad equivalente de un condensador de 6 μF con otro de 3 μF conectado en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{eq\,1}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6{,}0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{3{,}0\ \mu\text{F}} = \frac{1}{2{,}0\ \mu\text{F}}$$

$$C_{eq} = \boxed{2{,}0\ \mu\text{F}}$$

(*b*) 1. Determinar la carga Q suministrada por la batería. Ésta es también la carga depositada en el condensador de 3 μF:

$$Q = C_{eq}V = (2{,}0\ \mu\text{F})(6{,}0\ \text{V}) = \boxed{12\ \mu\text{C}}$$

2. La caída de potencial a través del condensador de 3 μF es Q/C_3:

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q}{C_3} = \frac{12\ \mu\text{C}}{3{,}0\ \mu\text{F}} = \boxed{4{,}0\ \text{V}}$$

3. La caída de potencial a través de la asociación en paralelo, V_{24}, es $Q/C_{eq\,1}$:

$$V_{24} = \frac{Q}{C_{eq\,1}} = \frac{12\ \mu\text{C}}{6{,}0\ \mu\text{F}} = \boxed{2{,}0\ \text{V}}$$

4. La carga en cada uno de los condensadores en paralelo se deduce de $Q_i = C_iV_{24}$, donde $V_{24} = 2$ V:

$$Q_2 = C_2V_{24} = (2{,}0\ \mu\text{F})(2{,}0\ \text{V}) = \boxed{4{,}0\ \mu\text{C}}$$

$$Q_4 = C_4V_{24} = (4{,}0\ \mu\text{F})(2{,}0\ \text{V}) = \boxed{8{,}0\ \mu\text{C}}$$

COMPROBACIÓN La caída de voltaje a través de la asociación en paralelo (2 V) más la correspondiente al condensador de 3 μF (4 V) es igual al voltaje de la batería. Además, la suma de las cargas de los condensadores en paralelo (4 μC + 8 μC) es igual a la carga total (12 μC) del condensador de 3 μF.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.12 Determinar la energía almacenada en cada condensador.

24.4 DIELÉCTRICOS

Un material no conductor, como, por ejemplo, el vidrio, el papel o la madera, se denomina **dieléctrico**. Michael Faraday descubrió que cuando el espacio entre los dos conductores de un condensador se ve ocupado por un dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor κ que es característico del dieléctrico. La razón de este incremento es que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se debilita por causa del dieléctrico. Así, para una carga determinada sobre las placas, la diferencia de potencial se reduce y la relación Q/V se incrementa.

Consideramos inicialmente un condensador cargado aislado y sin dieléctrico entre sus placas. Se introduce después una pastilla de dieléctrico, llenando todo el espacio



Sección de un condensador de múltiples capas con un dieléctrico cerámico. Las líneas blancas son los bordes de las placas conductoras. (*© Manfred Kage/Peter Arnold, Inc.*)

entre las mismas. Si el campo eléctrico original entre las placas de un condensador sin dieléctrico es E_0, el campo en el interior del dieléctrico introducido entre las placas es

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \qquad 24.18$$

CAMPO ELÉCTRICO EN EL INTERIOR DE UN DIELÉCTRICO

donde κ (kappa) es la **constante dieléctrica**. En un condensador de placas paralelas de separación d, la diferencia de potencial V entre las placas es

$$V = Ed = \frac{E_0 d}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa}$$

siendo V la diferencia de potencial con dieléctrico y $V_0 = E_0 d$ la diferencia de potencial original sin dieléctrico. La nueva capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\kappa} = \kappa\frac{Q}{V_0}$$

es decir,

$$C = \kappa C_0 \qquad 24.19$$

EFECTO DE UN DIELÉCTRICO SOBRE LA CAPACIDAD

donde $C_0 = Q/V_0$ es la capacidad sin el dieléctrico. La capacidad de un condensador de placas paralelas lleno de un material dieléctrico de constante κ es, por lo tanto,

$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d} \qquad 24.20$$

donde

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0 \qquad 24.21$$

es la **permitividad** del dieléctrico.

En este análisis, hemos supuesto un condensador aislado que no forma parte del circuito, es decir, que la carga de las placas del condensador no cambiaba cuando se introducía el dieléctrico. Esto es cierto si el condensador se carga y después se separa de la fuente (la batería) antes de insertar el dieléctrico. Si el dieléctrico se inserta durante el proceso de carga, la batería suministra más carga para mantener la diferencia de potencial original. En este caso, la carga total en las placas es $Q = \kappa Q_0$. En cualquier caso, la capacidad (Q/V) se incrementa en el factor κ.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.13

El condensador de 89 pF del ejemplo 24.1 se llena con un dieléctrico de constante $\kappa = 2$. (*a*) Determinar la nueva capacidad. (*b*) Calcular la carga del condensador tras insertar el dieléctrico, si el condensador se conecta a una batería de 12 V.

PROBLEMA PRÁCTICO 24.14

El condensador del ejercicio anterior se carga a 12 V sin el dieléctrico y, a continuación, se desconecta de la batería. Entonces se introduce el dieléctrico de constante $\kappa = 2$. Determinar los nuevos valores de (*a*) la carga Q, (*b*) el voltaje V y (*c*) la capacidad C.

Los dieléctricos no sólo incrementan la capacidad de un condensador, sino que además proporcionan un medio para separar las placas conductoras paralelas y elevan la diferencia de potencial a la cual tiene lugar la ruptura dieléctrica.* Consideremos un condensador de placas paralelas formado por dos hojas de metal sepa-

* Recuerde del capítulo 23 que para campos eléctricos superiores a 3×10^6 V/m, el aire sufre ruptura dieléctrica, se ioniza y comienza a conducir la electricidad.

radas por una lámina delgada de plástico. El plástico permite que las hojas metálicas se encuentren muy próximas sin llegar a ponerse en contacto eléctrico, y como la resistencia del plástico a la ruptura es mayor que la del aire, se pueden alcanzar mayores diferencias de potencial antes de que ocurra la ruptura dieléctrica. La tabla 24.1 presenta la constante dieléctrica y la resistencia a la ruptura dieléctrica de algunas sustancias aislantes. Obsérvese que para el aire, $\kappa \approx 1$, de modo que para la mayor parte de los casos no necesitamos distinguir entre el aire y el vacío.

Tabla 24.1 Constantes dieléctricas y resistencias a la ruptura dieléctrica de diversos materiales

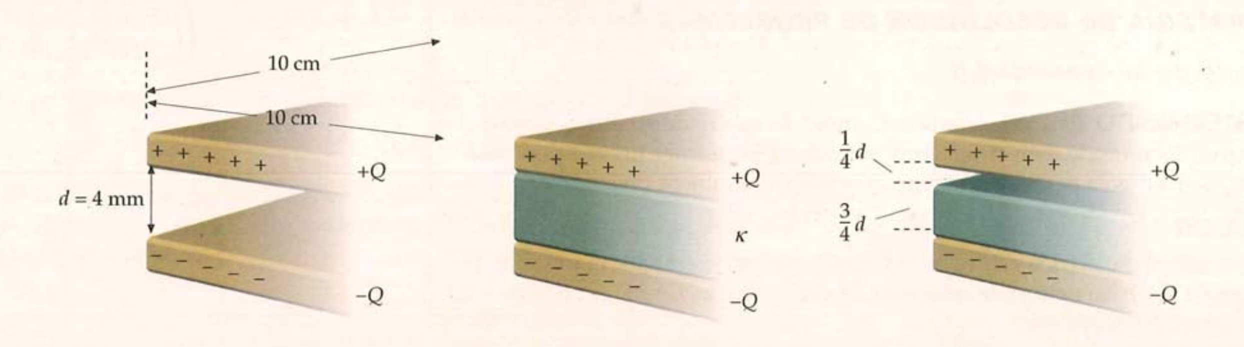
Material	Constante dieléctrica κ	Resistencia del dieléctrico, kV/mm
Aceite de transformador	2,24	12
Aire	1,00059	3
Baquelita	4,9	24
Gasolina	2,0 (70 °F)	
Mica	5,4	10–100
Neopreno	6,9	12
Papel	3,7	16
Parafina	2,1–2,5	10
Plexiglás	3,4	40
Poliestireno	2,55	24
Porcelana	7	5,7
Titanato de estroncio	240	8
Vidrio (Pyrex)	5,6	14

Ejemplo 24.10 Condensador de placas paralelas con dieléctrico entre ellas

Un condensador plano tiene placas cuadradas de lado 10 cm y una separación d = 4 mm. Un bloque dieléctrico de constante k = 2 tiene dimensiones 10 cm × 10 cm × 4 mm. (*a*) ¿Cuál es la capacidad sin dieléctrico? (*b*) ¿Cuál es la capacidad si el bloque dieléctrico llena el espacio entre las placas? (*c*) ¿Cuál es la capacidad si otro bloque dieléctrico de dimensiones 10 cm × 10 cm × 3 mm se inserta en el condensador cuyas placas están separadas 4 mm?

PLANTEAMIENTO La capacidad del condensador sin dieléctrico, C_0, se determina a partir del área y espaciado de las placas (figura 24.24*a*). Cuando el condensador se llena con un dieléctrico de constante κ (figura 24.24*b*), la capacidad es $C = \kappa C_0$ (ecuación 24.19). Si el dieléctrico sólo llena parcialmente el condensador (figura 24.24*c*), calcularemos la diferencia de potencial V para una determinada carga Q y después aplicaremos la fórmula, $C = Q/V$.

FIGURA 24.24



SOLUCIÓN

(*a*) Si no hay dieléctrico, la capacidad C_0 viene dada por la ecuación 24.6:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8{,}85\ \text{pF/m})(0{,}10\ \text{m})^2}{0{,}0040\ \text{m}} = 22{,}1\ \text{pF} = \boxed{22\ \text{pF}}$$

(*b*) Cuando el condensador se llena con un dieléctrico de constante κ, su capacidad C se incrementa en el factor κ:

$$C = \kappa C_0 = (2{,}0)(22{,}1\ \text{pF}) = 44{,}2\ \text{pF} = \boxed{44\ \text{pF}}$$

(*c*) 1. Mantenemos el condensador eléctricamente aislado, de tal forma que la carga se conserva cuando se introduce o se retira la pastilla de dieléctrico. La nueva capacidad está relacionada con la carga original Q_0 y la nueva diferencia de potencial V:

$$C = \frac{Q_0}{V}$$

2. Cuando se coloca la pastilla de dieléctrico cuyo grosor es 3,0 mm, la diferencia de potencial entre las placas es la suma de la diferencia de potencial del hueco más la diferencia de potencial del bloque dieléctrico:

$$V = V_{\text{vac}} + V_{\text{diel}} = E_{\text{vac}}(\tfrac{1}{4}d) + E_{\text{diel}}(\tfrac{3}{4}d)$$

3. El módulo del campo eléctrico en el hueco E_{vac} es σ_0/ϵ_0, donde $\sigma_0 = Q_0/A$. Este campo es el mismo que E_0 cuando no había dieléctrico entre las placas:

$$E_{\text{vac}} = E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$$

4. El campo en el bloque dieléctrico viene reducido por el factor κ:

$$E_{\text{diel}} = \frac{E_0}{\kappa}$$

5. Combinando los dos resultados anteriores, se obtiene V en función de κ. Obsérvese que la diferencia de potencial original es $V_0 = E_0 d$:

$$V = E_0 d_{\text{vac}} + E_{\text{diel}} d_{\text{diel}} = E_0\left(\frac{1}{4}d\right) + \frac{E_0}{\kappa}\left(\frac{3}{4}d\right)$$

$$= E_0 d\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\kappa}\right) = V_0\left(\frac{\kappa + 3}{4\kappa}\right)$$

6. Usar $C = Q/V$ para determinar la nueva capacidad en función de la capacidad original, $C_0 = Q/V_0$:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0 \frac{\kappa + 3}{4\kappa}} = \frac{Q_0}{V_0}\left(\frac{4\kappa}{\kappa + 3}\right) = C_0\left(\frac{4\kappa}{\kappa + 3}\right)$$

$$= (22{,}1\ \text{pF})\left(\frac{4 \cdot 2.0}{2{,}0 + 3}\right) = \boxed{35\ \text{pF}}$$

COMPROBACIÓN La ausencia de un dieléctrico corresponde a $\kappa = 1$. En este caso, nuestro resultado del último paso de (*c*) se reduciría a $C = C_0$, como es lógico. Supongamos que el bloque dieléctrico fuera un bloque conductor. En un conductor, $E = 0$, de modo que según la ecuación 24.18, κ sería igual a infinito. Para valores muy grandes de κ, la magnitud $4\kappa/(\kappa + 3)$ es, aproximadamente, igual a 4, de modo que el resultado del último paso de (*c*) se aproximaría a $4C_0$. Un bloque conductor simplemente amplía el grosor de la placa del condensador y, por lo tanto, la separación de las placas con el conductor introducido entre éstas sería $\frac{1}{4}d$. Esto significa que C sería $4C_0$, como en el caso de valores muy grandes de κ.

OBSERVACIÓN Los resultados de este ejemplo son independientes de la posición vertical del dieléctrico o bloque conductor entre las placas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de la capacidad II

PLANTEAMIENTO Para calcular la capacidad de un condensador que tiene dos o más láminas de dieléctrico entre sus placas, en primer lugar se calcula el campo eléctrico a partir de la carga Q como si no hubiera dieléctrico.

SOLUCIÓN

1. Cuando el dieléctrico está en el espacio entre las dos placas, el módulo del campo eléctrico dentro de la lámina de dieléctrico es $E = E_0/\kappa$, donde κ es la constante dieléctrica.

2. Utilizar $\vec{E}$ dentro de la lámina de dieléctrico para calcular el voltaje a través de la lámina. El valor de la diferencia de potencial total es la suma de las diferencias de potencial entre las diferentes láminas más la que exista en la región en la que no hay dieléctrico.
3. Por último, calcular la capacidad mediante la fórmula $C = Q/V$.

COMPROBACIÓN Obtener el valor de C poniendo $\kappa = 1$ y comparar el resultado con C_0, que es la capacidad sin la presencia de dieléctrico.

Ejemplo 24.11 Condensador "casero" *Póngalo en su contexto*

En clase de Física, el profesor propuso que construyeramos un condensador de placas paralelas mediante láminas de aluminio y papel cubierto de cera. Las dimensiones de las placas serían las de un cuaderno de notas. Antes de hacer pruebas, decidimos calcular la carga que debe almacenar el condensador cuando se conecta a una batería de 9 V.

PLANTEAMIENTO Podemos conocer la carga partiendo de la expresión $C = Q/V$ si conocemos la capacidad, la cual en condensadores de placas paralelas viene dada por $C = \epsilon_0 A/d$. Podemos conocer el grosor del papel encerado midiendo o haciendo una estimación.

SOLUCIÓN

1. La relación entre la carga, la diferencia de potencial entre placas y la capacidad viene dada por:
$$Q = CV$$
2. La capacidad de un condensador de placas paralelos es:
$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d}$$
3. A partir de la expresión de C, obtenemos la carga Q, la cual viene dada por:
$$Q = CV = \frac{\kappa\epsilon_0 VA}{d}$$
4. Una hoja de cuaderno de notas mide aproximadamente 21,59 por 27,94 cm:
$$A = 21{,}59 \text{ cm} \times 27{,}94 \text{ cm} = 584{,}4 \text{ cm}^2 = 0{,}0603 \text{ m}^2$$
5. Suponemos que una hoja de papel encerado es del mismo grosor que una del libro de Física. Medimos el grosor de las 300 hojas de papel del libro que consta de 600 páginas:

   300 hojas de papel tienen 2,0 cm de grosor (0,020 m), de tal forma que el grosor de una hoja es $0{,}020 \text{ m}/300 = 66{,}7\ \mu\text{m}$.
6. Utilizando el resultado del paso 3, obtenemos la carga suponiendo que la constante dieléctrica del papel encerado es como la de la parafina, es decir 2,3:
$$Q = \frac{\kappa\epsilon_0 AV}{d} = \frac{2{,}3\ (8{,}85 \text{ pF/m})(0{,}0603 \text{ m}^2)(9{,}0 \text{ V})}{66{,}7 \times 10^{-6} \text{ m}}$$
$$= 1{,}66 \times 10^5 \text{ pC} = \boxed{0{,}17\ \mu\text{C}}$$

COMPROBACIÓN Un farad es un coulomb partido por un volt. Por ello, es lógico que las unidades del resultado sean coulombs.

ENERGÍA ALMACENADA EN PRESENCIA DE UN DIELÉCTRICO

La energía almacenada en un condensador de placas paralelas con dieléctrico es

$$U = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}CV^2$$

Si expresamos la capacidad C en función del área y la separación de las placas, y la diferencia de potencial V en función del campo eléctrico y la separación de las placas, se obtiene

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2(Ad)$$

La magnitud *Ad* es el volumen entre las placas que contiene el campo eléctrico. La energía por unidad de volumen es, por lo tanto,

$$u_e = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2 \qquad 24.22$$

Parte de esta energía es la asociada con el campo eléctrico (ecuación 24.9) y el resto es la energía procedente de la polarización del dieléctrico, analizada en la sección 24.2.

Ejemplo 24.12 Inserción del dieléctrico con la batería desconectada

Dos condensadores de placas paralelas, con la misma capacidad $C_1 = C_2 = 2\ \mu F$, están conectados en paralelo a través de una batería de 12 V. Determinar (*a*) la carga de cada condensador y (*b*) la energía total almacenada en los condensadores. A continuación, la asociación en paralelo de los dos condensadores se desconecta de la batería y entre las placas del condensador C_2 se inserta un dieléctrico de constante $\kappa = 2{,}5$. En estas condiciones, determinar (*c*) la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador, (*d*) la carga depositada en cada uno de ellos y (*e*) la energía total almacenada por ambos.

PLANTEAMIENTO Como los condensadores están conectados en paralelo, el voltaje a través de cada uno de ellos es el mismo. La carga *Q* y la energía total *U* pueden determinarse para cada condensador a partir de su capacidad *C* y voltaje *V*. Después de desconectar los condensadores de la batería, su carga total no se modifica. Cuando se inserta el dieléctrico en uno de los condensadores, su capacidad C_2 cambia. El potencial a través de la combinación en paralelo puede determinarse a partir de la carga total y de la capacidad equivalente.

SOLUCIÓN

(*a*) La carga de cada condensador se determina a partir de su capacidad *C* y voltaje *V*:

$$Q = CV = (2{,}00\ \mu F)(12{,}0\ V) = \boxed{24{,}0\ \mu C}$$

(*b*) 1. La energía almacenada en cada condensador se determina a partir de su capacidad *C* y voltaje *V*:

$$U = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}(24{,}0\ \mu C)(12{,}0\ V) = 144\ \mu J$$

2. La energía total es doble de la almacenada en cada condensador:

$$U_{total} = 2U = \boxed{288\ \mu J}$$

(*c*) 1. El potencial a través de la asociación en paralelo está relacionado con Q_{total} y la capacidad equivalente, C_{eq}:

$$V = \frac{Q_{total}}{C_{eq}}$$

2. La capacidad C_2 del condensador con el dieléctrico se incrementa en el factor *k*. La capacidad equivalente es la suma de las capacidades:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = C_1 + \kappa C_2 = (2{,}00\ \mu F) + 2{,}50(2{,}00\ \mu F)$$
$$= 2{,}00\ \mu F + 5{,}00\ \mu F = 7{,}00\ \mu F$$

3. La carga total sigue siendo 48 μC. Para calcular *V*, sustituir este valor en Q_{total} y C_{eq}:

$$V = \frac{Q_{total}}{C_{eq}} = \frac{48{,}0\ \mu C}{7{,}00\ \mu F} = \boxed{6{,}86\ V}$$

(*d*) La carga de cada condensador se deduce de nuevo a partir de su capacidad y voltaje *V*:

$$Q_1 = (2{,}00\ \mu F)(6{,}86\ V) = \boxed{13{,}7\ \mu C}$$
$$Q_2 = (5{,}00\ \mu F)(6{,}86\ V) = \boxed{34{,}3\ \mu C}$$

(*e*) La energía almacenada en cada condensador se determina considerando su nueva capacidad *C* y nuevo voltaje *V*:

$$U = U_1 + U_2 = \tfrac{1}{2}Q_1V + \tfrac{1}{2}Q_2V = \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2)V$$
$$= \tfrac{1}{2}(13{,}7\ \mu C + 34{,}3\ \mu C)(6{,}86\ V) = \boxed{165\ \mu J}$$

COMPROBACIÓN Cuando se introduce el dieléctrico en uno de los condensadores, el campo se debilita y la diferencia de potencial disminuye. Como los dos condensadores se conectan en paralelo, de uno de los condensadores se transfiere al otro la carga necesaria para que la diferencia de potencial sea la misma entre ambos condensadores. Obsérvese que el condensador con el dieléctrico posee una carga mayor, pero cuando las cargas calculadas para cada condensador en (*d*) se suman, $Q_1 + Q_2 = 13{,}7\ \mu C + 34{,}3\ \mu C = 48\ \mu C$, el resultado coincide con la carga neta original.

OBSERVACIÓN La energía total de 165 μJ es menor que la energía original de 288 μJ. Una vez se inicia la inserción del dieléctrico, el condensador tiende a introducirlo por atracción. Durante este proceso se realiza un trabajo de $-123\ \mu$J ($165\ \mu\text{J} + 123\ \mu\text{J} = 288\ \mu\text{J}$), puesto que es necesario vencer las fuerzas de rozamiento. Para extraer el dieléctrico, se necesita realizar un trabajo igual a: $W = 288\ \mu\text{J} - 165\ \mu\text{J} = 123\ \mu\text{J}$, que se almacena en forma de energía electrostática.

Ejemplo 24.13 Nos quedamos sin gasolina *Póngalo en su contexto*

Suponer que el lector está volando desde Nueva Zelanda a Hawai y los componentes electrónicos de los indicadores de combustible de un pequeño aeroplano comienzan a fallar. La compañía en la que trabaja está interesada en solucionar el problema. El indicador consiste en un condensador cilíndrico introducido en el depósito de combustible (figura 24.25). El eje del condensador es vertical y el combustible llena el espacio entre las placas hasta el nivel en el que se encuentra el combustible en el tanque ¿Cómo se podría sustituir la función del indicador? Sabemos que cuando el depósito está a la mitad, el indicador empieza a parpadear y, además, disponemos de un multímetro a bordo.

FIGURA 24.25 El depósito de combustible contiene un condensador cilíndrico de altura H cuyo eje es vertical. La gasolina llena el espacio entre los conductores del condensador hasta el nivel de llenado de gasolina, de altura h.



FIGURA 24.26 *(Paul Silverman/ Fundamental Photographs.)*

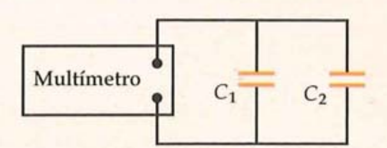
PLANTEAMIENTO El condensador cilíndrico puede considerarse como un sistema de dos condensadores en paralelo, donde uno de ellos es la parte sumergida que tiene el combustible como dieléctrico y el otro es la parte sin sumergir que tiene el espacio entre sus conductores vacío. La relación entre la longitud de la parte del cilindro sumergida y la total es lo que deseamos conocer.

SOLUCIÓN

1. Desconectar los dos hilos del tanque de gasolina en el panel de instrumentos y conectarlos al multímetro para conocer la capacidad, de tal forma que cuando la lectura sea $C_{1/2}$ el depósito estará semilleno:

$$C = C_{1/2}$$

2. Considerar el condensador como una asociación en paralelo de dos de ellos, uno sumergido y el otro no, y hacer un dibujo esquemático de la asociación, denominando a los condensadores C_1 y C_2; C_1 sin dieléctrico y C_2 con gasolina:



3. La capacidad del condensador cilíndrico en general es proporcional a su longitud. Sea H la altura total del depósito (que será la del condensador) y h la altura del combustible. La capacidad cuando está vacío la denominamos C_0:

$$C_1 = \frac{H - h}{H}C_0 \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{h}{H}\kappa C_0$$

4. La capacidad total de la asociación es la suma de las capacidades:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{H - h}{H}C_0 + \frac{h}{H}\kappa C_0 = \left[1 + (\kappa - 1)\frac{h}{H}\right]C_0$$

5. Obtener información sobre la constante dieléctrica de la gasolina en la tabla 24.1. (El libro de Física estaba también a bordo del aeroplano.)

$$\kappa = 2{,}0$$

$$C = \left[1 + (2{,}0 - 1)\frac{h}{H}\right]C_0 = \left[1 + 1{,}0\frac{h}{H}\right]C_0$$

6. Tomar nota en el momento en el que el indicador señala que el depósito está a la mitad. Entonces, $C = C_{1/2}$ y $h = h/H$ y obtener C_0:

$$C_{1/2} = \left[1 + 1{,}0\frac{1}{2}\right]C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{2}{3}C_{1/2}$$

7. Sustituir C_0 en el resultado del paso 4 y despejar h/H. De esta forma, tenemos un procedimiento para convertir la lectura de la medida de C del multímetro en la fracción de gasolina restante en el depósito:

$$C = \left[1 + 1{,}0\frac{h}{H}\right]\frac{2}{3}C_{1/2} \quad \text{por tanto,} \quad \boxed{\frac{h}{H} = \frac{3}{2}\frac{C}{C_{1/2}} - 1}$$

COMPROBACIÓN Sustituyendo $C_{1/2}$ por C en el resultado de paso 7 nos da $h/H = \frac{1}{2}$, tal como era de esperar. Además, sustituyendo cero por h, C_0 por C y despejando C_0, se obtiene $C_0 = \frac{2}{3}C_{1/2}$, que es la expresión de C_0 en el paso 6.

OBSERVACIÓN Como los tanques no son de altura uniforme, este indicador de gasolina no será exacto. Esto le sucede a muchos indicadores de combustible de automóviles.

Ejemplo 24.14 Inserción del dieléctrico con la batería conectada — *Inténtelo usted mismo*

Determinar (*a*) la carga en cada condensador, y (*b*) la energía total almacenada en los condensadores, y (*c*) el trabajo realizado por la batería durante el proceso de inserción, del ejemplo 24.12, si el dieléctrico se inserta en uno de los condensadores mientras la batería está todavía conectada.

PLANTEAMIENTO Como la batería está todavía conectada, la diferencia de potencial entre los condensadores sigue siendo 12 V. Esta condición determina la carga y la energía almacenada en cada condensador. El subíndice 1 se refiere al condensador sin dieléctrico y el subíndice 2 al condensador con dieléctrico.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) Calcular la carga de cada condensador a partir de $Q = CV$ utilizando el resultado $C_1 = 2{,}00\ \mu\text{F}$ y $C_2 = 5{,}00\ \mu\text{F}$ obtenido en el ejemplo 24.12.	$Q_1 = C_1V = \boxed{24{,}0\ \mu\text{C}}$ $Q_2 = C_2V = \boxed{60{,}0\ \mu\text{C}}$
(*b*) 1. Calcular la energía almacenada en cada condensador a partir de $U = \frac{1}{2}CV^2$. (Comprobar los resultados mediante $U = \frac{1}{2}QV$.)	$U_1 = 144\ \mu\text{J}$ $\quad U_2 = 360\ \mu\text{J}$
2. Sumar los resultados de U_1 y U_2 para obtener la energía final.	$U_{\text{total}} = \boxed{504\ \mu\text{J}}$
(*c*) El trabajo realizado por la batería durante la inserción es igual a su voltaje multiplicado por la carga que la atraviesa. Esta carga es el incremento de carga en C_2.	$W = V\Delta Q = (12{,}0\ \text{V})(60{,}0\ \mu\text{C} - 24{,}0\ \mu\text{C}) = \boxed{432\ \mu\text{J}}$

COMPROBACIÓN La energía total de los dos condensadores es mayor con el dieléctrico que sin él: $504\ \mu\text{J} - 288\ \mu\text{J} = 216\ \mu\text{J}$. Este resultado es el esperado, dado que durante la inserción del dieléctrico, la batería suministra $432\ \mu\text{J}$, que es energía más que suficiente para aumentar la energía almacenada en los condensadores cuando el dieléctrico es insertado. El dieléctrico es introducido por fuerzas atractivas y las fuerzas de rozamiento le impiden ganar demasiada velocidad durante la inserción.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 24.4

El trabajo realizado por la fuerzas de rozamiento que restringen el aumento de velocidad del dieléctrico durante la inserción, ¿es positivo o negativo?

24.5 ESTRUCTURA MOLECULAR DE UN DIELÉCTRICO

Un dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas de un condensador porque sus moléculas producen un campo eléctrico adicional de sentido opuesto al del campo externo producido por las placas. Este campo eléctrico se debe a los momentos dipolares eléctricos de las moléculas del dieléctrico.

Aunque los átomos y moléculas son eléctricamente neutros, se ven afectados por los campos eléctricos debido a que contienen cargas positivas y negativas que pueden responder a campos externos. Un átomo puede considerarse como un núcleo muy pequeño, cargado positivamente, rodeado por una nube electrónica, cargada negativamente. En algunos átomos y moléculas, la nube electrónica es esféricamente simétrica, de modo que su "centro de cargas" está en el centro del átomo o molécula, coincidiendo con la carga positiva. Un átomo o molécula de este tipo posee un momento dipolar cero y se llama no polar. Sin embargo, en presencia de un campo eléctrico externo, la carga positiva y la carga negativa experimentan fuerzas en direcciones opuestas. Las cargas positivas y negativas se separan hasta que la fuerza

atractiva que se ejercen entre sí equilibra las fuerzas debidas al campo eléctrico externo (figura 24.27). Se dice entonces que la molécula está polarizada y que se comporta como un dipolo eléctrico.

En algunas moléculas (por ejemplo, HCl y H_2O), los centros de la carga positiva y negativa no coinciden, ni siquiera en ausencia de un campo eléctrico externo. Como vimos en el capítulo 21, estas moléculas polares tienen un momento dipolar eléctrico permanente.

Cuando un dieléctrico se sitúa en el campo de un condensador, sus moléculas se polarizan de tal modo que se produce un momento dipolar neto paralelo al campo.* Si las moléculas son polares, sus momentos dipolares, orientados originalmente al azar, tienden a alinearse debido al momento de fuerza ejercido por el campo. Si las moléculas no son polares, el campo induce momentos dipolares que son paralelos al campo. En cualquier caso, las moléculas del dieléctrico se polarizan en la dirección del campo externo (figura 24.28).

El centro de la carga negativa coincide con el centro de la carga positiva

$\vec{E}$ $\vec{p}$

(a) (b)

FIGURA 24.27 Diagramas esquemáticos de las distribuciones de carga de un átomo o molécula no polar. (*a*) En ausencia de un campo eléctrico externo, el centro de la carga positiva coincide con el centro de la carga negativa. (*b*) En presencia de un campo eléctrico externo, los centros de la carga positiva y negativa se desplazan, produciendo un momento dipolar inducido en la dirección del campo externo.

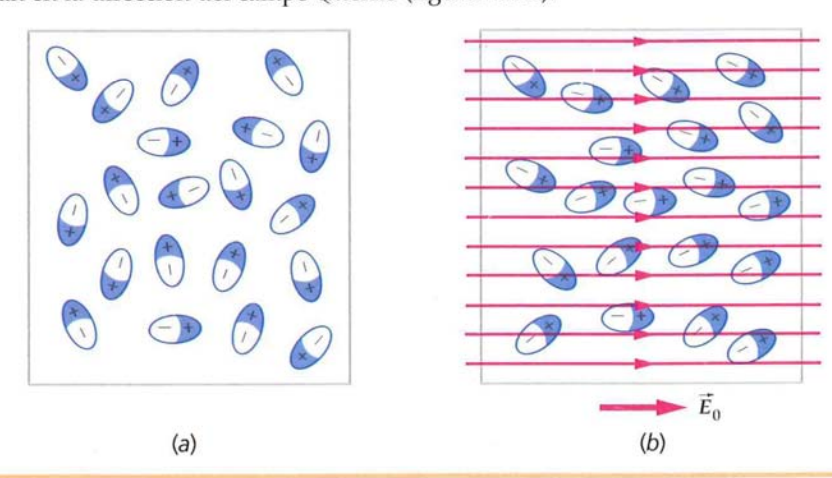


FIGURA 24.28 (*a*) Dipolos eléctricos pertenecientes a un dieléctrico polar orientados al azar en ausencia de un campo eléctrico externo. (*b*) En presencia de un campo externo, los dipolos se alinean paralelamente al campo de modo parcial.

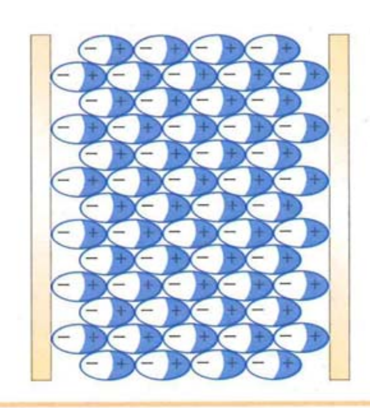


FIGURA 24.29 Cuando se sitúa un dieléctrico entre las placas de un condensador, el campo eléctrico del condensador polariza las moléculas del dieléctrico. El resultado es una carga ligada a la superficie del dieléctrico que produce su propio campo, el cual se opone al campo externo. El campo eléctrico entre las placas resulta así debilitado por el dieléctrico.

El efecto neto de la polarización de un dieléctrico homogéneo en un condensador es la creación de una carga superficial sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas, como se indica en la figura 24.29. Esta carga superficial, ligada al dieléctrico, se denomina **carga ligada** porque está unida a las moléculas del dieléctrico y no puede desplazarse como la carga libre que existe sobre las placas conductoras del condensador. La carga ligada produce un campo eléctrico opuesto a la dirección del campo producido por la carga libre de los conductores. Así, el campo eléctrico neto entre las placas se debilita, como indica la figura 24.30.

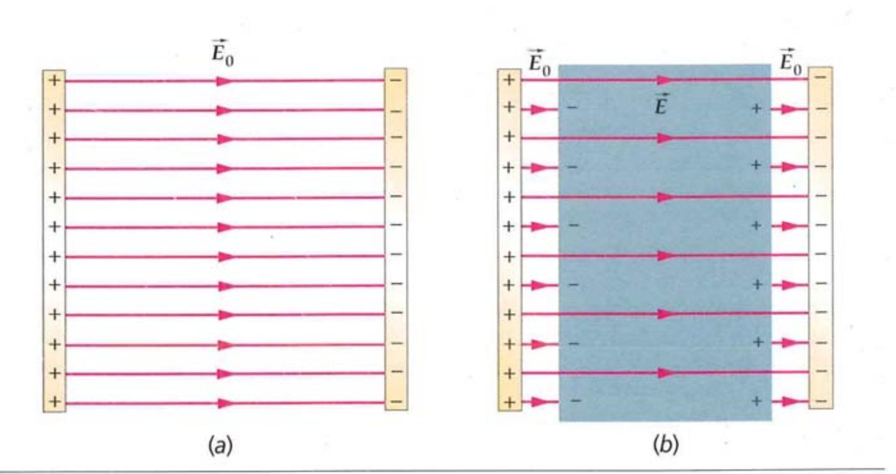


FIGURA 24.30 Campo eléctrico entre las placas de un condensador (*a*) sin dieléctrico y (*b*) con un dieléctrico. La carga superficial en el dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas.

* El grado de alineamiento depende del campo externo y de la temperatura. Aproximadamente, es proporcional a pE/kT, donde pE es la energía máxima de un dipolo en un campo E y kT es la energía térmica característica.

Ejemplo 24.15 Momento dipolar inducido—Átomo de hidrógeno

Un átomo de hidrógeno está formado por un núcleo de un protón de carga $+e$, y un electrón de carga $-e$. La distribución de carga del átomo es esféricamente simétrica, de modo que el átomo es no polar. Consideremos un modelo en el cual el átomo de hidrógeno consiste en una carga puntual positiva $+e$ situada en el centro de una nube esférica cargada uniformemente, de radio R y carga total $-e$. Demostrar que cuando un átomo como este se sitúa en un campo eléctrico externo uniforme $\vec{E}$, el momento dipolar inducido es proporcional a $\vec{E}$; es decir, $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, donde α se denomina polarizabilidad.

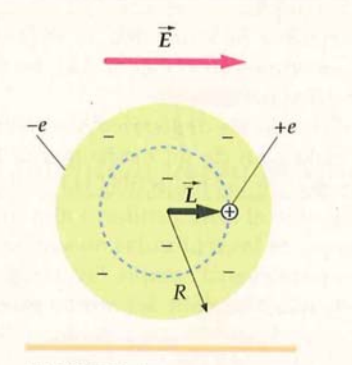


FIGURA 24.31

PLANTEAMIENTO En el campo externo, la carga positiva se desplaza del centro de la nube una distancia L tal que la fuerza ejercida por el campo $e\vec{E}$ está equilibrada por la fuerza ejercida por la nube negativa $e\vec{E}'$, donde $\vec{E}'$ es el campo debido a la nube (figura 24.31). Utilizaremos la ley de Gauss para determinar E' y después calcularemos el momento dipolar inducido $\vec{p} = q\vec{L}$, donde $q = e$ y $\vec{L}$ es la posición de la carga positiva respecto al centro de la nube. El momento dipolar definido como $q\vec{L}$, se discute en la sección 21.4.

SOLUCIÓN

1. Expresar el módulo del momento dipolar inducido en función de e y L:

$$p = eL$$

2. Podemos determinar L calculando el campo E'_n debido a la nube cargada negativamente a una distancia L desde el centro. Usamos la ley de Gauss para calcular E'_n. Consideramos una superficie gausiana esférica de radio L concéntrica con la nube. Entonces E'_n es constante en esta superficie:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint E_n\,dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

$$E'_n = \frac{Q_{\text{interior}}}{4\pi\epsilon_0 L^2}$$

3. La carga contenida en el interior de la esfera de radio L es igual a la densidad de carga multiplicada por el volumen:

$$Q_{\text{interior}} = \rho\tfrac{4}{3}\pi L^3 = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\tfrac{4}{3}\pi L^3 = -e\frac{L^3}{R^3}$$

4. Reemplazar Q_{interior} por el valor deducido en el paso anterior para calcular E'_n:

$$E'_n = \frac{Q_{\text{interior}}}{4\pi\epsilon_0 L^2} = \frac{-eL^3/R^3}{4\pi\epsilon_0 L^2} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3}L$$

5. Despejar L:

$$L = -\frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{e}E'_n$$

6. E'_n es negativo porque está dirigido hacia dentro en la superficie gausiana. En la carga positiva, E'_n apunta a la izquierda, de modo que $E'_n = -E$:

$$E'_n = -E \quad \text{de modo que} \quad L = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{e}E$$

7. A partir de los valores obtenidos de L y E'_n, expresar p en función del campo externo E:

$$p = eL = 4\pi\epsilon_0 R^3 E$$

y así $\boxed{\vec{p} = \alpha\vec{E}}$

donde $\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$

COMPROBACIÓN Como $\vec{p}$ y $\vec{E}$ son paralelos con el mismo sentido, α es positivo, tal como indica el resultado del paso 7.

OBSERVACIÓN La distribución de la carga negativa en un átomo de hidrógeno, obtenida de la teoría cuántica, es esféricamente simétrica, pero la densidad de carga disminuye exponencialmente con la distancia, en lugar de ser uniforme. No obstante, el cálculo anterior demuestra que el momento dipolar es realmente proporcional al campo externo, $p = \alpha E$, y la polarizabilidad es del orden de $4\pi\epsilon_0 R^3$, donde R es el radio del átomo o molécula. La constante dieléctrica κ puede estar relacionada con la polarizabilidad y con el número de moléculas por unidad de volumen.

CANTIDAD DE CARGA LIGADA

La densidad de la carga ligada σ_b de las superficies del dieléctrico está relacionada con la constante dieléctrica κ y la densidad de carga libre σ_f de las placas. Consideremos un bloque dieléctrico situado entre las placas de un condensador de placas paralelas, como indica la figura 24.32. Si las placas del condensador están muy próximas, de modo que el bloque es muy delgado, el campo eléctrico interior al dieléctrico debido a las densidades de cargas ligadas, $+\sigma_b$ a la derecha y $-\sigma_b$ a la izquierda, es igual al campo debido a dos densidades de cargas planas infinitas. El campo E_b tiene así el valor

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

Este campo está dirigido hacia la izquierda y se resta del campo eléctrico E_0 debido a la densidad de carga libre situada en las placas del condensador. El campo original E_0 tiene el valor

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

El valor del campo resultante E es así la diferencia de estos valores. Es también igual a E_0/κ:

$$E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{\kappa}$$

o también,

$$E_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)E_0$$

Escribiendo σ_b/ϵ_0 en lugar de E_b y σ_f/ϵ_0 en lugar de E_0, tenemos

$$\sigma_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\sigma_f \qquad 24.23$$

Por lo tanto, la densidad de carga ligada σ_b es siempre menor que la densidad de carga libre σ_f situada en las láminas del condensador y es cero si $\kappa = 1$, que es el caso de carencia de dieléctrico. Para un bloque conductor, $\kappa = \infty$ y $\sigma_b = \sigma_f$.

FIGURA 24.32 Condensador de placas paralelas con un bloque dieléctrico entre las placas. Si éstas se encuentran próximas, cada una de las cargas superficiales puede considerarse como un plano infinito de carga. El campo eléctrico debido a la carga libre de las placas está dirigido hacia la derecha y su módulo es $E_0 = \sigma_f/\epsilon_0$. El campo debido a la carga ligada está dirigido hacia la izquierda y su módulo es $E_b = \sigma_b/\epsilon_0$.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 24.5

¿Crece la capacidad siempre que se inserta un dieléctrico entre las placas de un condensador? Explicar la respuesta.

*EFECTOS PIEZOELÉCTRICO Y PIROELÉCTRICO

En ciertos cristales que contienen moléculas polares, como el cuarzo, la turmalina y el topacio, las tensiones mecánicas aplicadas al cristal producen polarización de las moléculas. Este fenómeno se conoce con el nombre de **efecto piezoeléctrico**. La polarización del cristal cuando se le somete a una tensión causa una diferencia de potencial a través del cristal que puede utilizarse para producir una corriente eléctrica. Los cristales piezoeléctricos se utilizan en transductores como micrófonos, receptores de fonógrafos y dispositivos sensibles a las vibraciones para convertir tensiones mecánicas en señales eléctricas. El efecto piezoeléctrico inverso, según el cual un voltaje aplicado a uno de estos cristales induce una tensión mecánica (deformación), se utiliza en auriculares y otros muchos dispositivos. Debido a que la frecuencia natural de vibración del cuarzo se encuentra en el intervalo de las radiofrecuencias, y a que su curva de resonancia es muy aguda,* es muy utilizado para estabilizar osciladores de radiofrecuencias y construir relojes de gran precisión.

Muchos cristales que presentan efecto piezoeléctrico presentan, a su vez, **efecto piroeléctrico**, que consiste en la generación de grandes campos eléctricos cuando la temperatura del cristal aumenta. Estos cristales se usan en ocasiones para acelerar partículas cargadas logrando velocidades tan altas que cuando impactan con un blanco material generan energía radiante de alta frecuencia, rayos X, e incluso pueden ser utilizadas para fusión nuclear.

* La resonancia en los circuitos de corriente alterna (ac), que será analizada en el capítulo 29, es análoga a la resonancia mecánica, que fue tratada en el capítulo 14.

Temas de actualidad en Física

Cambios en Condensadores—Carga directa

En 1746, poco después de que la existencia de la botella de Leyden fuera dada a conocer, 180 soldados demostraron la potencia de una gran botella de Leyden en la corte francesa. Formaron un círculo dándose las manos y se conectaron a una botella de Leyden. Cuando una simple descarga de la botella pasó a través del círculo, los soldados empezaron a saltar y gritar.[1,2] Desde entonces, se han fabricado algunas de estas botellas con capacidades de 2,5 nF y un voltaje de 10 kV.

Los condensadores han recorrido un largo camino desde entonces. Un cambio, entre otros muchos, que experimentaron en el siglo XIX, fue la adición de aceite mineral usado como dieléctrico. Sin embargo, los condensadores de aceite, que es como se les denomina, presentan riesgos de incendio cuando se calientan. En 1929, la compañía química Swan fabricó condensadores que incluían policlorinatos de bifenilo (PBC) como dieléctrico.[3] Los PBC son resistentes al fuego, no se combinan con otras sustancias y sus constantes dieléctricas son ligeramente superiores a la del aceite mineral, pero, desafortunadamente, se ha probado su carácter cancerígeno y su toxicidad cuando se queman parcialmente.[4] En 1979, se prohibió la fabricación de los PBC en Estados Unidos y su uso se abandonó, aunque muchos condensadores[5] PBC continuaban en servicio en 2006.[6] A raíz de la prohibición de este tipo de condensadores, numerosos investigadores comenzaron a desarrollar condensadores más eficientes.



Los condensadores se construyen de muy diversas formas, tamaños y tipos. Los diseñadores de circuitos eligen el tamaño, la forma y el tipo según sean las necesidades y circunstancias específicas. *(Maynard & Bouchard/Scientifica/Visuals Unlimited.)*

Actualmente, se dispone de diversos tipos de condensadores muy eficaces, cuyas constantes dieléctricas son muy elevadas, al estar fabricados con cerámicas especiales,[7] películas de plástico o geles de polímeros. Pero los condensadores más eficaces son los de doble capa (EDLC, *electrical double-layer capacitors*). Los EDCL se componen de electrodos fabricados con carbón poroso depositado en un espacio donde existe un "separador electrolítico", formando capas que se enrollan fuertemente y se ponen en un contenedor. El carbón poroso y el separador electrolítico son tan finos que las distancias entre las diferentes capas de carbón tienen el grosor de unas moléculas.[8] Los condensadores se denominan de doble capa porque cada capa de electrolito tiene dos capas de carga.

Debido a la naturaleza porosa del carbón, cada capa tiene una gran superficie de carbón en contacto con el electrolito (entre 400 y 2000 m^2/g). Esta gran superficie, junto con la fina capa de electrolito, permite lograr una gran capacidad. Como las capas de electrolito son muy finas, la mayoría de los condensadores de doble capa tienen bajos voltajes de ruptura dieléctrica. Un EDLC de una batería pesa 60 gramos, tiene una capacidad de 350 farads y su voltaje de ruptura es de 2,5 volts.[9] Como el voltaje máximo es tan bajo, los EDLC no se suelen usar de uno en uno. Asociaciones en serie de seis de estos condensadores tienen una capacidad equivalente de 58 farads y un voltaje máximo de 15 V.[10]

Los EDLC se han incorporado a los teléfonos móviles, cámaras fotográficas y automóviles. Como los EDLC pueden recargarse con frecuencia, se espera que pronto tengan un precio asequible y una potencia suficiente como para poder ser usados en lugar de las baterías.

1 Dray, P., *Stealing God's Thunder: Benjamin Franklin's Lightning Rod and the Invention of America.* New York: Random House, 2005, pp. 45–46.
2 Cohen, I. B., *Benjamin Franklin's Science.* Cambridge: Harvard University Press, 1990, pp. 4–37.
3 *History of PCB Manufacturing in Anniston.* 2000. Solutia http://www.solutia.com/pages/anniston/pcbhistory.asp As of Sept. 2006.
4 Lloyd, R. J. W., et al., *Current Intelligence Bulletin 7—Polychlorinated Biphenyls (PCBs).* Washington, D.C.: Centers for Disease Control, Nov. 3, 1975. http://www.cdc.gov/niosh/78127_7.html As of Sept. 2006.
5 *EPA Bans PCB Manufacture; Phases Out Uses.* United States Environmental Protection Agency, Apr. 19, 1979. http://www.epa.gov/history/topics/pcbs/01.htm As of Sept. 2006.
6 *Brookhaven National Laboratory Reduces Mercury and PCBs.* United States Environmental Protection Agency, http://www.epa.gov/epaoswer/hazwaste/minimize/brookhav.htm As of Sept. 2006.
7 Chen, L., et al., "Migration and Redistribution of Oxygen Vacancy in Barium Titanate Ceramics." *Applied Physics Letters*, Aug. 14, 2006, Vol. 89, No. 7, Letter 071916.
8 Prophet, G., "Supercaps for Supercaches." *Electronic Design News*, Jan. 9, 2003, pp. 53–58.
9 Blankenship, S., "It Looks Like a Battery, but It's an Ultracapacitor." *Power Engineering*, May 2004, pp. 64–65.
10 Everett, M., "Ultracapacitors Turn Malibus into Mercedes." *Machine Design*, Dec. 8, 2005, pp. 82–88.

Resumen

1. La capacidad es una magnitud física importante que relaciona carga con diferencia potencial.
2. Los dispositivos conectados *en paralelo* tienen la misma diferencia de potencial entre sus respectivos extremos *debido al modo en que están conectados*.
3. Dos dispositivos están conectados *en serie* si su conexión se establece mediante un hilo en el *que no existen nudos*.
4. La regla de Kirchhoff de las mallas establece que la suma de diferencias de potencial en un circuito cerrado es cero.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Condensador	Un condensador es un dispositivo que almacena carga y energía. Consta de dos conductores próximos y aislados entre sí que contienen cargas iguales y opuestas.	
2. Capacidad	Definición de capacidad. $$C = \frac{Q}{V}$$	24.1
Conductor aislado	Q es su carga total, V su potencial respecto al infinito o respecto de otro punto que consideramos origen de potenciales.	
Condensador	Q es el valor absoluto de la carga de cada conductor y V es el de la diferencia de potencial entre los conductores.	
Conductor esférico aislado	$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$	24.2
Condensador de placas paralelas	$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$	24.6
Condensador cilíndrico	$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$	24.7
Energía almacenada en un condensador	$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$	24.8
Densidad de energía debida a un campo eléctrico	$$u_e = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$	24.9
3. Capacidad equivalente		
Condensadores en paralelo	Cuando dos o más dispositivos se conectan en paralelo, el voltaje entre sus extremos es el mismo en cada uno de ellos. $$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$	24.13
Condensadores en serie	Cuando los dispositivos están en serie, las caídas de voltaje se suman. Si la carga neta de cada par de placas es cero, entonces: $$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$$	24.17
4. Dieléctrico		
Comportamiento macroscópico	Un dieléctrico es un material no conductor. Cuando un dieléctrico se inserta entre las placas de un condensador, el campo eléctrico dentro del mismo se debilita y la capacidad se incrementa en el factor κ, la constante dieléctrica.	
Análisis molecular	El campo en el dieléctrico de un condensador se debilita porque los momentos dipolares de las moléculas (preexistentes o inducidos) tienden a alinearse con el campo y producen un campo eléctrico que se opone al campo externo. El momento dipolar alineado del dieléctrico es proporcional al campo externo.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Campo eléctrico	$E = \frac{E_0}{\kappa}$	24.18
Capacidad	$C = \kappa C_0$	24.19
Permitividad ϵ	$\epsilon = \kappa\epsilon_0$	24.21
Usos de un dieléctrico	1. Aumenta la capacidad 2. Aumenta la resistencia a la ruptura dieléctrica 3. Separa físicamente los conductores	
***5. Efecto piezoeléctrico**	En ciertos cristales que contienen moléculas polares, una tensión mecánica polariza las moléculas induciendo un voltaje a través del cristal. Inversamente, la aplicación de un voltaje induce una tensión mecánica (deformación) en el cristal.	
***Efecto piroeléctrico**	En ciertos cristales, un aumento de la temperatura modifica la polarización del material, generando en ellos un voltaje.	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

24.1 $C_2 = C_1$. La capacidad no depende de la carga. Si la carga se triplica, el potencial de la esfera también y el cociente de ambas magnitudes permanece constante.

24.2 La capacidad de cualquier condensador no depende del potencial. Para aumentar el potencial es preciso aumentar la carga y viceversa. La relación Q/V sólo depende de la geometría del condensador y del dieléctrico existente entre sus placas.

24.3 La carga neta permanece constante. La batería transfiere carga como la bomba de agua transfiere agua. La cantidad de agua en la bomba y la de carga en la batería permanecen constantes.

24.4 Un valor negativo.

24.5 Sí. La capacidad se define $C = Q/V$. De esta forma, para un condensador aislado y cargado, la carga permanece constante y la capacidad es inversamente proporcional al voltaje V. Cuando se introduce un dieléctrico en un condensdaor aislado, se induce carga ligada en la superficie del dieléctrico, lo cual implica una reducción del módulo del campo eléctrico dentro de él. El voltaje es directamente proporcional al módulo del campo eléctrico, de tal forma que una reducción de éste implica una disminución del voltaje y un aumento de la capacidad.

Respuestas a los problemas prácticos

24.1 $9{,}0 \times 10^9$ m, que es alrededor de 1400 veces el radio de la Tierra. (El farad es una unidad verdaderamente enorme.)

24.2 $A = 1{,}1 \times 10^8\ \text{m}^2$, que corresponde a un cuadrado de 11 km de lado.

24.3 3,7 J

24.4 $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2$

$$= \tfrac{1}{2}(-Q)V_1 + \tfrac{1}{2}(+Q)(V_1 + V) = \tfrac{1}{2}QV$$

24.5 21 V

24.6 (*a*) $C_0 = 87$ pF, (*b*) $C = 50$ pF

24.7 (*a*) $u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = 160\ \mu\text{J/m}^3$, (*b*) $\Delta\text{vol} = A\,\Delta d = 2{,}9 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$, $u_e\Delta\text{vol} = 4{,}7$ nJ, de acuerdo con el ejemplo 24.3

24.8 54 μC

24.9 4,0 V

24.10 (*a*) 50 μF, (*b*) 12 μF

24.11 $U_i = q_2/(2C_1) + q_2/(2C_2)$, donde $q = 48\ \mu$C. Así, $U_i = 288\ \mu$J. $U_f = Q_1^2/(2C_1) + Q_2^2/(2C_2) = 256\ \mu$J.

24.12 $U_2 = 4{,}0\ \mu$J, $U_3 = 24\ \mu$J, $U_4 = 8{,}0\ \mu$J. Obsérvese que $U_2 + U_3 + U_4 = 36\ \mu\text{J} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q^2/C_{eq} = \frac{1}{2}C_{eq}V^2$.

24.13 (*a*) 0,18 nF, (*b*) 2,1 nC

24.14 (*a*) $Q = 1{,}1$ nC (que es no cargado), (*b*) $V = 6{,}0$ V, (*c*) $C = 180$ pF

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Si se duplica el voltaje establecido entre las placas paralelas de un condensador plano, su capacidad (*a*) se duplica, (*b*) se reduce a la mitad, (*c*) permanece invariable.

2 • Si la carga de un conductor esférico aislado se duplica, su capacidad (*a*) se duplica, (*b*) se reduce a la mitad, (*c*) permanece invariable.

3 • Verdadero o falso: la energía electrostática por unidad de volumen se distribuye uniformemente en la región comprendida entre los dos conductores de un condensador cilíndrico.

4 • Si la diferencia de potencial de un condensador de placas paralelas se duplica variando la separación de las placas sin modificar la carga, ¿en qué factor cambia la energía eléctrica almacenada?

5 • Un condensador de aire de placas paralelas se conecta a una batería. Si la separación entre las placas del condensador se triplica mientras el condensador permanece conectado a la batería, ¿cuál es la relación entre la energía almacenada en el condensador antes y después de la separación de las placas? SSM

6 • Si el condensador del problema 5 se desconecta de la batería antes de que se duplique la separación entre las placas, ¿cuál es la relación entre las energías almacenadas antes y después de la separación?

7 • Verdadero o falso:

(*a*) La capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es siempre mayor que la mayor de las capacidades de los condensadores acoplados.

(*b*) La capacidad equivalente de la asociación de dos conductores en serie es menor que la de cualquiera de ellos siempre que la carga de los conductores que quedan aislados en la asociación sea cero.

8 • Dos condensadores inicialmente descargados de capacidad C_0 y $2C_0$, respectivamente, están conectados en serie a través de una batería. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(*a*) El condensador $2C_0$ posee una carga doble a la del otro condensador.

(*b*) El voltaje aplicado a cada condensador es el mismo.

(*c*) La energía almacenada por cada condensador es la misma.

(*d*) La capacidad equivalente es $3C_0$.

(*e*) La capacidad equivalente es $2C_0/3$.

9 • Un dieléctrico insertado en un condensador llena completamente el espacio entre las placas. Inicialmente había aire entre ellas. El condensador se conecta a una batería. Verdadero o falso:

(*a*) La capacidad crece cuando se introduce el dieléctrico.

(*b*) La carga de las placas del condensador decrece cuando se introduce el dieléctrico.

(*c*) El campo eléctrico entre las placas no varía cuando se introduce el dieléctrico.

(*d*) La energía almacenada en el condensador decrece cuando se introduce el dieléctrico. SSM

10 •• Sean dos condensadores semillenos con un dieléctrico tal como indica la figura 24.33. El área y separación entre placas son las mismas en ambos. ¿Cuál tiene mayor capacidad, el de la figura (*a*) o el de la (*b*)? Explicar la respuesta.

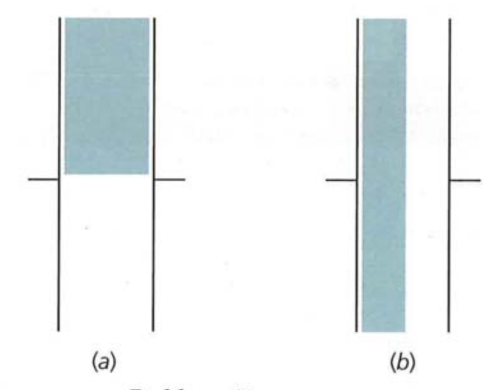


FIGURA 24.33 Problema 10

11 •• (*a*) Dos condensadores idénticos se conectan en paralelo y a su vez la asociación de ellos se conecta a los terminales de una batería. ¿Cuál es la energía almacenada en esta asociación comparada con la que almacena uno de ellos conectado a la misma batería? (*b*) A continuación, estos condensadores se conectan en serie y la asociación se conecta a los terminales de una batería. ¿Cómo es la energía total almacenada en la asociación comparada con la que almacena uno de ellos conectado a la misma batería? SSM

12 •• Dos condensadores idénticos se conectan en serie a una batería de 100 V. Cuando se conecta un único condensador a esta batería, la energía almacenada es U_0. ¿Cuál será la energía total almacenada en los dos condensadores cuando se conectan en serie a la batería? (*a*) $4U_0$, (*b*) $2U_0$, (*c*) U_0, (*d*) $U_0/2$, (*e*) $U_0/4$.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

13 •• Desconectar el cable coaxial de una televisión o de cualquier otro aparato y medir (estimar) el diámetro del conductor central y de la malla conductora. Considerar un valor plausible (véase la tabla 24.1) para la constante dieléctrica del material que separa los conductores y estimar la capacidad por unidad de longitud del cable. SSM

14 •• APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO Para generar las altas densidades de energía necesarias para construir un láser de pulsos basado en nitrógeno, se usa una descarga de un condensador de gran capacidad. La energía requerida por pulso (es decir, por cada descarga) es generalmente de 100 J. Estimar la capacidad necesaria si la descarga se realiza a través de una separación de 1 cm de ancho, suponiendo que la ruptura dieléctrica del nitrógeno se produce con el mismo valor de campo que la del aire.

15 •• Estimar la capacidad de una botella de Leyden como la de la figura 24.34. La imagen del hombre mide la décima parte de la altura media de un hombre. SSM

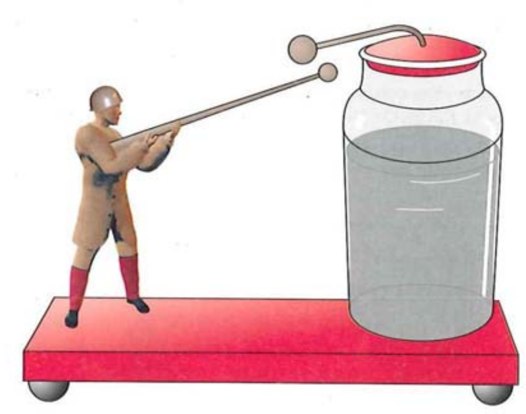


FIGURA 24.34 Problema 15

CAPACIDAD

16 • Un conductor esférico aislado de radio 10,0 cm se carga a 2,00 kV (el potencial lejos de la esfera es cero). (*a*) ¿Cuánta carga se deposita en el conductor? (*b*) ¿Cuál es la capacidad de la esfera? (*c*) ¿Cómo se modificaría la capacidad de la esfera si se cargase a 6 kV?

17 • Un condensador tiene una carga de 30,0 μC. La diferencia de potencial entre los conductores es de 400 V. ¿Cuál es su capacidad?

18 •• Dos esferas conductoras aisladas de radios iguales tienen cargas $+Q$ y $-Q$, respectivamente. Si se separan una distancia mucho mayor que sus radios, ¿cuál es la capacidad de este inusual condensador?

ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA ELÉCTRICA

19 • (*a*) Un condensador de 3,00 μF se carga a 100 V. ¿Cuánta energía se almacena en el condensador? (*b*) ¿Cuánta energía adicional se necesita para cargar el condensador desde 100 a 200 V? SSM

20 • Se carga un condensador de 10 μF hasta $Q = 4{,}0$ μC. (*a*) ¿Cuánta energía almacena? (*b*) Si se transfiere la mitad de la carga, ¿cuánta energía permanece almacenada?

21 • (*a*) Calcular la energía almacenada en un condensador de 20,0 nF cuando las cargas en las placas son ±5,00 μC. (*b*) ¿Cómo varía la energía almacenada si se multiplican por 2 las cargas?

22 • ¿Cuál es la máxima densidad de energía en una región donde hay aire seco en condiciones normales?

23 •• Un condensador de placas paralelas tiene las placas de 2 m^2 de área y una separación de 1,0 mm. Se carga hasta 100 V. (*a*) ¿Cuál es el campo eléctrico existente entre las placas? (*b*) ¿Cuál es la energía por unidad de volumen en el espacio situado entre las placas? (*c*) Hallar la energía total multiplicando la respuesta dada en el apartado (*b*) por el volumen comprendido entre las placas. (*d*) Hallar la capacidad *C*. (*e*) Calcular la energía total a partir de $U = \frac{1}{2}CV^2$, y comparar el resultado con el del apartado (*c*). SSM

24 •• Dos esferas concéntricas tienen radios $r_1 = 10$ cm y $r_2 = 10{,}5$ cm, respectivamente. La interior se carga con $Q = 5$ nC distribuidos uniformemente por su superficie y la exterior también tiene una carga $-Q$ en su superficie. (*a*) Calcular la energía almacenada debida al campo eléctrico dentro de las esferas. *Ayuda: se pueden considerar las esferas como láminas paralelas separadas por 0,5 cm. ¿Por qué?* (*b*) Determinar la capacidad del sistema formado por estas dos esferas. (*c*) Estimar la energía total almacenada debida al campo eléctrico a partir de $\frac{1}{2}Q^2/C$ y comparar este dato con el resultado del apartado (*a*).

25 •• Un condensador de placas paralelas con placas de área 500 cm^2 se carga con una diferencia de potencial *V* y después se desconecta de la fuente de voltaje. Cuando las placas se separan 0,4 cm, el voltaje entre ellas se incrementa en 100 V. (*a*) ¿Cuánto vale la carga *Q* en la placa positiva del condensador? (*b*) ¿En cuánto ha crecido la energía almacenada en el condensador por causa del movimiento de las placas? Explicar la respuesta. (*c*) Justificar el resultado de la parte (*b*) determinando la variación de la energía del condensador al mover las placas.

COMBINACIONES DE CONDENSADORES

26 • (*a*) ¿Cuántos condensadores de 1,0 μF habrá que conectar en paralelo para almacenar 1 μC de carga con una diferencia de potencial de 10 V aplicada a cada uno de ellos? (*b*) ¿Cuál será la diferencia de potencial existente entre los bornes de esta asociación? (*c*) Si estos condensadores de 1,0 μF se conectan en serie y la diferencia de potencial en cada uno de ellos es 10 V, hallar la carga en cada uno de ellos y la diferencia de potencial existente en los extremos de la asociación.

27 • Un condensador de 3,0 μF y otro de 6,0 μF se conectan en serie y la asociación se conecta en paralelo con un condensador de 8,0 μF. Hacer un diagrama de esta asociación ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta asociación?

28 • Tres condensadores se conectan en forma de una red triangular como indica la figura 24.35. Determinar la capacidad equivalente entre los terminales *a* y *c* en función de las tres capacidades.

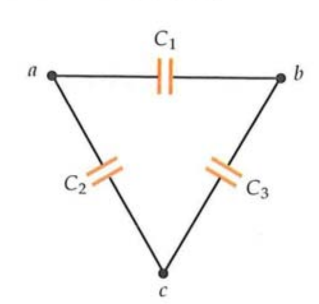


FIGURA 24.35 Problema 28

29 •• Un condensador de 10,0 μF y otro de 20,0 μF se conectan en paralelo y se aplica al conjunto una batería de 6,0 V. (*a*) ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta asociación? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada a cada condensador? (*c*) Hallar la carga que tiene cada condensador. (*d*) Hallar la energía almacenada en cada condensador.

30 •• Se conecta un condensador de 10,0 μF en serie con otro de 20,0 μF y se aplica al conjunto una batería de 6,0 V. (*a*) ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta asociación? (*b*) Hallar la carga de cada condensador. (*c*) Hallar la diferencia de potencial en cada condensador. (*d*) Calcular la energía almacenada en cada condensador.

31 •• Tres condensadores idénticos se conectan de tal modo que su capacidad equivalente máxima es 15 μF. (*a*) Describir cómo se han combinado los condensadores. (*b*) Existen otras tres formas de combinar los tres condensadores en un circuito. ¿Cuáles son las capacidades equivalentes de cada asociación?

32 •• Para el dispositivo que se muestra en la figura 24.36, calcular: (*a*) la capacidad total efectiva entre los terminales, (*b*) la carga almacenada en cada uno de los condensadores, (*c*) el voltaje a través de cada condensador y (*d*) la energía total almacenada.

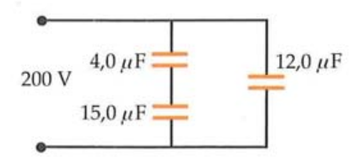


FIGURA 24.36 Problema 32

33 •• (*a*) Demostrar que la capacidad equivalente de dos condensadores en serie puede escribirse en la forma

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(*b*) Ulilizando esta fórmula, demostrar que C_{eq} es siempre menor que la menor capacidad de los condensadores que componen la asociación en serie. (*c*) Demostrar que la capacidad equivalente de tres condensadores en serie se puede escribir como sigue

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}$$

(*d*) Con la última expresión, demostrar que la capacidad equivalente es menor que cualquiera de los tres condensadores acoplados en serie.

34 •• Para el dispositivo de la figura 24.37, calcular (*a*) la capacidad total efectiva entre los terminales, (*b*) la carga almacenada en cada uno de los condensadores y (*c*) la energía total almacenada.

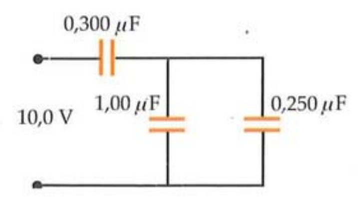


FIGURA 24.37 Problema 34

35 •• Cinco condensadores idénticos de capacidad C_0 están conectados en un circuito "de puente" como indica la figura 24.38. (*a*) ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos *a* y *b*? (*b*) Determinar la capacidad equivalente entre los puntos *a* y *b* si el condensador del centro se sustituye por otro de capacidad 10 C_0.

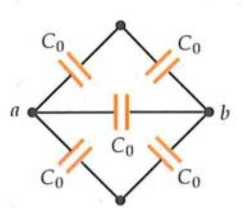


FIGURA 24.38 Problema 35

36 •• Proyectar un circuito de condensadores que tenga una capacidad de 2 μF y una tensión de ruptura de 400 V utilizando todos los condensadores de 2 μF que se necesiten, sabiendo que todos ellos poseen un voltaje de ruptura dieléctrica de 100 V. Dibujar el diagrama.

37 •• Hallar todas las capacidades efectivas posibles que pueden obtenerse utilizando tres condensadores de 1,0; 2,0 y 4,0 μF en cualquier asociación que incluya a los tres o a dos cualesquiera de los condensadores.

38 ••• ¿Cuál es la capacidad equivalente de una escalera infinita de condensadores como la de la figura 24.39? Expresarlo en función de C, que es la capacidad de cada condensador.

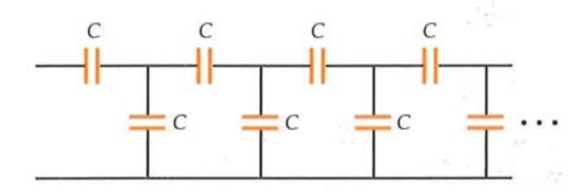


FIGURA 24.39 Problema 38

CONDENSADORES DE PLACAS PARALELAS

39 • Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad de 2 μF y la separación entre las placas es de 1,6 mm. (*a*) ¿Cuál es el valor máximo de la diferencia de potencial que puede establecerse entre las placas del condensador antes de que se produzca la ruptura dieléctrica del aire? (*b*) ¿Cuál es el valor de la carga que puede almacenar el condensador antes de que se produzca esta ruptura?

40 • Entre las placas de un condensador de placas paralelas circulares existe un campo eléctrico de 2×10^4 V/m, siendo de 2 mm la separación de las placas. (*a*) ¿Cuál es el voltaje a través del condensador? (*b*) ¿Qué radio deben tener las placas para que la carga almacenada sea de 10 μC?

41 •• Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de 0,14 μF. Las placas están separadas entre sí 0,5 mm. (*a*) ¿Cuál es el área de cada placa? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial si en una de las placas existe una carga de 3,2 μC y en la otra de −3,2 μC? (*c*) ¿Cuánta energía hay almacenada? (*d*) ¿Qué cantidad de carga puede contener el condensador antes de que tenga lugar la ruptura dieléctrica del aire entre las placas?

42 •• Diseñar un condensador de placas paralelas de capacidad 0,1 μF con aire entre las placas que pueda cargarse hasta una diferencia de potencial máxima de 1000 V. (*a*) ¿Cuál es la mínima separación posible entre la placas? (*b*) ¿Qué área mínima deben tener las placas del condensador?

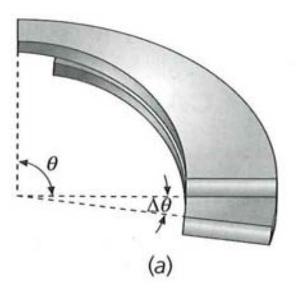
CONDENSADORES CILÍNDRICOS

43 • Para entender experimentos introductorios en un laboratorio elemental de Física Nuclear es necesario conocer el interior de un tubo Geiger. Un tubo Geiger se compone de un alambre de 0,2 mm de radio y 12 cm de longitud, rodeado de un conductor cilíndrico coaxial de la misma longitud y 1,5 cm de radio. (*a*) Hallar su capacidad admitiendo que el gas del interior del tubo tiene una constante dieléctrica $\kappa = 1$. (*b*) Hallar la carga por unidad de longitud sobre el alambre cuando la diferencia de potencial entre éste y el conductor cilíndrico coaxial es de 1,2 kV.

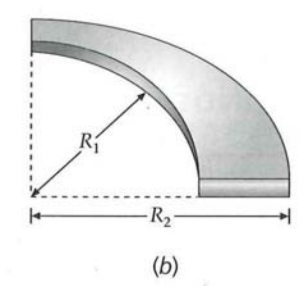
44 •• Un condensador cilíndrico se compone de un hilo largo de radio R_1 y longitud L con una carga $+Q$ y una corteza cilíndrica exterior concéntrica de radio R_2, longitud L y carga $-Q$. (*a*) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio. (*b*) ¿Cuánta energía existe en la corteza cilíndrica de radio R, espesor dr y volumen $2\pi rL\,dR$ existente entre los conductores? (*c*) Integrar la expresión obtenida en el apartado (*b*) para hallar la energía total almacenada en el condensador. Comparar el resultado con el valor obtenido a partir de $U = Q^2/(2C)$ considerando también la conocida expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico.

45 ••• Tres cortezas cilíndricas conductoras, delgadas y concéntricas poseen radios de 0,2, 0,5 y 0,8 cm. El espacio entre las cortezas se llena de aire. El cilindro más interno está conectado con el más externo. Determinar la capacidad por unidad de longitud del sistema.

46 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un *goniómetro* es un instrumento para medir ángulos de forma precisa. En la figura 24.40*a* se muestra un *goniómetro capacitivo*. Cada placa del condensador variable (figura 24.40*b*) está formada por un semicírculo estrecho (de pequeño grosor) de metal con radio interior R_1 y radio exterior R_2. Las placas tienen un eje de rotación común y la anchura de la capa de aire que separa las placas es d. Calcular la capacidad en función del ángulo θ y de los parámetros dados en el texto de este problema.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 24.40 Problema 46

47 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En la figura 24.41 se muestra un *medidor capacitivo de presión*. Dos placas de área A están separados por un material de constante dieléctrica κ, grosor d, y módulo de Young Y. Si la presión entre las placas aumenta ΔP, ¿cuál es la variación de la capacidad?

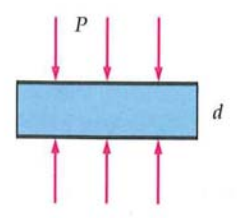


FIGURA 24.41 Problema 47

CONDENSADORES ESFÉRICOS

48 •• Suponer que la Tierra es un conductor esférico. (*a*) ¿Cuál es su capacidad? (*b*) Suponiendo que el módulo del campo eléctrico en la superficie de la Tierra es de 150 V/m, ¿cuál es la densidad de carga que le correspondería? Expresar este valor en unidades de carga fundamental e por centímetro cuadrado.

49 •• Un condensador esférico está formado por dos cortezas esféricas concéntricas y delgadas, de radios R_1 y R_2. (*a*) Demostrar que la capacidad viene dada por $C = 4\pi\epsilon_0 R_1R_2/(R_2 - R_1)$. (*b*) Demostrar que cuando los radios de las cortezas son casi iguales, la capacidad del sistema viene dada, aproximadamente, por la expresión correspondiente a un condensador de placas paralelas $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de la esfera y $d = R_2 - R_1$. SSM

50 •• Un condensador esférico tiene una esfera interior de radio R_1 con carga $+Q$ y una corteza esférica delgada exterior de radio R_2, concéntrica a la primera y con carga $-Q$. (*a*) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio. (*b*) ¿Cuánta energía electrostática está almacenada en una corteza esférica de radio r, espesor dr, y volumen $4\pi r^2\,dr$ ubicada entre los conductores? (*c*) Integrar la expresión obtenida en el apartado (*b*) para hallar la energía total almacenada en el condensador y comparar el resultado con el obtenido a partir de $U = \frac{1}{2}QV$.

51 ••• Una corteza esférica de radio R posee una carga Q distribuida uniformemente en su superficie. Determinar el radio r de la esfera que cumpla la condición de que la mitad de la energía total electrostática del sistema está contenida en la región infinita más allá de la esfera.

CONDENSADORES DESCONECTADOS Y RECONECTADOS

52 •• Un condensador de 2,0 μF se carga a una diferencia de potencial de 12 V y, a continuación, se desconecta de la batería. Cuando se conecta un segundo condensador (inicialmente sin cargar) en paralelo a este condensador, la diferencia de potencial disminuye hasta 4,0 V. ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador?

53 •• Dos condensadores, uno de 100 pF y otro de 400 pF, se cargan hasta 12 V. Entonces, se desconectan de la fuente de voltaje y se conectan entre sí en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos. (*a*) Calcular la diferencia de potencial resultante a través de cada uno de los condensadores. (*b*) Calcular la energía disipada al realizar las conexiones. SSM

54 •• Dos condensadores de capacidad $C_1 = 4\ \mu$F y $C_2 = 12\ \mu$C se encuentran conectados en serie y alimentados por una batería a 12 V. Se desconectan cuidadosamente sin que se descarguen y se conectan en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos. (*a*) Calcular la diferencia de potencial a través de cada uno de los condensadores después de ser conectados. (*b*) Hallar la energía inicial y final almacenada en los condensadores.

55 •• Un condensador de 1,2 μF se carga a 30 V. Después de la carga, se desconecta de la fuente de voltaje y se conecta a otro condensador descargado. El voltaje final es de 10 V. (*a*) ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador? (*b*) ¿Cuánta energía se disipó al realizar la conexión?

56 •• Un condensador de 12 μF y otro de capacidad desconocida se cargan ambos a 2,00 kV y después se desconectan de la fuente de tensión. Posteriormente, los condensadores se conectan uno al otro, de tal forma que la placa positiva de uno se conecta a la negativa del otro y la negativa de este último a la positiva del primero. El voltaje final del condensador de 12 μF es de 1 kV. (*a*) ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador? (*b*) ¿Cuánta energía se disipa después de conectar los condensadores?

57 •• Dos condensadores de 4 y 12 μF, en paralelo, se conectan a una batería de 12 V. Se desconectan de la batería y luego se conectan el uno al otro, uniendo eléctricamente la placa positiva de uno con la negativa del otro y la negativa del primero con la positiva del segundo. (*a*) Calcular el voltaje a través de cada condensador. (*b*) Determinar la energía almacenada en los condensadores una vez desconectados de la batería y la que concentran después de que se vuelven a conectar entre sí.

58 •• Un condensador de 20 pF se carga hasta 3 kV, se desconecta de la batería y luego se conecta en paralelo con un condensador descargado de 50 pF. (*a*) ¿Qué carga adquiere cada uno de los condensadores? (*b*) Calcular la energía inicial almacenada en el condensador de 20 pF y la energía final almacenada en los dos condensadores. ¿Se pierde o se gana energía al conectar los dos condensadores?

59 •• Tres condensadores, $C_1 = 2\ \mu$F, $C_2 = 4\ \mu$F y $C_3 = 6\ \mu$F, conectados en paralelo, se cargan con una fuente de 200 V. A continuación, se desconectan de la fuente y luego se conectan de nuevo las placas positivas con las negativas como indica la figura 24.42. (*a*) ¿Cuál es el voltaje a través de cada uno de los condensadores con los interruptores S_1 y S_2 cerrados, pero con el S_3 abierto? (*b*) Después de cerrar S_3, ¿cuál es la carga final de cada condensador? (*c*) Determinar el voltaje a través de cada condensador después de cerrar S_3. SSM

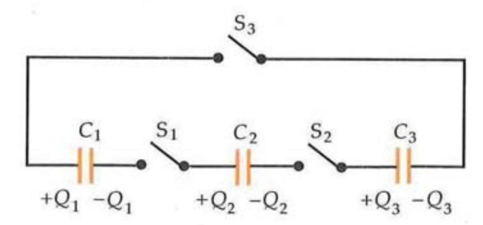


FIGURA 24.42 Problema 59

60 •• Un condensador de capacidad C tiene carga Q. Un estudiante conecta un terminal del condensador a un terminal de un condensador idéntico descargado. Cuando se conectan los terminales restantes, la carga fluye hasta que se restablece el equilibrio electrostático y ambos condensadores tienen una carga $Q/2$. Comparar la energía total inicialmente almacenada en el condensador en solitario con la energía total almacenada en los dos condensadores cuando vuelve a ser restablecido el equilibrio electrostático ¿A qué se debe la diferencia de energía? *Esta energía, al conectar los hilos, es disipada en calor por efecto Joule, el cual se analiza en el capítulo 25.*

DIELÉCTRICOS

61 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El asistente de un laboratorio tiene el encargo de su director de construir un condensador de placas paralelas cuyo coste sea reducido y que se pueda usar para experimentos del laboratorio. El diseño se hace con dos láminas finas de metal de aluminio y utilizando polietileno como material dieléctrico cuya constante dieléctrica es 2,30. El área de cada hoja es de 400 cm^2 y la separación y el grosor del polietileno de 0,3 mm. Hallar la capacidad.

62 •• El radio y la longitud del hilo central de un tubo Geiger son 0,200 mm y 12,0 cm, respectivamente. La superficie exterior del tubo es un conductor en forma de corteza cilíndrica cuyo radio interior es 1,50 cm. La corteza es coaxial con el hilo y tiene la misma longitud (12,0 cm). El tubo se llena con un gas de constante dieléctrica $\kappa = 1{,}08$ y campo de ruptura 2×10^6 V/m. (*a*) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede mantenerse entre el alambre y la cubierta del tubo? (*b*) ¿Cuál es la carga por unidad de longitud del cable?

63 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un grupo de ingenieros de materiales ha fabricado un nuevo dieléctrico cuya constante dieléctrica es $\kappa = 24$ y que puede resistir un campo eléctrico de 4×10^7 V/m. Con este dieléctrico se quiere construir un condensador de 0,1 μF que pueda resistir una diferencia de potencial de 2000 V. (*a*) ¿Cuál es la separación mínima entre las placas? (*b*) ¿Cuál debe ser el área de las placas?

64 •• Un condensador de placas paralelas tiene sus placas separadas por una distancia d. El espacio entre las placas se llena con dos dieléctricos, uno de espesor $\frac{1}{4}d$ y constante dieléctrica κ_1 y el otro de espesor $\frac{3}{4}d$ y constante dieléctrica κ_2. Determinar la capacidad de este condensador en función de C_0, que es la capacidad sin dieléctricos.

65 •• Dos condensadores plano-paralelos iguales, cuyas placas tienen área A y están separadas por aire una distancia d, se conectan en paralelo, tal como se muestra en la figura 24.43. Cada uno tiene una carga Q. Una lámina de anchura d y área A cuya constante dieléctrica es κ se introduce entre las placas de uno de los condensadores. Calcular la carga Q' de cada condensador después de restablecer el equilibrio.

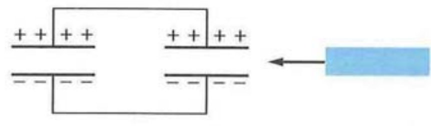


FIGURA 24.43 Problema 65

66 •• Un condensador de placas paralelas sin dieléctrico posee una capacidad C_0. La separación entre las placas es d y se inserta un bloque de constante dieléctrica κ y espesor $t < d$, de tal forma que cubre completamente una de las placas. Determinar la nueva capacidad.

67 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La membrana del axón de una célula nerviosa es una capa delgada cilíndrica de radio $R = 10^{-5}$ m, longitud $L = 0{,}1$ m y espesor $d = 10^{-8}$ m. La membrana tiene una carga positiva en uno de sus lados y una carga negativa en el otro, y actúa como un condensador de placas paralelas de área $A = 2\pi RL$ y separación d. Su constante dieléctrica es, aproximadamente, $\kappa = 3$. (*a*) Determinar la capacidad de la membrana. Si la diferencia de potencial a través de la membrana es 70 mV, determinar (*b*) la carga sobre cada lado de la membrana y (*c*) el campo eléctrico a través de la membrana.

68 •• El espacio entre placas de un condensador que se conecta a una batería está lleno de un material dieléctrico. Determinar la constante dieléctrica de este aislante si la densidad de carga inducida es (*a*) el 80% de la densidad de carga libre en las placas del condensador, (*b*) el 20% de la densidad de carga libre en las placas y (*c*) el 98% de la densidad de carga libre en las placas.

69 •• Dos placas paralelas poseen cargas Q y $-Q$. Si el espacio entre las placas está desprovisto de materia, el campo eléctrico es $2{,}5 \times 10^5$ V/m. Cuando el espacio se llena con un determinado dieléctrico, el campo se reduce a $1{,}2 \times 10^5$ V/m. (*a*) ¿Cuál es la constante dieléctrica del dieléctrico? (*b*) Si $Q = 10$ nC, ¿cuál es el área de las placas? (*c*) ¿Cuál es la carga total inducida en cada una de las caras del dieléctrico?

70 •• Determinar la capacidad del condensador de placas paralelas indicado en la figura 24.44.

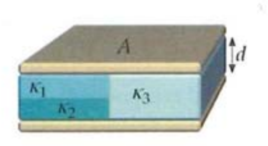


FIGURA 24.44 Problema 70

PROBLEMAS GENERALES

71 • Tenemos 4 condensadores idénticos y una batería de 100 V. Cuando un único condensador se conecta a la batería, la energía almacenada es U_0. ¿Cómo deben acoplarse los 4 condensadores para que la energía total almacenada en los cuatro vuelva a ser U_0? Describir la asociación y explicar la respuesta.

72 • Tres condensadores tienen capacidades de 2,0, 4,0 y 8,0 μF. Determinar la capacidad equivalente si (*a*) están conectados en paralelo y (*b*) están conectados en serie.

73 • Un condensador de 1,0 μF se conecta en paralelo con otro de 2,0 μF y la asociación se conecta en serie con un condensador de 6,0 μF. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta asociación?

74 • El voltaje a través de un condensador de placas paralelas con una separación entre las placas de 0,5 mm es 1200 V. El condensador se desconecta de la fuente de voltaje y la separación entre las placas se incrementa hasta que la energía almacenada en el condensador se duplica. Calcular la separación final entre las placas.

75 •• Determinar la capacidad de cada una de las redes de condensadores indicadas en la figura 24.45.

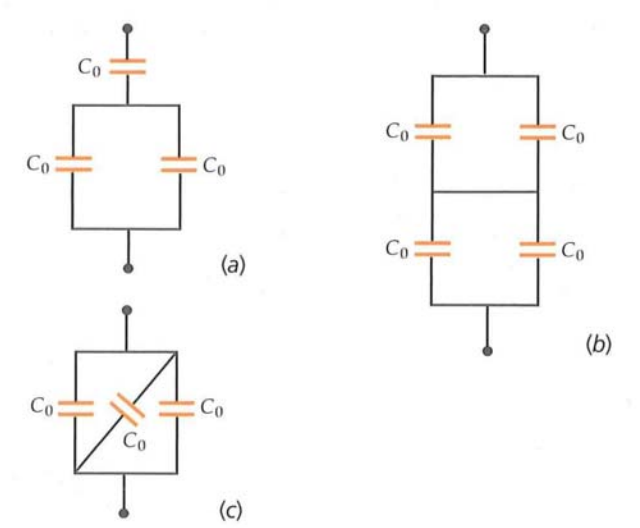


FIGURA 24.45 Problema 75

76 •• La figura 24.46 muestra cuatro condensadores conectados según una asociación llamada "puente de capacidad". Los condensadores están inicialmente descargados. ¿Cuál debe ser la relación entre las cuatro capacidades para que la diferencia de potencial entre los puntos c y d sea cero al aplicar un voltaje V entre los puntos a y b?

FIGURA 24.46 Problema 76

77 •• Un condensador de placas paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial V y luego se desconecta de la fuente de carga. Las placas se separan entonces hasta que su distancia final es $3d$. En función de A, d y V hallar expresiones que den (*a*) la nueva capacidad, (*b*) la nueva diferencia de potencial y (*c*) la nueva energía almacenada. (*d*) ¿Cuánto trabajo fue necesario realizar para variar la separación de las placas desde d hasta $3d$?

78 •• Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad C_0 sin dieléctrico. Se le inserta un dieléctrico de constante κ. El espacio entre placas se llena con un material con constante dieléctrica κ. Cuando un segundo condensador de capacidad C' se conecta en serie con el primero, la capacidad de la nueva asociación es C_0. Determinar C' en función de C_0.

79 •• Una asociación en paralelo de dos condensadores de placas paralelas de 2 μF se conecta a una batería de 100 V. La batería se desconecta y la separación entre las placas de uno de los condensadores se duplica. Determinar la carga depositada en cada uno de los condensadores. SSM

80 •• Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad C_0 y una separación entre las placas d. Se insertan entre las placas, como se indica en la figura 24.47, dos láminas dieléctricas de constantes κ_1 y κ_2, cada una de ellas de espesor $\frac{1}{2}d$ y de la misma área que las placas. Cuando la carga de las placas es Q, hallar (*a*) el campo eléctrico en cada dieléctrico y (*b*) la diferencia de potencial entre las placas. (*c*) Demostrar que la nueva capacidad viene dada por $C = [2\kappa_1\kappa_2/(\kappa_1 + \kappa_2)]C_0$. (*d*) Demostrar que $[2\kappa_1\kappa_2/(\kappa_1 + \kappa_2)]C_0$ es la capacidad equivalente de la asociación en serie de dos condensadores cuyas placas tienen una superficie A y están separadas una distancia $d/2$. El espacio entre placas de uno de estos condensadores se rellena con un dieléctrico cuya constante dieléctrica es κ_1 y el otro condensador con un material dieléctrico cuya constante dieléctrica es κ_2.

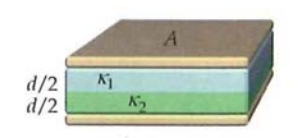


FIGURA 24.47 Problema 80

81 •• Sea un condensador de placas paralelas de área A y separación entre ellas d_0. Se inserta entre las placas una lámina metálica de espesor d y área A. (*a*) Demostrar que la capacidad viene dada por $C = \epsilon_0 A/(d_0 - d)$, independientemente del sitio en donde se coloque la lámina de metal. (*b*) Demostrar que este dispositivo puede considerarse como un condensador de separación a en serie con otro de separación b, siendo $a + b + d = d_0$.

82 •• Se rellena un condensador de placas paralelas con dos dieléctricos de igual tamaño, como puede verse en la figura 24.48. Demostrar (*a*) que este sistema puede considerarse como una asociación de dos condensadores de área $\frac{1}{2}A$ conectados en paralelo y (*b*) que la capacidad se ve aumentada en el factor $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)C_0$.

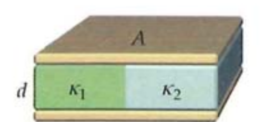


FIGURA 24.48 Problema 82

83 •• A un condensador de placas paralelas de área A y separación x se le suministra una carga Q y luego se separa de la fuente de carga. (*a*) Determinar la energía electrostática almacenada en función de x. (*b*) Hallar el aumento de energía dU debido al aumento de la separación de las placas dx a partir de $dU = (dU/dx)\,dx$. (*c*) Si F es la fuerza ejercida por una placa sobre la otra, el trabajo realizado para mover una placa la distancia dx es $F\,dx = dU$. Demostrar que $F = Q_2/2\epsilon_0 A$. (*d*) Demostrar que la fuerza hallada en el apartado (*c*) es igual a $\frac{1}{2}EQ$, siendo Q la carga en cada placa y E el campo eléctrico existente entre ellas. Estudiar la razón que justifique la presencia del factor $\frac{1}{2}$ en este resultado.

84 •• Un condensador de placas paralelas rectangulares de longitud a y anchura b posee un dieléctrico de igual anchura insertado parcialmente una distancia x entre las placas, como se indica en la figura 24.49. (*a*) Determinar la capacidad en función de x. Despreciar los efectos de los bordes. (*b*) Comprobar que la respuesta ofrece los resultados esperados para $x = 0$ y $x = a$.

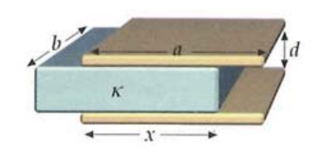


FIGURA 24.49 Problemas 84 y 85

85 ••• Un condensador aislado con carga Q se llena parcialmente de una sustancia dieléctrica, tal como indica la figura 24.49. El condensador consta de dos placas rectangulares de dimensiones a y b separadas una distancia d. El dieléctrico se introduce hasta una distancia x. (*a*) ¿Cuál es la energía almacenada en el condensador? (*Sugerencia: el sistema puede ser considerado como dos condensadores en paralelo.*) (*b*) Como la energía decrece cuando crece x, el campo eléctrico deberá realizar un trabajo positivo sobre el dieléctrico, lo cual se traduce en la existencia de una fuerza eléctrica que lo atrae hacia sí. Calcular esta fuerza mediante la variación de la energía almacenada al variar x. (*c*) Expresar la fuerza en términos de capacidad y diferencia de potencial. (*d*) ¿Dónde se origina esta fuerza? SSM

86 ••• Un condensador esférico consiste en un conductor esférico sólido de radio a y carga $+Q$ y otro formado por una corteza esférica de radio b y carga $-Q$. El espacio entre los dos conductores se llena con dos diferentes materiales dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2. La superficie de separación entre los dos dieléctricos está a una distancia $\frac{1}{2}(a + b)$ del centro. (*a*) Calcular el campo eléctrico en las regiones $a < r < \frac{1}{2}(a + b)$ y $\frac{1}{2}(a + b) < r < b$. (*b*) Integrar la expresión $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ para obtener la diferencia de potencial, V, entre los dos conductores. (*c*) Utilizar la expresión $C = Q/V$ para obtener la expresión de la capacidad del sistema. (*d*) Demostrar que la respuesta de la parte (*c*) se simplifica si $\kappa_1 = \kappa_2$.

87 ••• Una balanza basada en la capacidad de un condensador se muestra en la figura 24.50. En un lado de la balanza se coloca un peso y en el otro un condensador cuyas placas tienen una separación variable. Cuando se carga el condensador y éste adquiere una diferencia de potencial V_0, la fuerza atractiva entre placas equilibra el peso de la masa colgada en el otro brazo de la balanza. (*a*) El equilibrio de la balanza, ¿es estable? Es decir, si separamos el fiel de la balanza de la posición de equilibrio y acercamos un poco las placas entre sí, ¿tenderán éstas a cerrarse bruscamente o volverán al punto de equilibrio? (*b*) Calcular el voltaje necesario para obtener el equilibrio al poner una masa M, considerando que las placas están separadas una distancia d y la superficie de las placas es A. *Ayuda: la fuerza entre las placas viene dada por la derivada de la energía almacenada con respecto a la separación entre placas.* ¿Por qué?

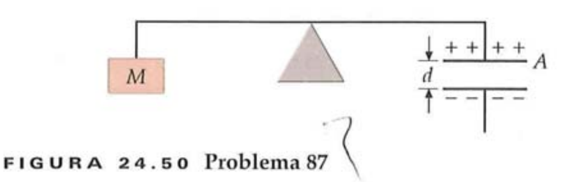


FIGURA 24.50 Problema 87

88 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Queremos construir un condensador de placas paralelas separadas por aire capaz de almacenar 100 kJ de energía. (*a*) ¿Qué volumen mínimo se requiere entre las placas del condensador? (*b*) Si disponemos de un dieléctrico que puede resistir 3×10^8 V/m y su constante dieléctrica es 5, ¿qué volumen de este dieléctrico situado entre las placas del condensador se necesitará para almacenar 100 kJ de energía?

89 ••• Dos condensadores de placas paralelas, C_1 y C_2, se conectan en paralelo. Los condensadores son idénticos excepto que C_2 tiene un dieléctrico entre sus placas. El sistema se carga mediante una fuente con una diferencia de potencial de 200 V y luego se desconecta la fuente. (*a*) ¿Cuál es la carga de cada condensador? (*b*) ¿Cuál es la energía total almacenada en los condensadores? (*c*) El dieléctrico se extrae de C_2. ¿Cuál es la energía total almacenada en los condensadores? (*d*) ¿Cuál es el voltaje final a través de los dos condensadores?

90 ••• Un condensador está formado por dos cilindros concéntricos de radios a y b ($b > a$), siendo su longitud $L >> b$. El cilindro interior posee una carga $+Q$ y el cilindro exterior una carga $-Q$. La región comprendida entre los dos cilindros se llena con un dieléctrico de constante κ. (*a*) Determinar la diferencia de potencial que existe entre los dos cilindros. (*b*) Hallar la densidad de carga libre σ_f del cilindro interior y del cilindro exterior. (*c*) Determinar la densidad de carga ligada σ_b de la superficie cilíndrica interior del dieléctrico y la superficie exterior del mismo. (*d*) Calcular la energía electrostática total almacenada. (*e*) Si el dieléctrico se desplaza sin rozamiento, ¿cuánta energía mecánica se necesita para extraer la capa cilíndrica dieléctrica?

91 ••• Antes de cerrar el interruptor S de la figura 24.51, la diferencia de potencial entre los terminales del interruptor es 120 V y el voltaje aplicado al condensador de 0,2 μF es de 40 V. La energía almacenada total en los dos condensadores es 1,44 mJ. Después de cerrar el interruptor, el voltaje entre las placas de cada condensador es de 80 V y la energía almacenada por ambos condensadores cae a 960 μJ. Determinar la capacidad de C_2 y la carga en cada condensador antes de que el interruptor se cerrase.

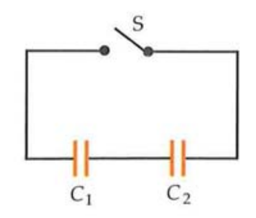


FIGURA 24.51 Problema 91

92 ••• Un condensador de placas paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial V y luego se separa de la fuente de carga. Se inserta entonces, tal como se indica en la figura 24.52, una lámina dieléctrica de constante $\kappa = 2$, espesor d y área $\frac{1}{2}A$. Supongamos que σ_1 es la densidad de carga libre en la superficie conductor-dieléctrico y σ_2 la densidad de carga libre en la superficie

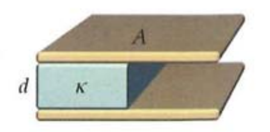


FIGURA 24.52 Problema 92

conductor-aire. (*a*) ¿Por qué debe tener el campo eléctrico el mismo valor en el interior del dieléctrico que en el espacio libre entre las placas? (*b*) Demostrar que $\sigma_1 = 2\sigma_2$. (*c*) Demostrar que la nueva capacidad es $3\epsilon_0 A/2d$ y que la nueva diferencia de potencial es $\frac{2}{3}V$. (*d*) Demostrar que la energía almacenada después de que la lámina de dieléctrico se introduce en el condensador es solamente dos tercios de la que tenía antes de insertarla.

93 ••• Un condensador posee placas rectangulares de longitud a y anchura b. La placa superior está inclinada un pequeño ángulo, como indica la figura 24.53. La separación de las placas varía de $d = y_0$ a la izquierda a $d = 2y_0$ a la derecha, siendo y_0 mucho menor que a o b. Calcular la capacidad. *Ayuda: para simplificar, suponemos la existencia de bandas de anchura* dx *y longitud* b *que actúan como condensadores diferenciales aproximados de área* b dx *y separación* $d = y_0 + (y_0/a)x$ *conectados en paralelo.*

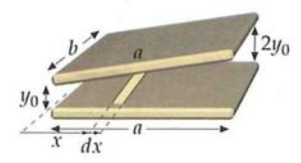
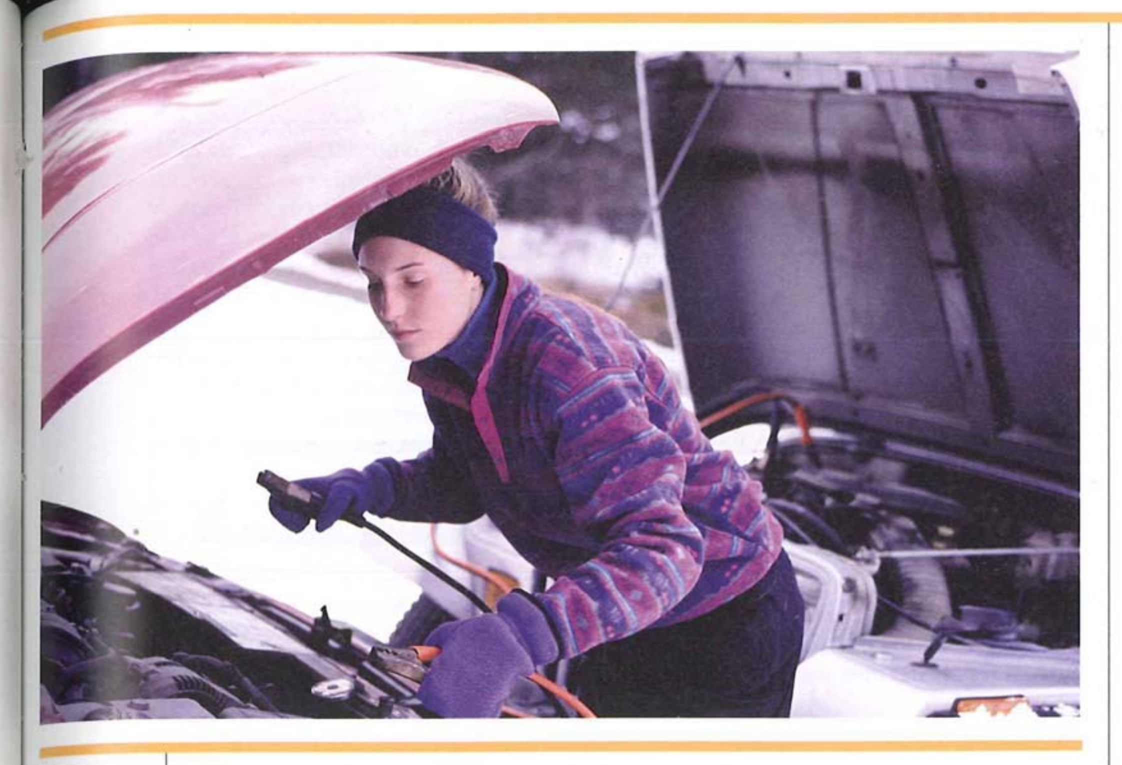


FIGURA 24.53
Problema 93

94 ••• No todos los dieléctricos que separan las placas de un condensador son rígidos. Por ejemplo, la membrana del axón de una célula nerviosa es una capa bilípida de compresibilidad finita. Consideremos un condensador de placas paralelas cuya separación de placas se mantiene con un dieléctrico de constante $\kappa = 3{,}0$ y espesor $d = 0{,}2$ mm cuando el potencial aplicado al condensador es cero. El dieléctrico, que tiene una resistencia dieléctrica de 40 kV/mm, es altamente compresible, con un módulo de Young para la compresión de 5×10^6 N/m². La capacidad del condensador en el límite $V \to 0$ es C_0. (*a*) Deducir una expresión de la capacidad en función del voltaje aplicado. (*b*) ¿Cuál es el máximo voltaje que puede aplicarse al condensador? (Suponer que κ no varía con la compresión.)



CAPÍTULO

25

CONOCER EL FUNCIONAMIENTO DE LOS CIRCUITOS DE CORRIENTE PUEDE PERMITIRNOS REALIZAR CORRECTAMENTE TAREAS POTENCIALMENTE PELIGROSAS, TALES COMO PONER EN MARCHA UN VEHÍCULO. *(©Tom Stewart/CORBIS.)*

? Si se quiere poner en marcha un coche utilizando la batería de otro, ¿qué borne de la batería del primer coche deberá conectarse al positivo del segundo? (Véase el ejemplo 25.15.)

Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua

Cuando se enciende una luz, conectamos el filamento metálico de la bombilla a través de una diferencia de potencial, lo cual hace fluir la carga eléctrica por el filamento de un modo parecido a como la diferencia de presión en una manguera de riego hace fluir el agua por su interior. El flujo de cargas constituye la corriente eléctrica. Normalmente, asociamos estas corrientes al movimiento de cargas en el interior de cables conductores, pero el haz de electrones de un tubo de rayos catódicos de un monitor de vídeo y el haz de iones cargados procedentes de un acelerador de partículas también son corrientes eléctricas.

En este capítulo, se estudian los circuitos de corriente continua (cc), es decir, cuando el sentido de la corriente en un elemento de un circuito no varía con el tiempo. Las corrientes continuas son producidas, habitualmente, mediante baterías conectadas a resistencias y condensadores. En el capítulo 29, estudiaremos los circuitos de corriente alterna (ac), en los cuales la dirección de la corriente cambia alternativamente de sentido.

25.1 CORRIENTE Y MOVIMIENTO DE CARGAS

Cuando se cierra un circuito con un interruptor, una pequeña cantidad de carga se acumula en la superficie de los cables y otros elementos conductores del circuito, creando un campo eléctrico que pone en movimiento cargas dentro de los materiales conductores. Al establecerse la corriente y acumularse la carga en diversos puntos del circuito, tienen lugar cambios muy complicados, pero rápidamente se alcanza un equilibrio o estado estacionario. El tiempo necesario para establecer el equilibrio depende del tamaño y de la conductividad de los elementos del circuito, pero es prácticamente instantáneo para la mayor parte de los objetivos. En el equilibrio, la carga ya no se acumula en los distintos puntos del circuito y la corriente es estacionaria. (En los circuitos que contienen condensadores y resistencias, la corriente puede aumentar o disminuir lentamente, pero los cambios apreciables se presentan sólo en tiempos mucho más largos que el necesario para alcanzar el estado estacionario.)

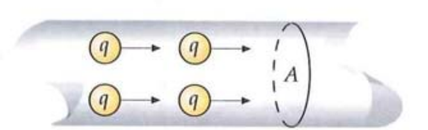


FIGURA 25.1 Segmento de un hilo conductor portador de corriente. Si ΔQ es la cantidad de carga que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt, la corriente que atraviesa A posee la intensidad $I = \Delta Q/\Delta t$.

La corriente eléctrica se define como el flujo de cargas eléctricas que atraviesa por unidad de tiempo la sección transversal de un cable. La figura 25.1 muestra un segmento de un hilo conductor de corriente en el cual los portadores de carga se mueven. Si ΔQ es la carga eléctrica que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt, la corriente o intensidad de la corriente I es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad 25.1$$

cuando Δt tiende a cero. La unidad del SI de intensidad es el **ampere** (A)*:

$$1\ \text{A} = 1\ \text{C/s} \qquad 25.2$$

Las cargas móviles pueden ser positivas o negativas. Para analizar las corrientes se establece la siguiente convención. Se elige una dirección del hilo como positiva, y la corriente se define positiva si las cargas positivas se mueven en esta dirección o las negativas en la contraria. Obviamente, la corriente será negativa si las cargas positivas se mueven en la dirección definida en el hilo como negativa o las cargas negativas llevan la dirección positiva. Hay que señalar que esta convención se estableció antes de que se supiera que son los electrones con su carga negativa los que se mueven en los metales. De esta forma, en un hilo metálico, cuando los electrones libres se mueven en la dirección definida como negativa en el hilo, la corriente es positiva y viceversa.

El movimiento real de los electrones libres en un cable conductor metálico es muy complicado. Si en el cable no existe campo eléctrico, estos electrones se mueven con direcciones aleatorias y velocidades relativamente grandes, del orden de 10^6 m/s.† Además, los electrones chocan repetidamente con los iones de la red cristalina del alambre. Como los vectores velocidad de los electrones están orientados al azar, la velocidad vectorial *media* es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, un electrón libre experimenta una aceleración debida a la fuerza $-e\vec{E}$ y adquiere una velocidad adicional en sentido opuesto al campo. Sin embargo, la energía cinética que adquiere se disipa rápidamente por choques con los iones fijos del alambre. Durante el tiempo que transcurre entre choques sucesivos, los electrones adquieren, en promedio, una velocidad adicional en el sentido opuesto al campo. Ante los procesos sucesivos de aceleración y disipación de energía, los electrones adquieren una pequeña velocidad media dirigida en sentido opuesto al campo eléctrico. Esta velocidad se denomina **velocidad de desplazamiento** y su módulo suele llamarse velocidad de deriva.

* El ampere queda definido en el capítulo 26 en términos de fuerza magnética ejercida entre dos hilos por los que pasa una corriente eléctrica. Se define coulomb como ampere × segundo.

† La energía media de los electrones libres en un metal es muy grande, incluso a temperaturas muy bajas. Estos electrones no cumplen la distribución energética clásica de Maxwell-Boltzmann y no obedecen el teorema clásico de la equipartición. En el capítulo 38, estudiaremos la distribución energética de estos electrones y calcularemos su velocidad media.

El movimiento de los electrones libres en un metal es semejante al de las moléculas de un gas, tal como el aire. En el aire en calma, las moléculas de gas se mueven a grandes velocidades instantáneas entre choque y choque, pero la velocidad vectorial media es cero. Cuando existe una brisa, las moléculas de aire tienen una pequeña velocidad de desplazamiento en la dirección de la brisa, superpuesta a las velocidades instantáneas, que son mucho mayores. De modo similar, en ausencia de un campo eléctrico aplicado, la velocidad vectorial media del gas de electrones de un metal es cero, pero cuando se le aplica un campo eléctrico, este gas de electrones adquiere una pequeña velocidad de desplazamiento.

Consideremos una corriente en un cable conductor de sección transversal A. Sea n el número de partículas libres portadoras de carga por unidad de volumen. Este número n suele llamarse **densidad numérica** de los portadores de carga. Supongamos que cada partícula transporta una carga q y se mueve con una velocidad de desplazamiento v_d. En el tiempo Δt, todas las partículas contenidas en el volumen $Av_d\,\Delta t$, sombreado en la figura 25.2, pasan a través del área A. El número de partículas en este volumen es $nAv_d\,\Delta t$, y la carga total es

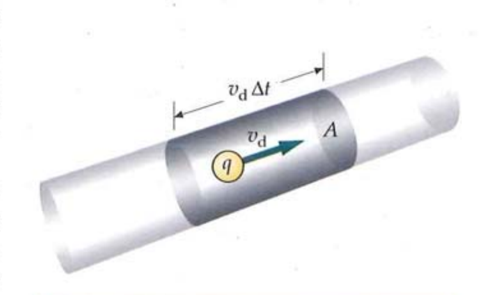


FIGURA 25.2 En el tiempo Δt, todas las cargas contenidas en el volumen sombreado pasan a través de A. Si existen n portadores de carga por unidad de volumen, cada una de carga q, la carga total de este volumen es $\Delta Q = qnAv_d\,\Delta t$, donde v_d es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga.

$$\Delta Q = qnAv_d\,\Delta t$$

La intensidad de la corriente es, por lo tanto,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d \qquad 25.3$$

RELACIÓN ENTRE LA INTENSIDAD Y LA VELOCIDAD DE DESPLAZAMIENTO

La ecuación 25.3 puede utilizarse para calcular la corriente debida al flujo de cualquier clase de partícula cargada, simplemente sustituyendo la velocidad de desplazamiento v_d por la velocidad media de las partículas de dicha clase.

La densidad de portadores de carga en un conductor se puede medir por el efecto Hall, estudiado en el tema 26. Así se ha comprobado que muchos metales tienen, aproximadamente, un electrón libre por átomo.

La corriente por unidad de área es qnv_d, que se obtiene dividiendo ambos términos de la igualdad 25.3 por el área A. El vector **densidad de corriente,** $\vec{J}$, viene dado por la siguiente expresión

$$\vec{J} = qn\vec{v}_d \qquad 25.4$$

DEFINICIÓN: DENSIDAD DE CORRIENTE

La **corriente** a través de la superficie S se define como el flujo del vector densidad de corriente $\vec{J}$ a través de la superficie. Esto es,

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int_S \vec{J}\cdot \hat{n}\,dA \qquad 25.5$$

DEFINICIÓN: CORRIENTE

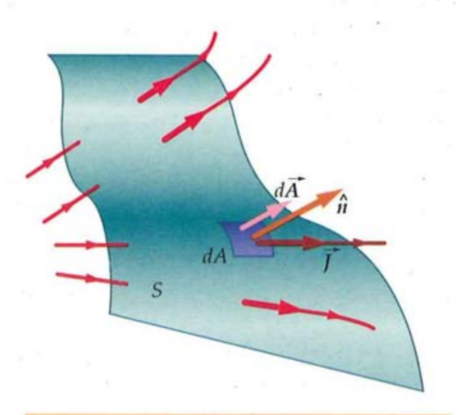


FIGURA 25.3 La densidad de corriente, $\vec{J}$, es un vector que puede representarse dibujando líneas de campo. Las líneas rojas son líneas del campo densidad de corriente. Estas líneas sirven para indicar el flujo de la corriente que indica el movimiento de las cargas. La corriente I (a través de S) es el flujo de $\vec{J}$ a través de la superficie S.

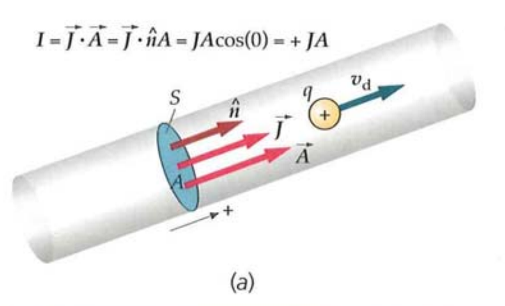
donde $d\vec{A}$ es un elemento de área multiplicado por el vector unitario $\hat{n}$ que es perpendicular a la superficie S en el punto donde se ubica dicho elemento de área (véase la figura 25.3). Si $\vec{J}$ es uniforme y si la superficie es plana, lo cual significa que el vector unitario $\hat{n}$ es constante, entonces la intensidad se puede expresar de la forma siguiente

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{A} = \vec{J}\cdot\vec{A} = \vec{J}\cdot\hat{n}A = JA\cos\theta$$

donde $\vec{A}$ es el área de la superficie y θ es el ángulo entre $\vec{J}$ y $\hat{n}$. El signo de la corriente I es el mismo que el de $\cos\theta$. Si $\theta < 90°$, I es positiva, y si $\theta > 90°$, entonces I es negativa (figura 25.4). La flecha negra con el signo +, que está dibujada en la

figura cerca de cada hilo, indica la dirección del vector $\hat{n}$ en la sección transversal de cada uno de los hilos.

> **!** Para una densidad de corriente $\vec{J}$ y una superficie S, el signo de la corriente I se determina por la elección de la dirección de $\hat{n}$.



(a)

$I = \vec{J}\cdot\vec{A} = \vec{J}\cdot\hat{n}A = JA\cos 180° = -JA$

(b)

FIGURA 25.4 La superficie plana S es perpendicular al vector densidad de corriente $\vec{J}$. El vector superficie $\vec{A}$ correspondiente a la superficie S queda definido por la dirección del vector unitario $\hat{n}$. Sin embargo, existen dos posibilidades para la dirección de $\hat{n}$. (*a*) La corriente I a través de S es positiva si las direcciones de $\hat{n}$ y $\vec{J}$ son iguales. (*b*) La corriente I a través de S es negativa si las direcciones de $\hat{n}$ y $\vec{J}$ son opuestas.

Ejemplo 25.1 Velocidad de desplazamiento

Los hilos eléctricos suelen ser de cobre con un radio de 0,815 mm. (*a*) Calcular la carga de los electrones libres de un metro de este tipo de hilo que lleva una corriente de 1,0 A. Asumir que cada átomo libre aporta un electrón libre. (*b*) Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones libres.

PLANTEAMIENTO La ecuación 25.3 relaciona la velocidad de desplazamiento con la densidad numérica de portadores de carga, que es, aproximadamente, igual a la densidad numérica de los átomos de cobre, n_a. Podemos determinar n_a a partir de la densidad ordinaria del cobre, su masa molecular y el número de Avogadro.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La velocidad de desplazamiento está relacionada con la intensidad y la densidad numérica de los portadores de la carga:

$$I = nqv_dA$$

2. Si existe un electrón libre por cada átomo, la densidad numérica de los electrones libres es igual a la densidad numérica de los átomos n_a:

$$n = n_a$$

3. La densidad numérica de los átomos n_a está relacionada con la densidad de masa ρ_m, el número de Avogadro N_A, y la masa molar M. Para el cobre, $\rho_m = 8{,}93\ \mathrm{g/cm^3}$ y $M = 63{,}5\ \mathrm{g/mol}$:

$$n_a = \frac{\rho_m N_A}{M} = \frac{(8{,}93\ \mathrm{g/cm^3})(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol})}{63{,}5\ \mathrm{g/mol}} = 8{,}47 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3 = 8{,}47 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3$$

4. La densidad de carga ρ_{fe} de los electrones libres es igual a su densidad numérica multiplicada por la carga del electrón:

$$\rho_{fe} = -en = -(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(8{,}47 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}) = -1{,}36 \times 10^{10}\ \mathrm{C/m^3}$$

5. La carga es la densidad de carga multiplicada por el volumen:

$$Q = \rho_{fe}AL = -enAL \quad \text{por lo tanto,}$$

$$Q/L = -enA = (-1{,}36 \times 10^{10}\ \mathrm{C/m^3})\,\pi(8{,}15 \times 10^{-4}\ \mathrm{m})^2 = -2{,}83 \times 10^4\ \mathrm{C/m} = \boxed{-2{,}8 \times 10^4\ \mathrm{C/m}}$$

(*b*) Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación 25.3, obtenemos v_d. (La corriente es negativa porque la ecuación 25.3 es válida sólo para cargas moviéndose en la dirección positiva.):

$$v_d = \frac{I}{nqA} = \frac{I}{-neA} = \frac{I}{Q/L} = \frac{-1{,}0\ \mathrm{C/s}}{(-2{,}83 \times 10^4\ \mathrm{C/m})} = \boxed{3{,}5 \times 10^{-2}\ \mathrm{mm/s}}$$

COMPROBACIÓN Como hay 28 000 coulombs de carga móvil por metro de hilo [parte (*a*), paso 5], sólo se puede esperar una pequeña velocidad de desplazamiento o arrastre para una corriente de, aproximadamente, un coulomb por segundo. El resultado de la parte (*b*) está en concordancia con esta afirmación.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.1 ¿Cuánto tiempo tardará un electrón en desplazarse de la batería del coche hasta el motor de arranque, una distancia de 1 m, si su velocidad de desplazamiento es $3{,}5 \times 10^{-5}$ m/s?

Si los electrones se mueven por el cable tan lentamente como indica el ejemplo 25.1, es decir, a tan solo unos pocos centenares de milímetros por segundo, ¿cómo puede ser que la luz eléctrica surja instantáneamente al cerrar el interruptor? Una analogía con el agua de una manguera puede ser útil. Al dar paso al agua por una manga de riego, larga e inicialmente vacía, hay que esperar varios segundos para que el agua se desplace desde la llave hasta el extremo opuesto de la manga. Sin embargo, si la manguera está ya llena de agua, ésta emerge casi instantáneamente. Debido a la presión del agua en el grifo, la porción de líquido más próxima es impulsada por el agua del grifo y esta porción impulsa a la porción vecina y así sucesivamente hasta que el agua se derrama por la boquilla de la manguera. Esta onda de presión se desplaza por la manguera con la velocidad del sonido en el agua y el agua alcanza rápidamente un flujo estacionario.

A diferencia de una manguera, un cable metálico no está nunca vacío. Es decir, en un alambre metálico siempre existe un número grande de electrones de conducción. Por ello, la carga empieza a moverse por toda la longitud del cable (incluido el filamento de la bombilla) casi inmediatamente después de cerrar el interruptor. El transporte de una cantidad significativa de carga en un alambre se verifica, no por causa de unas pocas cargas que se mueven rápidamente por el cable, sino por un gran número de cargas que se desplazan por el conductor lentamente. Las cargas superficiales de los cables crean un campo eléctrico, y debido a éste los electrones de conducción se mueven por el cable.

Ejemplo 25.2 Determinación de la densidad numérica de carga

En un determinado acelerador de partículas, un haz de protones de 5 MeV y radio 1,5 mm transporta una corriente de intensidad 0,5 mA. (*a*) Determinar la densidad numérica de protones del haz. (*b*) Al incidir el haz contra un blanco, ¿cuántos protones chocan contra él en un segundo?

PLANTEAMIENTO Para obtener la densidad numérica, utilizamos la relación $I = nqAv$ (ecuación 25.3), donde v es el módulo de la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga. Esta velocidad v es una velocidad media que se puede deducir a partir de la energía. La cantidad de carga Q que choca con el blanco en un tiempo Δt es $I\,\Delta t$, y el número N de protones que colisionan con él es la carga total Q dividido por la carga de un protón.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La densidad numérica está relacionada con la intensidad de corriente, la carga, el área transversal y la velocidad:

$$I = qnAv$$

2. Determinar el módulo de la velocidad de los protones a partir de su energía cinética:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = 5{,}0 \text{ MeV}$$

3. Utilizar $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg para la masa del protón y despejar la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5{,}0 \times 10^6 \text{ eV})}{1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \times \frac{1{,}60 \times 10^{-19}\text{ J}}{1 \text{ eV}}}$$

$$= 3{,}09 \times 10^7 \text{ m/s} = \boxed{3{,}1 \times 10^7 \text{ m/s}}$$

4. Sustituir estos valores y calcular n:

$$n = \frac{I}{qAv}$$

$$= \frac{0{,}50 \times 10^{-3}\ \text{A}}{(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C/protón})\ \pi(1{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2\ (3{,}10 \times 10^7\ \text{m/s})}$$

$$= 1{,}43 \times 10^{13}\ \text{protones/m}^3 = \boxed{1{,}4 \times 10^{13}\ \text{protones/m}^3}$$

(*b*) 1. El número de protones N que chocan contra el blanco en 1 s está relacionado con la carga total ΔQ que choca en 1 s y con la carga del protón q:

$$\Delta Q = Nq$$

2. La carga ΔQ que choca contra el blanco en un tiempo Δt es la intensidad multiplicada por el tiempo:

$$\Delta Q = I\,\Delta t$$

3. El número de protones es, por lo tanto:

$$N = \frac{\Delta Q}{q} = \frac{I\,\Delta t}{q} = \frac{(0{,}50 \times 10^{-3}\ \text{A})(1{,}0\ \text{s})}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C/protón}}$$

$$= 3{,}13 \times 10^{15}\ \text{protones} = \boxed{3{,}1 \times 10^{15}\ \text{protones}}$$

COMPROBACIÓN El número de protones que choca contra el blanco en el tiempo Δt es el número contenido en el volumen $Av\,\Delta t$, o sea, $N = nAv\,\Delta t$. Sustituyendo $n = I/(qAv)$, resulta $N = nAv\,\Delta t = (I/qAv)Av\,\Delta t = I\,\Delta t/q = \Delta Q/q$, que es el valor utilizado en el apartado (*b*).

OBSERVACIÓN Hemos utilizado la expresión clásica de la energía cinética en el paso 2 del apartado (*a*) sin tener en cuenta la relatividad, porque la energía cinética de los protones de 5 MeV es muy inferior a la energía en reposo del protón (~ 931 MeV). La velocidad obtenida, $3{,}1 \times 10^7$ m/s es, aproximadamente, diez veces menor que la velocidad de la luz.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.2 Utilizando la densidad numérica de cargas calculada en el apartado (*a*), determinar el número de protones por mm^3 existente en el haz.

25.2 RESISTENCIA Y LEY DE OHM

La corriente en un conductor viene impulsada por un campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del conductor que ejerce una fuerza $q\vec{E}$ sobre las cargas libres. (En el equilibrio electrostático, el campo eléctrico debe ser nulo dentro de un conductor, pero cuando un conductor transporta una corriente, ya no se encuentra en equilibrio electrostático.) Las cargas libres circulan por el conductor conducidas por las fuerzas debidas al campo eléctrico. En un metal, las cargas libres al ser negativas se mueven en dirección opuesta al campo eléctrico $\vec{E}$. Si no existieran más fuerzas sobre las cargas que las procedentes del campo eléctrico, entonces las velocidades de éstas aumentarían indefinidamente. Sin embargo, esto no ocurre porque los electrones libres interaccionan también con los iones de la red del metal, y estas interacciones producen fuerzas que se oponen a su movimiento.

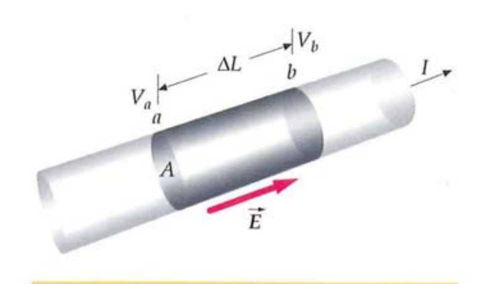


FIGURA 25.5 Segmento de alambre portador de una corriente de intensidad I. La diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico por la expresión $V_a - V_b = E\,\Delta L$.

En la figura 25.5, se muestra un segmento de cable de longitud ΔL y de sección transversal A por el cual circula una corriente I. Como el campo eléctrico está siempre dirigido de las regiones de mayor potencial hacia las regiones de menor potencial, el potencial en el punto a es mayor que en el punto b. Si consideramos la corriente como el flujo de cargas positivas, estas cargas positivas se mueven en la dirección y el sentido en que el potencial decrece. Suponiendo que el campo eléctrico $\vec{E}$ es constante a través del segmento, la **diferencia de potencial** V entre los puntos a y b es

$$V = V_a - V_b = E\,\Delta L \qquad 25.6$$

El cociente entre la caída de potencial en la dirección de la corriente* y la intensidad de la corriente se llama **resistencia** del segmento:

$$R = \frac{V}{I} \qquad 25.7$$

DEFINICIÓN: RESISTENCIA

donde la *dirección de la corriente* es la del vector densidad de corriente. La unidad de resistencia en el SI es el **ohm (Ω)**, que se define como un volt dividido por un ampere.

$$1\Omega = 1\ \text{V/A} \qquad 25.8$$

* Dado que la corriente es una magnitud escalar, no tiene dirección.

Para muchos materiales, la resistencia no depende de la caída de voltaje ni de la intensidad. Estos materiales, en los que se incluyen la mayor parte de los metales, se denominan **materiales óhmicos**. Para muchos materiales óhmicos, la resistencia permanece constante en un gran rango de condiciones. En los materiales óhmicos, la caída del potencial a través de una porción de conductor es proporcional a la corriente. La ecuación 25.7 se escribe normalmente de la siguiente forma:

$$V = IR \qquad 25.9$$

LEY DE OHM

La relación $V = IR$ se denomina normalmente como la ley de Ohm incluso cuando la resistencia varía con la corriente I.

La figura 25.6 muestra la diferencia de potencial V versus la corriente I para materiales óhmicos y no óhmicos. En los materiales óhmicos (figura 25.6*a*), la relación es lineal, mientras que en los no óhmicos (figura 25.6*b*) es no lineal. La ley de Ohm no es una relación fundamental de la naturaleza, como las leyes de Newton o las leyes de la termodinámica, sino más bien una descripción empírica de una propiedad compartida por muchos materiales bajo condiciones específicas. Como se verá más adelante, la resistencia de un conductor varía con la temperatura.



Véase el* Apéndice de matemáticas *para más información sobre

Proporciones directas e inversas

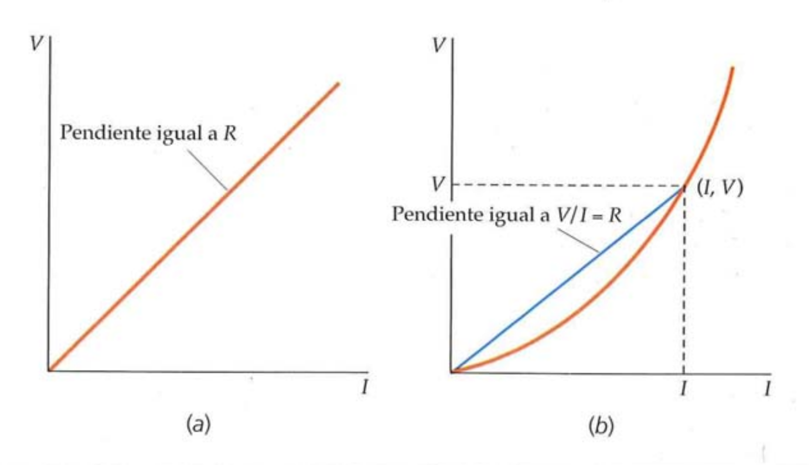


FIGURA 25.6 Gráfica de V versus I. (*a*) El potencial es proporcional a la corriente en concordancia con la ley de Ohm. La resistencia $R = V/I$ es independiente de la intensidad, ya que la pendiente de la recta es constante. (*b*) La diferencia de potencial no es proporcional a la corriente. La resistencia $R = V/I$, que es la pendiente de la recta que une el origen con el punto (I, V), crece para valores crecientes de la intensidad.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.3

Un cable de resistencia 3 Ω transporta una corriente de 1,5 A. ¿Cuál es la caída de potencial a través del cable?

La resistencia de un alambre conductor es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área transversal:

$$R = \rho \frac{L}{A} \qquad 25.10$$

siendo ρ una constante de proporcionalidad llamada **resistividad** del material conductor.* La unidad de resistividad es el ohm-metro ($\Omega \cdot m$). Obsérvese que las ecuaciones 25.9 y 25.10 para la conducción y la resistencia eléctrica son de igual forma que las ecuaciones 20.9 ($\Delta T = IR$) y 20.10 ($R = \Delta x / kA$) para la conducción y resistencia térmicas, respectivamente. En las ecuaciones eléctricas, la diferencia de potencial V sustituye a la diferencia de temperatura ΔT y $1/\rho$ reemplaza a la conductividad térmica k. (De hecho, $1/\rho$ es la conductividad eléctrica.) Realmente Ohm llegó a esta ley por la semejanza entre la conducción de la electricidad y la conducción del calor.

* El símbolo ρ utilizado aquí para la resistividad fue utilizado en capítulos anteriores para la densidad de carga volúmica. Por ello, debe tenerse cuidado al usar estos símbolos para no caer en confusión. Normalmente, el contexto aclara cuál es su significado.

† La unidad de conductividad eléctrica es el siemens (S), $1\ S = 1\ \Omega^{-1}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.4
Un cable de nicrom ($\rho = 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$) tiene un radio de 0,65 mm. ¿Qué longitud de cable se necesita para obtener una resistencia de 2,0 Ω?

Para un segmento de cable de longitud L, sección transversal A, por el que circula una corriente I, y que presenta una resistencia R, la caída de potencial a lo largo del citado segmento viene dada por

$$V = IR = I\rho \frac{L}{A}$$

La caída de tensión V y el campo eléctrico E se relacionan mediante la expresión $V = EL$. Sustituyendo V por EL, e I/A por J, se tiene que

$$EL = \rho J L$$

y dividiendo ambos términos de la igualdad por L y expresando el resultado en forma vectorial, obtenemos

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \qquad 25.11$$

La ecuación 25.11 es una versión alternativa de la ley de Ohm, la cual establece que la densidad de corriente en un punto del conductor es igual al campo eléctrico en dicho punto multiplicado por la variable recíproca de la resistividad que denominamos conductividad.

La resistividad de cualquier metal depende de la temperatura. La figura 25.7 muestra la dependencia con la temperatura de la resistividad del cobre. Este gráfico es casi una línea recta, lo cual significa que la resistividad varía casi linealmente con la temperatura.* En las tablas, suele darse la resistividad en función de su valor ρ_{20} a 20 °C, y también del **coeficiente de temperatura de la resistividad** α, que se define por

$$\alpha = \frac{(\rho - \rho_0)/\rho_0}{T - T_0} \qquad 25.12$$

donde ρ_0 es la resistividad a temperatura T_0 y ρ es la resistividad a temperatura T.

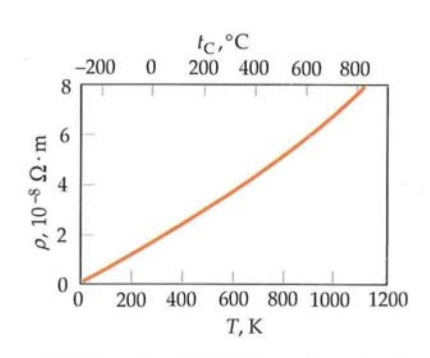


FIGURA 25.7 Gráfico de la resistividad ρ en función de la temperatura para el cobre. Como las temperaturas Celsius y absoluta difieren sólo en la elección del cero, la resistividad tiene igual pendiente representada en función de t_C o T.

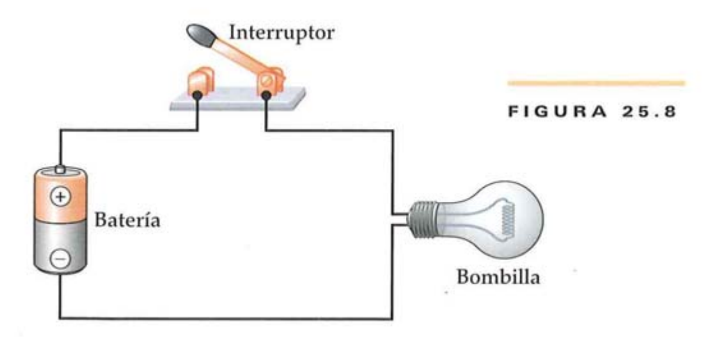


FIGURA 25.8

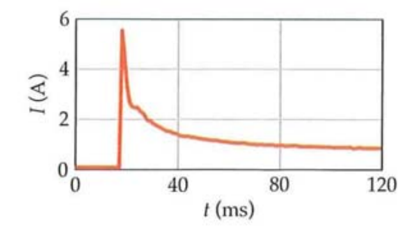


FIGURA 25.9 La corriente en el filamento de tungsteno adquiere un valor máximo de corriente y se vuelve incandescente cuando se conecta a la batería, pero aproximadamente en 100 ms la corriente adquiere un valor estacionario estimado en 0,75 A. Esto ocurre porque la resistencia del filamento aumenta con la temperatura.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 25.1

El filamento de la bombilla de la figura 25.8 es un hilo fino de tungsteno. En la figura 25.9 se da una gráfica de la corriente que atraviesa el filamento en función del tiempo. Es necesario hacer notar que la corriente crece rápidamente cuando el interruptor se cierra y entonces decrece hasta alcanzar un valor constante. (*a*) ¿Por qué la corriente alcanza inicialmente un valor mayor que el que se obtiene cuando ésta llega a un valor constante? (*b*) ¿Por qué la corriente llega a un valor constante después del valor inicial?

* A muy bajas temperaturas, existe una ruptura de esta linealidad para todos los metales, que no está indicada en la figura 25.7.

Tabla 25.1 Resistividades y coeficientes de temperatura

Material	Resistividad ρ a 20 °C, $\Omega \cdot m$	Coeficiente de temperatura α a 20 °C, K^{-1}
Elementos conductores		
Aluminio	$2{,}8 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Carbono	3500×10^{-8}	$-0{,}5 \times 10^{-3}$
Cobre	$1{,}7 \times 10^{-8}$	$3{,}93 \times 10^{-3}$
Hierro	10×10^{-8}	$5{,}0 \times 10^{-3}$
Mercurio	96×10^{-8}	$0{,}89 \times 10^{-3}$
Plata	$1{,}6 \times 10^{-8}$	3.8×10^{-3}
Platino	100×10^{-8}	$3{,}927 \times 10^{-3}$
Plomo	22×10^{-8}	$4{,}3 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5{,}5 \times 10^{-8}$	$4{,}5 \times 10^{-3}$
Aleaciones conductoras		
Constantan (60% Cu, 40% Ni)	$\sim 44 \times 10^{-8}$	$0{,}002 \times 10^{-3}$
Latón	$\sim 8 \times 10^{-8}$	2×10^{-3}
Manganina (~84% Cu, ~12% Mn, ~4% Ni)	44×10^{-8}	$0{,}000 \times 10^{-3}$
Nicrom	100×10^{-8}	$0{,}4 \times 10^{-3}$
Semiconductores		
Germanio	0,45	$-4{,}8 \times 10^{-2}$
Silicio	640	$-7{,}5 \times 10^{-2}$
Aislantes		
Ámbar	5×10^{14}	
Goma dura	$10^{13} - 10^{16}$	
Madera	$10^{8} - 10^{14}$	
Neopreno	$\sim 10^{9}$	
Poliestireno	$\sim 10^{8}$	
Porcelana	$\sim 10^{11}$	
Sulfuro	1×10^{15}	
Teflón	1×10^{14}	
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Material biológico		
Grasa	25	
Sangre	1,5	

Tabla 25.2 Diámetros y secciones transversales de alambres típicos de cobre

Orden de calibrado*	Diámetro† a 20 °C, mm	Área, mm^2
4	5,189	21,15
6	4,115	13,30
8	3,264	8,366
10	2,588	5,261
12	2,053	3,309
14	1,628	2,081
16	1,291	1,309
18	1,024	0,8235
20	0,8118	0,5176
22	0,6438	0,3255

* Calibre de hilo en América

† El diámetro d se relaciona con el número de calibrado n mediante la expresión $d = 0{,}127 \times 92^{[(36-n)/39]}$.

La tabla 25.1 muestra la resistividad ρ a 20 °C y el coeficiente de temperatura α para diversos materiales. Obsérvese el intervalo extraordinario de valores de ρ. La teoría clásica de la conducción en los metales establece que su resistividad decrece con temperaturas crecientes, siendo esta conclusión errónea y una de las razones por las que esta teoría se considera falsa. Por el contrario, con la teoría cuántica de la conducción se concluye que la resistividad de los metales aumenta con la temperatura. Las teorías de la conducción clásica y cuántica se estudian en el capítulo 38.

Los cables utilizados para transportar corriente eléctrica se fabrican en tamaño estándar. El diámetro de la sección circular se indica por un número de calibrado; los números más elevados corresponden a diámetros menores, como se ve en la tabla 25.2.

Ejemplo 25.3 Resistencia por unidad de longitud

Calcular la resistencia por unidad de longitud de un cable de cobre de calibre 14.

PLANTEAMIENTO Para calcular la resistencia por unidad de longitud del hilo del calibre 14, se necesita conocer la resistividad del cobre (tabla 25.1) y la sección transversal del hilo de cobre (tabla 25.2).

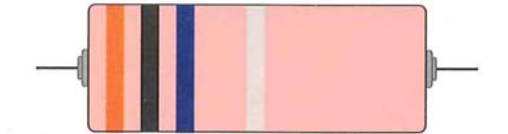
SOLUCIÓN

1. Según la ecuación 25.10, la resistencia por unidad de longitud es igual a la resistividad por unidad de área: $R = \rho\frac{L}{A}$ por lo tanto, $\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A}$
2. Considerar la resistividad del cobre y la sección del cable dadas en las tablas 25.1 y 25.2, respectivamente: $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$, $A = 2{,}08\ \text{mm}^2$
3. Utilizar estos valores para calcular R/L: $\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A} = \frac{1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}}{2{,}08 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = \boxed{8{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega/\text{m}}$

COMPROBACIÓN El hilo de cobre de calibre 14 se utiliza comúnmente en circuitos de baja intensidad. La resistencia de un filamento de 100 W, operativo con una diferencia de potencial de 120 V, es 144 Ω. Por el contrario, la resistencia de 100 m de hilo de cobre conductor viene a ser 0,817 Ω. Por consiguiente, la resistencia del hilo es despreciable comparada con la del filamento de la bombilla, tal como era de esperar.

El carbono, que posee una resistividad alta, se utiliza normalmente en las resistencias de los equipos electrónicos. Estas resistencias se pintan a menudo con bandas de colores para indicar el valor de su resistencia. En la tabla 25.3, se muestra el código para interpretar estos colores.

Tabla 25.3 Código de colores para resistencias y otros dispositivos



Colores Dígitos	Tolerancia
Negro = 0	Marrón = 1%
Marrón = 1	Rojo = 2%
Rojo = 2	Dorado = 5%
Naranja = 3	Plateado = 10%
Amarillo = 4	Ninguno = 20%
Verde = 5	
Azul = 6	
Violeta = 7	
Gris = 8	
Blanco = 9	

Las bandas de colores deben ser leídas comenzando con la que está más próxima al extremo de la resistencia. Con las primeras dos bandas se determina un número entre 1 y 99. La tercera banda representa el número de ceros que se han de añadir a la derecha del número formado por las dos primeras. En la resistencia mostrada en la figura, los colores de las tres primeras bandas son, naranja, negro y azul, por lo que el número es 30 000 000 y, consecuentemente, la resistencia es de 30 MΩ. (Si una banda verde se inserta entre la negra y la azul, la resistencia sería de 305 MΩ.) La cuarta banda representa la tolerancia. Como la banda del dibujo es plateada, la tolerancia es del 10%. El 10% de 30 es 3, por lo que la resistencia del dibujo es (30 ± 3) MΩ.



Resistencias de carbono con el código de color colocadas sobre un panel de circuitos. (*© Chris Rogers/The Stock Market.*)

PROBLEMA PRÁCTICO 25.5
¿Cuáles son los valores de la resistencia y de la tolerancia correspondientes a la resistencia de la parte de abajo y a la izquierda de la fotografía?

Ejemplo 25.4 El campo eléctrico que produce la corriente

Determinar el valor del campo eléctrico E en un cable de cobre de calibre 14 (ejemplo 25.3) cuando éste transporta una corriente de 1,3 A.

PLANTEAMIENTO Podemos determinar el campo eléctrico como la caída de voltaje por unidad de longitud del alambre, $E = V/L$. La caída de voltaje se deduce mediante la ley de Ohm, $V = IR$, y la resistencia por unidad de longitud se da en el ejemplo 25.3.

SOLUCIÓN

1. El campo eléctrico es igual a la caída de voltaje por unidad de longitud: $E = \dfrac{V}{L}$
2. Expresar la ley de Ohm para la caída de voltaje: $V = IR$
3. Aplicar esta expresión en la ecuación de E: $E = \dfrac{V}{L} = \dfrac{IR}{L} = I\dfrac{R}{L}$
4. Utilizar el valor de R/L deducido en el ejemplo 25.3 para calcular E: $E = I\dfrac{R}{L} = (1{,}3\ \text{A})(8{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega/\text{m}) = \boxed{0{,}011\ \text{V/m}}$

COMPROBACIÓN Un campo eléctrico de 0,011 V/m significa que la caída de potencial para 100 m de longitud de hilo es 1,1 V. Este resultado parece aceptable para los circuitos domésticos de 120 V. Sin embargo, una corriente de 13 A significaría una caída de 11 V, que es mucho menos aceptable. (Es inaceptable porque muchos dispositivos no funcionan adecuadamente si el potencial aplicado en sus terminales eléctricas es significativamente menor que 120 V.)

25.3 LA ENERGÍA EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Cuando se establece un campo eléctrico en un conductor, el gas de electrones incrementa su energía cinética debido al trabajo que el campo realiza sobre los electrones libres. Sin embargo, pronto se va alcanzando el estado estacionario, ya que esta energía adicional se convierte rápidamente en energía térmica del conductor por las colisiones entre los electrones y los iones de la red cristalina del material. El mecanismo por el cual el incremento de energía interna del conductor da lugar a un aumento de su temperatura se denomina **efecto Joule**.

Consideremos el segmento del alambre de longitud L y área transversal A indicado en la figura 25.10*a*. El cable transporta una corriente estacionaria dirigida hacia la derecha. La carga libre en el segmento es inicialmente Q, y durante un intervalo de tiempo Δt, esta carga sufre un pequeño desplazamiento hacia la derecha (figura 25.10*b*). Este desplazamiento equivale a que una cantidad de carga ΔQ (figura 25.10*c*) se haya movido desde el extremo de la izquierda, donde la energía potencial es $\Delta Q\ V_a$, hasta el extremo de la derecha del segmento de cable, en el cual la energía potencial es $\Delta Q\ V_b$. El cambio neto de energía potencial de Q es

$$\Delta U = \Delta Q(V_b - V_a)$$

Como $V_a > V_b$, esto supone una pérdida neta en la energía potencial de Q. La energía perdida es, por lo tanto,

$$-\Delta U = \Delta Q\ V$$

donde $V = V_a - V_b$ es la caída del potencial de un lado a otro del segmento. La variación temporal de la pérdida de energía potencial es

$$-\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V$$

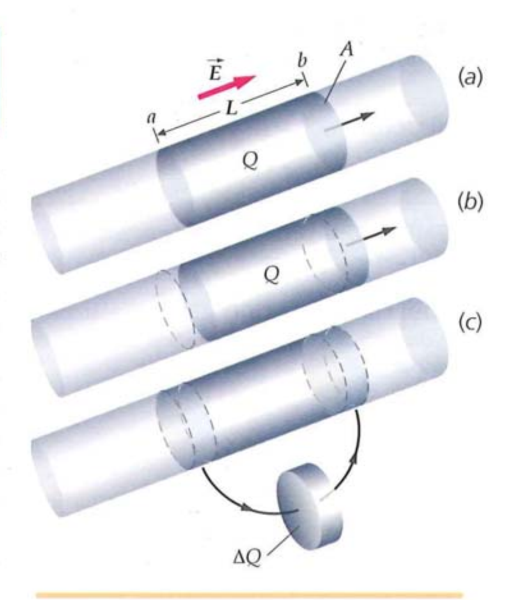


FIGURA 25.10 En el intervalo de tiempo Δt, una cantidad de carga ΔQ atraviesa el área A en el punto donde el potencial es V_a, y durante ese mismo tiempo una cantidad de carga igual atraviesa la sección A por un punto en el que el potencial es V_b. El efecto neto en este intervalo de tiempo Δt es la pérdida de una cantidad de energía potencial $\Delta Q\ V_a$ y la ganancia de $\Delta Q\ V_b$. Como $V_b < V_a$, el resultado es una pérdida neta de energía potencial.

Haciendo el límite cuando Δt tiende a cero, se obtiene

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}V = IV$$

donde $I = \Delta Q/\Delta t$ es la intensidad de la corriente. La energía perdida por unidad de tiempo es la potencia P disipada en el segmento conductor, que, a su vez, es la velocidad con la que se disipa la energía potencial eléctrica en dicho segmento:

$$P = IV \qquad 25.13$$

POTENCIA DISIPADA EN UN CONDUCTOR POR UNIDAD DE TIEMPO

Si I se expresa en amperes y V en volts, la potencia perdida viene expresada en watts. La pérdida de potencia es el producto de la disminución de energía potencial por unidad de carga, V, y el flujo de carga por unidad de tiempo, I. La ecuación 25.13 puede aplicarse a cualquier dispositivo del circuito. La potencia suministrada al dispositivo es el producto de la caída de potencial por la intensidad de la corriente. En un conductor, la energía potencial se disipa como energía térmica. Utilizando $V = IR$ o $I = V/R$, la ecuación 25.13 puede expresarse en otras formas útiles:

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \qquad 25.14$$

POTENCIA DISIPADA EN UNA RESISTENCIA

Ejemplo 25.5 Potencia disipada en una resistencia

Una resistencia de 12 Ω transporta una corriente de 3 A. Determinar la potencia disipada en esta resistencia.

PLANTEAMIENTO Como conocemos la intensidad y la resistencia, pero no la caída de potencial, la ecuación más adecuada es $P = I^2R$. Otra posibilidad sería determinar la caída de potencial de $V = IR$ y luego utilizar $P = IV$.

SOLUCIÓN

1. Calcular I^2R: $P = I^2R = (3{,}00\text{ A})^2(12{,}0\ \Omega) = \boxed{108\text{ W}}$

COMPROBACIÓN La caída de potencial a través de la resistencia es $V = IR = (3\text{ A})(12\ \Omega) =$ 36 V. Con este resultado se determina la potencia a partir de $P = IV = (3\text{ A})(36\text{ V}) = 108$ W.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.6 Un alambre de resistencia 5 Ω transporta una corriente de 3 A durante 6 s. (*a*) ¿Qué potencia se disipa en el cable? (*b*) ¿Cuánto calor se desprende en ese tiempo?

FEM Y BATERÍAS

Con objeto de mantener una corriente estacionaria en un conductor necesitamos disponer de un suministro de energía eléctrica. Un aparato o dispositivo que suministra energía eléctrica recibe el nombre de fuente de fem. (Las letras *fem* corresponden a fuerza *electromotriz*, término que hoy en día no se suele utilizar. Esta denominación induce a confusión porque no se trata de una fuerza.) Ejemplos de estas fuentes fem son una batería o pila, que convierte la energía química en energía eléctrica, o un generador, que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Una fuente de fem realiza trabajo sobre la carga que pasa a su través, elevando la energía potencial de la carga. El trabajo por unidad de carga recibe el nombre de **fem**, $\mathcal{E}$, de la fuente. La unidad de fem es el volt, la misma que la unidad de diferencia de potencial. Una **batería ideal** es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus dos terminales, independientemente del flujo de carga que exista entre ellos. La diferencia de potencial entre los terminales

de una batería ideal es igual, en valor absoluto, a la fem de la batería.

En la figura 25.11, se muestra un circuito sencillo compuesto por una resistencia R conectada a una batería ideal. La resistencia se representa mediante el símbolo -\/\/\/-. Las líneas rectas del circuito indican alambres, hilos o cables de conexión de resistencia despreciable. La fuente de fem mantiene una diferencia de potencial $\mathcal{E}$ entre los puntos a y b, siendo a el punto de mayor potencial. No existe ninguna diferencia de potencial entre los puntos a y c, ni entre los puntos d y b, ya que se admite que el alambre de conexión posee una resistencia despreciable. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los puntos c y d también es $\mathcal{E}$ y la intensidad de corriente que circula por la resistencia es $I = \mathcal{E}/R$. Como se indica en la figura, la corriente circula en el mismo sentido que las agujas del reloj.

Obsérvese que *dentro* de la fuente de fem, la carga fluye de una región de bajo potencial a otra de mayor potencial, de modo que aumenta su energía potencial.* Cuando una carga ΔQ fluye a través de la fuente de fem $\mathcal{E}$, su energía potencial se ve aumentada en la cantidad $\Delta Q\ \mathcal{E}$. En consecuencia, la carga fluye a través de la resistencia, donde esta energía potencial se disipa como energía térmica. El ritmo con el que la fuente de fem suministra energía es la potencia de salida.



La raya tiene dos órganos eléctricos en ambas partes de su cabeza, donde la corriente pasa desde la superficie de abajo de su cuerpo a la de arriba. Estos órganos se componen de columnas cada una de las cuales contiene entre 4000 y un millón de placas gelatinosas. En los peces de agua salada, estas baterías se conectan en paralelo, mientras que en los de agua dulce se conectan es serie, produciendo descargas de más alto voltaje. El agua dulce tiene una mayor resistividad que la salada, de tal forma que para ser eficaz es preciso un mayor voltaje. Con estas baterías, pueden generar descargas eléctricas de unos 50 A a 50 V, con las que pueden electrocutar a otros peces. *(Stephen Frink/CORBIS.)*

$$P = \frac{(\Delta Q)\mathcal{E}}{\Delta t} = I\mathcal{E} \qquad 25.15$$

POTENCIA SUMINISTRADA POR UNA FUENTE DE FEM

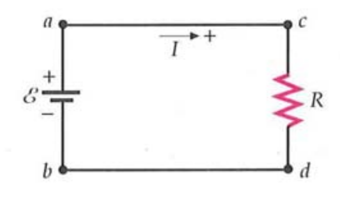


FIGURA 25.11 Circuito eléctrico simple formado por una batería ideal de fem $\mathcal{E}$, una resistencia R y cables de conexión que se supone carecen de resistencia.

En el circuito simple de la figura 25.11 la potencia suministrada por la fuente de fem es igual a la disipada en la resistencia.

Una fuente de fem puede considerarse como una especie de bomba de carga que eleva la carga eléctrica desde una región de baja energía potencial a otra región de alta energía potencial. La figura 25.12 muestra una analogía mecánica del sencillo circuito eléctrico analizado anteriormente.

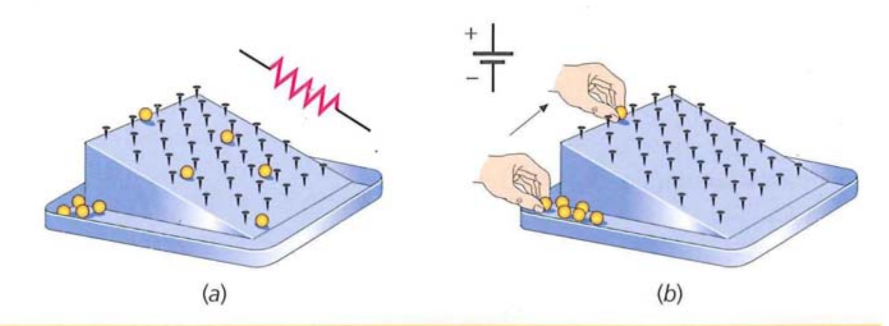


FIGURA 25.12 Analogía mecánica de un circuito simple formado por una resistencia y una fuente de fem. (*a*) Las bolitas parten de una altura h sobre el fondo y se aceleran en las colisiones con los clavos por la acción del campo gravitatorio. Los clavos son análogos a los iones de la red cristalina de la resistencia. Durante los choques, las bolitas transfieren a los clavos la energía cinética que ganan en las colisiones. Debido a las múltiples colisiones, las bolitas poseen sólo una pequeña, y aproximadamente, constante velocidad de desplazamiento hacia el fondo. (*b*) Cuando llegan al fondo, un muchacho las recoge y las devuelve a su altura original h, comenzando de nuevo el proceso. El muchacho, que realiza el trabajo mgh sobre cada bolita, es una analogía de la fuente de fem. La fuente de energía en este caso es la energía interna química del muchacho.

* Cuando una batería se carga por medio de un generador o por otra batería, la carga fluye desde una región de alto potencial a otra de bajo potencial dentro de la batería a cargar, perdiendo así energía potencial electrostática. La energía perdida se transforma en energía química y se almacena en la batería a cargar.

En una **batería real**, la diferencia de potencial entre los bornes de la batería, denominada **tensión en los bornes** no es simplemente igual al valor de la fem de la batería. Consideremos el circuito formado por una batería real y una resistencia. Si la corriente se varía modificando la resistencia R y se mide la tensión en los bornes, resulta que ésta decrece ligeramente a medida que crece la intensidad de la corriente; es como si existiera una pequeña resistencia dentro de la batería (figura 25.13).

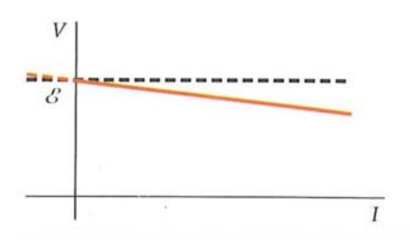


FIGURA 25.13 La línea roja muestra la tensión en los bornes V en función de I para una batería real. La línea de puntos muestra la tensión en los bornes de una batería ideal que tiene el mismo valor que $\mathcal{E}$.

Así pues, una batería real puede considerarse como una batería ideal de fem $\mathcal{E}$ más una pequeña resistencia r, denominada resistencia interna de la batería.

La figura 25.14 muestra el diagrama de un circuito formado por una batería real y una resistencia. Si la corriente en el circuito es I, el potencial en el punto a se relaciona con el potencial en el punto b mediante

$$V_a = V_b + \mathcal{E} - Ir$$

Por lo tanto, la tensión en los bornes es

$$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir \qquad 25.16$$

La tensión en los bornes de la batería disminuye linealmente con la intensidad de corriente, como se indica en la figura 25.13. La caída de potencial a lo largo de la resistencia R es IR, valor que es igual a la tensión en los bornes:

$$IR = V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir$$

Entonces, la intensidad de corriente será

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad 25.17$$

Si se conecta una batería como en la figura 25.14, la tensión en los bornes dada por la ecuación 25.13 es inferior a la fem de la batería debido a la caída de potencial que tiene lugar dentro de la resistencia interna de la batería. Las baterías reales, como una buena batería de coche, poseen una resistencia interna del orden de unas pocas centésimas de ohm, de tal modo que la tensión en los bornes es, aproximadamente, igual a la fem, a menos que la intensidad de corriente sea muy grande. Un indicio de que una batería es mala es que tenga una resistencia interna elevada. Si sospechamos que la batería de un automóvil es mala, comprobar la tensión en los bornes con un voltímetro, que extrae una corriente pequeña para hacer la medida, no siempre es suficiente. Hay que comprobar la tensión en los bornes mientras se extrae corriente, por ejemplo, tratando de arrancar el coche. Si la tensión en los bornes baja considerablemente, significa que la batería posee una alta resistencia interna, lo cual indica que es de baja calidad.

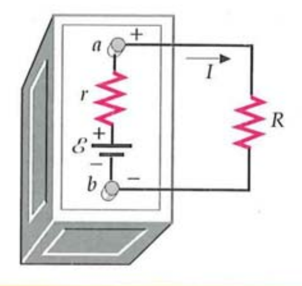


FIGURA 25.14 Una batería real puede representarse por una batería ideal de fem $\mathcal{E}$ y una pequeña resistencia r.

Frecuentemente, las baterías se especifican en ampere-horas (A · h), lo que indica la carga total que pueden suministrar:

$$1\ \text{A} \cdot \text{h} = (1\ \text{C/s})(3600\ \text{s}) = 3600\ \text{C}$$

La energía total almacenada en la batería es la carga total multiplicada por la fem:

$$E_{\text{almacenada}} = Q\mathcal{E} \qquad 25.18$$

La energía almacenada es igual al trabajo que puede realizar la batería.

Ejemplo 25.6 Voltaje, potencia y energía almacenada

Una resistencia de 11 Ω se conecta a través de una batería de fem 6 V y resistencia interna 1 Ω. Determinar (*a*) la intensidad de corriente, (*b*) la tensión en los bornes de la batería, (*c*) la potencia suministrada por la fuente de fem, (*d*) la potencia disipada en la resistencia externa y (*e*) la potencia disipada en la resistencia interna de la batería. (*f*) Si la capacidad de la batería es 150 A · h, ¿cuánta energía almacena?

PLANTEAMIENTO El diagrama del circuito es el mismo que el de la figura 25.14. Determinaremos la intensidad de la corriente mediante la ecuación 25.17 y la utilizaremos para calcular la tensión en los bornes de la batería y la potencia disipada en las resistencias.

SOLUCIÓN

(*a*) La ecuación 25.17 nos da la intensidad: $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{6{,}00 \text{ V}}{11{,}0\ \Omega + 1{,}00\ \Omega} = \boxed{0{,}500 \text{ A}}$

(*b*) Conocida la intensidad, calculamos la tensión en los bornes: $V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir = 6{,}00 \text{ V} - (0{,}500 \text{ A})(1{,}00\ \Omega) = \boxed{5{,}50 \text{ V}}$

(*c*) La potencia suministrada por la fuente de fem es igual a $\mathcal{E}I$: $P = \mathcal{E}I = (6{,}00 \text{ V})(0{,}500 \text{ A}) = \boxed{3{,}00 \text{ W}}$

(*d*) La potencia disipada en la resistencia externa es I^2R (ecuación 25.14): $I^2R = (0{,}500 \text{ A})^2(11{,}0\ \Omega) = \boxed{2{,}75 \text{ W}}$

(*e*) La potencia disipada en la resistencia interna es I^2r: $I^2r = (0{,}500 \text{ A})^2(1{,}00\ \Omega) = \boxed{0{,}250 \text{ W}}$

(*f*) La energía total almacenada por la batería es la fem multiplicada por la carga total que puede suministrar: $W = Q\mathcal{E} = \left(150 \text{ A}\cdot\text{h} \times \frac{3600 \text{ C}}{\text{A}\cdot\text{h}}\right)(6{,}00 \text{ V}) = \boxed{3{,}24 \text{ MJ}}$

COMPROBACIÓN De los 3,00 W de potencia aportados por las reacciones químicas de la batería, 2,75 W son disipados en la resistencia externa y 0,25 W en la resistencia interna de la propia batería.

OBSERVACIÓN El valor de la resistencia interna de la batería en este ejemplo es mayor que el de la mayoría de las baterías. Este valor se eligió así para simplificar los cálculos. En otros ejemplos, se puede asumir que la resistencia interna de las baterías es despreciable.

Ejemplo 25.7 Máxima potencia suministrada

Tenemos una batería de una determinada fem $\mathcal{E}$ y una resistencia interna r. ¿Qué valor de la resistencia externa R debemos conectar entre los bornes para obtener la máxima potencia en la resistencia?

PLANTEAMIENTO El diagrama del circuito es el mismo que el de la figura 25.14. La potencia de entrada a R es I^2R, donde $I = \mathcal{E}/(R + r)$. Para determinar la potencia máxima, se calcula la derivada dP/dR y se iguala a cero.

SOLUCIÓN

1. Utilizar $I = \mathcal{E}/(R + r)$ (ecuación 25.17) para eliminar I de $P = I^2R$, de modo que P se exprese en función de R y las constantes $\mathcal{E}$ y r, solamente: $P = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R + r)^2}$
2. Calcular la derivada dP/dR utilizando la regla del producto: $\frac{dP}{dR} = \frac{(R + r)^2\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{E}^2R(R + r)}{(R + r)^4} = \frac{\mathcal{E}^2(r - R)}{(R + r)^3}$
3. Hacer $dP/dR = 0$ y deducir R en función de r: $\boxed{R = r}$

COMPROBACIÓN Para $R = 0$, la corriente es máxima pero $P = 0$, de tal forma que no se disipa ninguna potencia en la resistencia externa cuando $R = 0$. Para considerar el límite de P cuando $R \rightarrow \infty$, dividimos por R tanto numerador como denominador y obtenemos

$$P = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R(1 + r/R)^2}$$

De este resultado deducimos que para $R \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0$. Esto significa que P deberá ser máximo para R en el rango $0 < R < \infty$, así que $R = r$ es un resultado plausible.

OBSERVACIÓN El valor máximo de P ocurre cuando $R = r$, es decir, cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna. Un resultado semejante tiene lugar en los circuitos de corriente alterna. La elección $R = r$ para maximizar la potencia suministrada a la resistencia de carga se conoce como *igualación de impedancias*. En la figura 25.15, se muestra un gráfico de P en función de R.

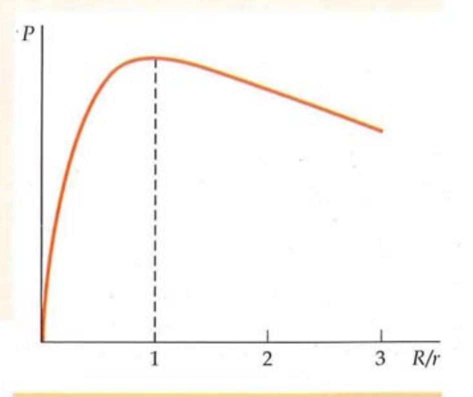


FIGURA 25.15 La potencia suministrada entre los extremos de la resistencia es máxima si $R = r$.

25.4 ASOCIACIONES DE RESISTENCIAS

El análisis de un circuito puede simplificarse reemplazando dos o más resistencias por una sola resistencia equivalente que transporte la misma corriente con la misma caída de potencial que las resistencias originales. La sustitución de una serie de resistencias por una resistencia equivalente es una operación análoga a la sustitución de una serie de condensadores por un condensador equivalente, que fue analizada en el capítulo 24.

RESISTENCIAS EN SERIE

Cuando dos o más resistencias están conectadas como R_1 y R_2 en la figura 25.16*a*, de modo que a través de ellas circula la misma corriente I, se dice que las resistencias están conectadas en serie. La caída de potencial a través de R_1 es IR_1, y a través de R_2 es IR_2. La caída de potencial a través de las dos resistencias es la suma de las caídas de potencial a través de las resistencias individuales:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \qquad 25.19$$

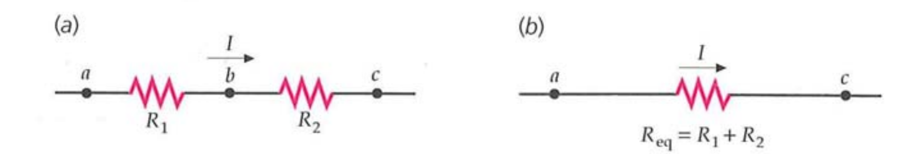


FIGURA 25.16 (*a*) Dos resistencias en serie transportan la misma corriente. (*b*) Las resistencias de la figura (*a*) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$, que proporciona la misma caída de potencial total cuando circula la misma corriente que en (*a*).

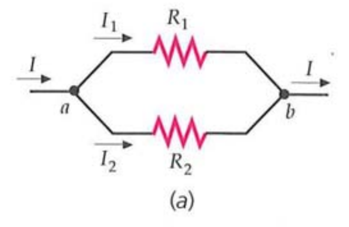
Para determinar la resistencia equivalente R_{eq} que presenta la misma caída de potencial V cuando circula a través de ella la misma corriente I se iguala V a IR_{eq} (figura 25.16*b*). Por lo tanto, R_{eq} viene dada por

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Cuando hay más de dos resistencias en serie, la resistencia equivalente es:

$$R_{eq} + R_1 + R_2 + R_3 + \dots \qquad 25.20$$

RESISTENCIA EQUIVALENTE PARA RESISTENCIAS EN SERIE



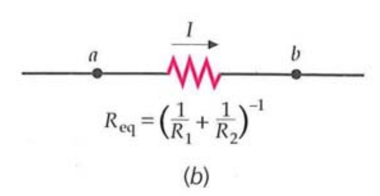


FIGURA 25.17 (*a*) Dos resistencias están combinadas en paralelo cuando se conectan juntas en ambos extremos, de modo que la caída de potencial es la misma a través de cada una de ellas. (*b*) Las dos resistencias del apartado (*a*) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente R_{eq} relacionada con R_1 y R_2 por $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$.

RESISTENCIAS EN PARALELO

Dos resistencias conectadas como indica la figura 25.17*a*, de modo que a través de ellas existe la misma diferencia de potencial, se dice que están conectadas en paralelo. Obsérvese que las resistencias están conectadas en ambos extremos por cables. Sea I la corriente que fluye del punto a al punto b. En el punto a, la corriente se divide en dos partes, I_1 que circula por la rama superior que contiene R_1, e I_2 que circula por la rama inferior donde se encuentra R_2. Las dos derivaciones de corriente suman la intensidad de la corriente que fluye por el punto a:

$$I = I_1 + I_2 \qquad 25.21$$

En el punto b, las diferentes derivaciones de corriente se unen, de tal forma que la corriente que continúa por el hilo a partir de este punto es igual a $I = I_1 + I_2$. La caída de potencial de un extremo a otro de cualquiera de las dos resistencias es $V = V_a - V_b$, la cual se relaciona con la corriente mediante

$$V = I_1R_1 \text{ y } V = I_2R_2 \qquad 25.22$$

La resistencia equivalente de una asociación de resistencias en paralelo se define como aquella resistencia R_{eq} para la cual la misma corriente total I produce la misma caída de potencial V (figura 25.17*b*):

$$V = IR_{eq} \qquad 25.23$$

Despejando I en esta ecuación y considerando la ecuación 25.22 y teniendo en cuenta que $I = I_1 + I_2$, tenemos:

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad 25.24$$

Dividiendo en ambos lados de la igualdad por V, tenemos

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

lo cual permite obtener la resistencia equivalente de las dos resistencias acopladas en paralelo. Este resultado puede generalizarse para combinaciones como las de la figura 25.18, en las cuales se conectan tres o más resistencias en paralelo:

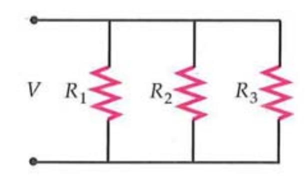


FIGURA 25.18 Tres resistencias en paralelo.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \qquad 25.25$$

RESISTENCIA EQUIVALENTE PARA RESISTENCIAS EN PARALELO

! La resistencia equivalente de una asociación de resistencias en paralelo es menor que la resistencia menor de la asociación.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.7

Una resistencia de 2 Ω y otra de 4 Ω se conectan (*a*) en serie y (*b*) en paralelo. Determinar las resistencias equivalentes para ambos casos.

La resistencia equivalente de una asociación de resistencias en paralelo es menor que cualquiera de las resistencias de la asociación. De la ecuación 25.25, se puede ver que

$$\frac{1}{R_{eq}} > \frac{1}{R_i}$$

donde R_i es una resistencia cualquiera de la asociación. Multiplicando ambos lados de la desigualdad por el producto $R_{eq}\,R_i$, obtenemos

$$R_i > R_{eq}$$

Las resistencias son en realidad conductores que no conducen la corriente tan bien como los hilos utilizados en los circuitos, pero son conductores al fin y al cabo. El añadir más resistencias en paralelo implica añadir más caminos por donde pueden circular las cargas. La existencia de nuevos caminos en paralelo que posibilitan el flujo de cargas tiene como consecuencia la disminución de la resistencia total del sistema.

Ejemplo 25.8 Identificación de asociaciones en serie y en paralelo

Conceptual

El circuito mostrado en la figura 25.19 tiene una batería y seis resistencias. (*a*) ¿Cuáles, si es que hay alguna, están en serie? (*b*) ¿Cuáles en paralelo?

PLANTEAMIENTO En el caso de las resistencias conectadas en serie, la corriente que las atraviesa es la misma en todas ellas puesto que el camino seguido por las cargas es el mismo. En el caso de resistencias conectadas en paralelo la diferencia de potencial (voltaje) entre los extremos de cada una de ellas es idéntico.

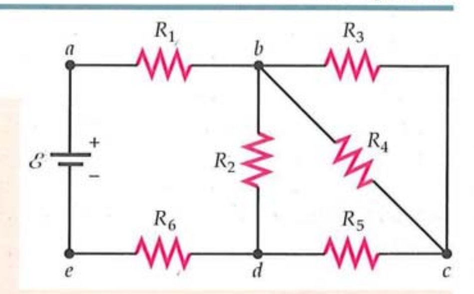


FIGURA 25.19

SOLUCIÓN

(*a*) En un circuito, la corriente sólo cambia en los nudos (puntos *b*, *c* y *d*):

Resistencias 1 y 6 están conectadas en serie.

(*b*) 1. El potencial a lo largo de un camino sólo cambia cuando hay baterías, resistencias o condensadores. Sean V_a, V_b, V_c, V_d, y V_e los potenciales en los puntos *a*, *b*, *c*, *d* y *e*, respectivamente. Construir una tabla en la que figure el potencial de los extremos de cada resistencia:

Resistencia	V_a	V_b	V_c	V_d	V_e
1	X	X			
2		X		X	
3		X	X		
4		X	X		
5			X	X	
6				X	X

2. La tabla revela que un extremo de la resistencia 3 y otro de la 4 están al potencial V_b, y los otros terminales de estas resistencias están a potencial V_c.

Resistencias 3 y 4 están conectadas en paralelo.

OBSERVACIÓN La resistencia 5 está en serie con la asociación en paralelo de la 3 y 4. La resistencia 2 está en paralelo con la asociación formada por la 3, 4 y 5. Además, la resistencia 6, la batería, la resistencia 1 y la asociación de las resistencias 2, 3, 4 y 5 están en serie.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problemas con asociaciones de resistencias en serie y/o en paralelo

PLANTEAMIENTO Dibujar un circuito si el problema no lo aporta.

SOLUCIÓN

1. Identificar asociaciones de resistencias en serie y en paralelo, y calcular su resistencia equivalente.
2. Volver a dibujar el circuito de tal forma que las asociaciones en serie o en paralelo queden reemplazadas por sus respectivas resistencias equivalentes.
3. Repetir los pasos 1 y 2 hasta que no haya más asociaciones de resistencias, ni en serie ni en paralelo, es decir, hasta que sólo quede una resistencia en el circuito. Aplicar entonces la ley de Ohm, $V = IR$ y calcular la corriente.
4. Volver al dibujo anterior y calcular el voltaje (diferencia de potencial) y la corriente que atraviesa cada resistencia.
5. Repetir el paso 4 hasta calcular todas las corrientes y voltajes de interés.

COMPROBACIÓN Calcular la potencia disipada en cada resistencia (usando $P = VI$ o su equivalente) y calcular la potencia suministrada por las reacciones químicas de cada batería utilizando la expresión $P = I\mathcal{E}$. Posteriormente, comprobar que la potencia suministrada es igual a la disipada.

Ejemplo 25.9 Resistencias en paralelo

Una batería que genera una diferencia de potencial de 12 V se conecta a una asociación de resistencias de 4 Ω y 6 Ω, respectivamente, dispuestas en paralelo como muestra la figura 25.20. Determinar (*a*) la resistencia equivalente, (*b*) la intensidad total de la corriente, (*c*) la corriente que circula por cada resistencia, (*d*) la potencia disipada en cada resistencia y (*e*) la potencia suministrada por la batería.

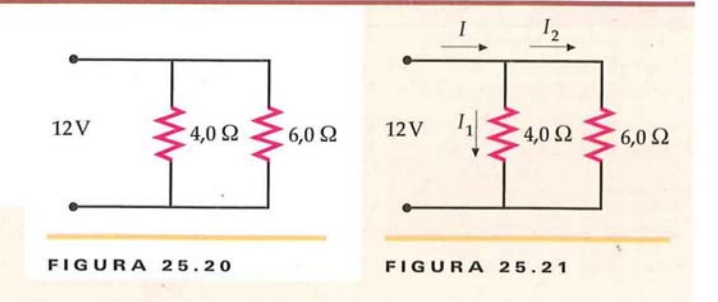


FIGURA 25.20

FIGURA 25.21

PLANTEAMIENTO Elegir símbolos y direcciones para las corrientes en el circuito de la figura 25.21.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular la resistencia equivalente:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4{,}0\ \Omega} + \frac{1}{6{,}0\ \Omega} = \frac{3{,}0}{12{,}0\ \Omega} + \frac{2{,}0}{12{,}0\ \Omega} = \frac{5{,}0}{12{,}0\ \Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{12{,}0\ \Omega}{5{,}0} = \boxed{2{,}4\ \Omega}$$

(*b*) La intensidad total es igual al cociente entre la caída de potencial y la resistencia equivalente:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12\ V}{2{,}4\ \Omega} = \boxed{5{,}0\ \text{A}}$$

(*c*) La intensidad que circula por cada resistencia se obtiene mediante la ecuación 25.22 y considerando que la caída de potencial es 12 V a través de la asociación en paralelo:

$$V = IR$$

$$I_1 = \frac{12\ V}{4{,}0\ \Omega} = \boxed{3{,}0\ \text{A}}$$

$$I_2 = \frac{12\ V}{6{,}0\ \Omega} = \boxed{2{,}0\ \text{A}}$$

(*d*) Utilizar estas corrientes para determinar la potencia disipada en cada resistencia:

$$P = VI = (IR)R = I^2R$$

$$P_1 = I_1^2R = (3{,}0\ \text{A})^2(4{,}0\ \Omega) = \boxed{36\ \text{W}}$$

$$P_2 = I_2^2R = (2{,}0\ \text{A})^2(6{,}0\ \Omega) = \boxed{24\ \text{W}}$$

(*e*) Utilizar $P = VI$ para calcular la potencia suministrada por la batería:

$$P = \mathcal{E}I = (12\ \text{V})(5{,}0\ \text{A}) = \boxed{60\ \text{W}}$$

COMPROBACIÓN La potencia suministrada por la batería es igual a la potencia total disipada en las dos resistencias, $P = 60\ \text{W} = 36\ \text{W} + 24\ \text{W}$. En el apartado (*d*), podíamos haber calculado la potencia disipada en cada resistencia a partir de $P_1 = VI_1 = (12\ \text{V})(3\ \text{A}) = 36\ \text{W}$ y $P_2 = VI_2 = (12\ \text{V})(2\ \text{A}) = 24\ \text{W}$.

OBSERVACIÓN La relación de las corrientes en las dos resistencias en paralelo es la relación inversa de los valores de sus resistencias. De este resultado se sigue que $I_1R_1 = I_2R_2$ (ecuación 25.22), de lo cual podemos deducir que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ (dos resistencias en paralelo)} \qquad 25.26$$

Ejemplo 25.10 Resistencias en serie — *Inténtelo usted mismo*

Una resistencia de 4 Ω y otra de 6 Ω se conectan en serie con una batería de fem 12 V cuya resistencia interna es despreciable. Determinar (*a*) la resistencia equivalente, (*b*) la intensidad que circula por el circuito, (*c*) la caída de potencial a través de cada resistencia, (*d*) la potencia disipada en cada resistencia y (*e*) la potencia total disipada.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

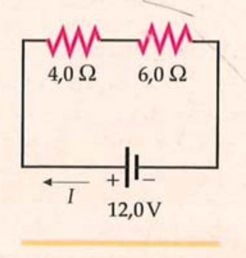
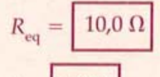


FIGURA 25.22

Pasos / **Respuestas**

(*a*) 1. Dibujar un diagrama del circuito (figura 25.22).

2. Calcular R_{eq} para las dos resistencias en serie.

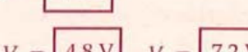


$R_{eq} = \boxed{10{,}0\ \Omega}$

(*b*) Utilizar $V = IR_{eq}$ para determinar la corriente que atraviesa la batería.

$I = \boxed{1{,}2\ \text{A}}$

(*c*) Utilizar la ley de Ohm para calcular la caída de potencial a través de cada resistencia.



$V_4 = \boxed{4{,}8\ \text{V}}$ $\quad V_6 = \boxed{7{,}2\ \text{V}}$

(*d*) Determinar la potencia disipada en cada resistencia mediante $P = I^2R$.

$P_4 = \boxed{5{,}8\ \text{W}}$ $\quad P_6 = \boxed{8{,}6\ \text{W}}$

(*e*) Sumar los resultados de (*d*) para determinar la potencia total.

$P = \boxed{14{,}4\ \text{W}}$

COMPROBACIÓN En este ejemplo, la corriente a través de la batería es de 1,2 A, pero en el correspondiente circuito paralelo con la misma resistencia, la corriente en la batería es de 5,0 A. La corriente en un circuito es menor cuando las resistencias se conectan en serie.

Ejemplo 25.11 Asociaciones de resistencias en serie y en paralelo

Inténtelo usted mismo

Considérese el circuito de la figura 25.23. Para el caso en que el interruptor S_1 está abierto y el interruptor S_2 está cerrado, determinar (*a*) la resistencia equivalente del circuito, (*b*) la intensidad total en la fuente de fem, (*c*) la caída de potencial a través de cada resistencia y (*d*) la intensidad que circula por cada resistencia. A continuación, se cierra el interruptor S_1. Ahora (*e*) determinar la intensidad de la corriente que circula en la resistencia de 2 Ω. (*f*) Si luego se abre el interruptor S_2 (mantener el S_1 cerrado), ¿cuáles son las caídas de potencial en la resistencia de 6 Ω y el interruptor S_2?

FIGURA 25.23

PLANTEAMIENTO (*a*) Para determinar la resistencia equivalente del circuito, reemplazar en primer lugar las dos resistencias en paralelo por su resistencia equivalente. La ley de Ohm puede entonces utilizarse para determinar la intensidad y las caídas de potencial. Para las partes (*b*) y (*c*), utilizar la ley de Ohm.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Determinar la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de las resistencias de 6 Ω y 12 Ω.	$R_{eq} = 4{,}0\ \Omega$
2. Combinar el resultado del paso 1 con la resistencia en serie de 2 Ω para determinar la resistencia equivalente total del circuito.	$R'_{eq} = \boxed{6{,}0\ \Omega}$
(*b*) Calcular la corriente total mediante la ley de Ohm. Esta es la corriente de la resistencia de 2 Ω.	$I_{2\Omega} = \boxed{3{,}0\ \text{A}}$
(*c*) 1. Determinar la caída de potencial a través de la resistencia de 2 Ω a partir de $V_{2\Omega} = IR$.	$V_{2\Omega} = \boxed{6{,}0\ \text{V}}$
2. Calcular la caída de potencial a través de la asociación en paralelo utilizando $V_p = IR_{eq}$, donde V_p es la caída de potencial a través de la asociación en paralelo.	$V_{6\Omega} = V_{12\Omega} = \boxed{12{,}0\ \text{V}}$
(*d*) Determinar la corriente en las resistencias de 6 Ω y 12 Ω a partir de $I = V_p / R$.	$I_{6\Omega} = \boxed{2{,}0\ \text{A}}$ $I_{12\Omega} = \boxed{1{,}0\ \text{A}}$
(*e*) Cuando S_1 se cierra, la caída de potencial en la resistencia de 2 Ω es cero. Mediante la ley de Ohm, calcular la corriente que pasa por esta resistencia.	$I_{2\Omega} = \boxed{0}$
(*f*) Cuando se abre S_2, la corriente a través de la resistencia de 6 Ω es cero. Utilizando la ley de Ohm, calcular la caída de potencial entre los extremos de esta resistencia. La suma de las caídas de potencial entre los extremos de la resistencia de 6 Ω y entre los extremos del interruptor S_2 es igual a la caída de potencial en la resistencia de 12 Ω.	$V_{6\Omega} = \boxed{0}$ $V_{S_2} = V_{12\Omega} = \boxed{18\ \text{V}}$

COMPROBACIÓN Obsérvese que la corriente en la resistencia de 6 Ω es el doble que en la resistencia de 12 Ω, como era de esperar. Además, estas dos corrientes se suman para obtener I, la corriente total del circuito. Obsérvese, finalmente, que las caídas de potencial a través de la resistencia de 2 Ω y de la asociación en paralelo, sumadas, equivalen a la fem de la batería; $V_{2\Omega} + V_p = 6\ \text{V} + 12\ \text{V} = 18\ \text{V}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.8 Repetir los apartados (*a*)–(*d*) de este ejemplo con la resistencia de 6 Ω reemplazada por una alambre de resistencia despreciable.

Ejemplo 25.12 Asociaciones múltiples

Inténtelo usted mismo

Determinar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* para la asociación de resistencias indicada en la figura 25.24.

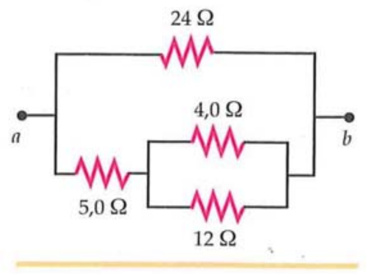


FIGURA 25.24

PLANTEAMIENTO Esta complicada asociación puede analizarse paso a paso. En primer lugar, se determina la resistencia equivalente R_{eq} de la asociación en paralelo de las resistencias de 4 Ω y 12 Ω. Después, se combina el resultado con la resistencia de 5 Ω que está en serie con la asociación en paralelo para determinar R'_{eq}. Finalmente, se determina la resistencia equivalente R''_{eq} resultante de la asociación en paralelo de la resistencia de 24 Ω y R'_{eq}.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Determinar la resistencia equivalente R_{eq} de las resistencias en paralelo de 4 Ω y 12 Ω.	$R_{eq} = 3{,}0\ \Omega$
2. Determinar la resistencia equivalente R'_{eq} de R_{eq} en serie con la resistencia de 5 Ω.	$R'_{eq} = 8{,}0\ \Omega$
3. Determinar la resistencia equivalente de R'_{eq} en paralelo con la resistencia de 24 Ω.	$R''_{eq} = \boxed{6{,}0\ \Omega}$

COMPROBACIÓN Como era de esperar para combinaciones en paralelo, los resultados de los pasos 1 y 3 son menores que la resistencia de cualquiera de los resistencias que están en paralelo. Además, como es lógico, el resultado del paso 2 es mayor que cualquiera de las resistencias conectadas en serie.

Ejemplo 25.13 Fundiendo el fusible *Póngalo en su contexto*

Supongamos que estamos preparando un refrigerio con algunos compañeros que nos permita pasar en buena forma una intensa noche de estudio. Para ello, decidimos preparar café, tostadas y palomitas. Ponemos en marcha el tostador y el microondas en el que nos disponemos a hacer las palomitas. Como el apartamento donde estamos pertenece a un edificio antiguo, son habituales los problemas con los fusibles cuando tenemos varios aparatos eléctricos en marcha al mismo tiempo. Nos preguntamos si podríamos hacer el café ya. Miramos en las especificaciones de cada uno de los aparatos que tenemos en marcha y vemos que el tostador consume unos 900 W, el microondas 1200 W y la cafetera 600 W. Nuestra experiencia previa nos dice que los fusibles soportan como máximo 20 A.

PLANTEAMIENTO Podemos asumir que los circuitos domésticos están cableados (conectados) en paralelo para que la conexión a la red de un aparato no afecte a otros que estén en el circuito. El voltaje doméstico en Estados Unidos es de 120 V. (Para este análisis podemos obviar el hecho de que la red no es de corriente continua.) Sumando las corrientes necesarias para que funcionen cada uno de los aparatos, podemos comparar el resultado con la corriente total que es capaz de soportar el fusible sin fundirse.

SOLUCIÓN

1. La potencia suministrada a un aparato es igual a la intensidad de corriente multiplicada por la caída de potencial entre sus bornes. Esto es, $P = IV$. Despejando la corriente de cada aparato:

$$I_{tostador} = \frac{P_{tostador}}{V} = \frac{900\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 7{,}5\ \text{A}$$

$$I_{microondas} = \frac{P_{microondas}}{V} = \frac{1200\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 10{,}0\ \text{A}$$

$$I_{cafetera} = \frac{P_{cafetera}}{V} = \frac{600\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 5{,}0\ \text{A}$$

2. La corriente que atraviesa el fusible es la suma de todas las que hemos calculado en el paso 1:

$$I_{fusibles} = 22{,}5\ \text{A}$$

3. La suma de las corrientes de los diferentes aparatos supera lo que puede soportar el fusible (20 A):

Por tanto, deberemos esperar antes de hacer el café.

COMPROBACIÓN La máxima potencia posible que se disipa en el circuito de 120 V por el que circula una corriente de 20 A es $P_{máx} = I_{máx}V = (20\ \text{A})(120\ \text{V}) = 2400\ \text{W}$. La potencia total que se necesita para poner en funcionamiento los tres aparatos simultáneamente es 900 W + 1200 W + 600 W = 2700 W, lo cual excede en 300 W la potencia máxima que el circuito puede disipar.

OBSERVACIÓN Asumimos que el apartamento dispone de un único circuito y, por lo tanto, de un único fusible. Generalmente, hay varios fusibles, uno para cada uno de los circuitos de las instalaciones eléctricas. Para que el fusible no se funda, la cafetera se puede enchufar en una toma eléctrica diferente de la que hemos enchufado el tostador y el microondas.

25.5 REGLAS DE KIRCHHOFF

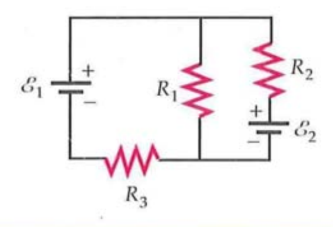


FIGURA 25.25 Circuito simple en el que no pueden sustituirse las resistencias en serie o en paralelo por su resistencia equivalente. Las diferencias de potencial a lo largo de las resistencias R_1 y R_2 no son iguales debido a la existencia de la fuente de fem $\mathcal{E}_2$; por lo tanto, no están en paralelo. (Las resistencias en paralelo deben conectarse entre sí por sus extremos.) Las resistencias no soportan la misma corriente y, por lo tanto, tampoco están en serie.

Existen muchos circuitos simples, tales como el indicado en la figura 25.21, que no se pueden analizar simplemente reemplazando asociaciones de resistencias por una resistencia equivalente. Por ejemplo, las dos resistencias, R_1 y R_2, de este circuito parecen estar en paralelo, pero no es así. La caída de potencial no es la misma a través de ambas resistencias, debido a la presencia de la fuente de fem $\mathcal{E}_2$ en serie con R_2. Además, R_1 y R_2 no transportan la misma corriente, pues no están en serie.

Existen dos reglas, llamadas **reglas de Kirchhoff**, que se pueden aplicar a éste y a cualquier otro circuito:

1. La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser igual a cero.
2. En un punto o nudo de ramificación de un circuito en donde puede dividirse la corriente, la suma de las corrientes que entran en el nudo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

REGLAS DE KIRCHHOFF

La primera regla de Kirchhoff, llamada **regla de las mallas,** se introdujo en el capítulo 24. Esta regla se deriva directamente de que el campo $\vec{E}$* es conservativo, lo cual significa que

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad 25.27$$

donde la integral se toma alrededor de cualquier curva cerrada C. Las variaciones en el potencial ΔV y en $\vec{E}$ están relacionadas por $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$. De esta forma, la ecuación 25.27 implica que la suma de las variaciones del potencial (la suma de todos los ΔV) alrededor de un circuito cerrado se anula.

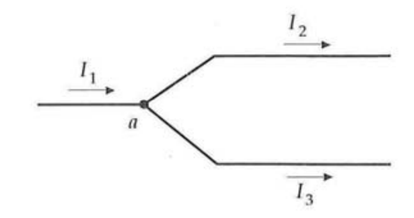


FIGURA 25.26 Ilustración de la regla de los nudos de Kirchhoff. La corriente I_1 en el punto a es igual a la suma $I_2 + I_3$ de las corrientes que salen del punto a.

La segunda regla de Kirchhoff, llamada **regla de los nudos**, se deduce de la conservación de la carga. La figura 25.26 muestra la unión o nudo de tres conductores por los que circulan las corrientes I_1, I_2 e I_3. Puesto que no se crean ni se destruyen cargas en este punto, la conservación de la carga implica la regla de los nudos, que en este caso nos da

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad 25.28$$

Las cargas se acumulan en las superficies de los conductores. Sin embargo, se requeriría una superficie muy grande, como las superficies de las placas de algunos condensadores, para acumular una cantidad de carga tan significativa. Las superficies de los conductores, es decir, de los hilos de un circuito, son demasiado pequeñas para acumular semejante cantidad de carga.

CIRCUITOS DE UNA SOLA MALLA

Como ejemplo de aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff consideremos el circuito de la figura 25.27, formado por dos baterías, con resistencias internas r_1 y r_2, y tres resistencias externas. Deseamos determinar la corriente en función de las fem y resistencias.

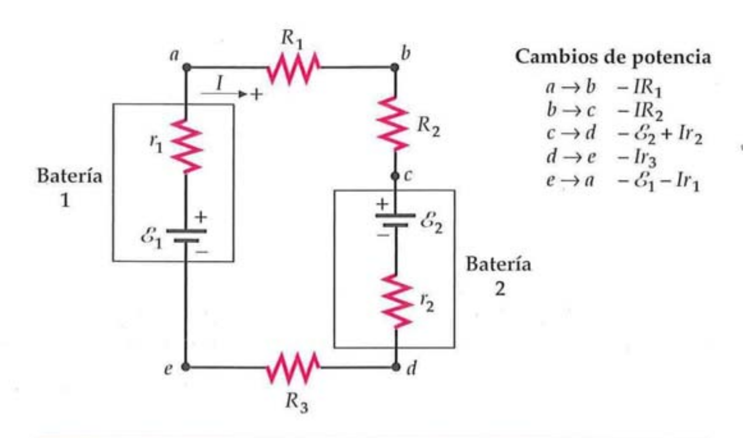


FIGURA 25.27 Circuito formado por dos baterías y tres resistencias externas.

* En el capítulo 28, se analiza un campo eléctrico que no es conservativo. En ese caso, el campo eléctrico resultante es debido a la superposición de dos campos eléctricos, uno conservativo y otro que no lo es. La regla de Kirchhoff de las mallas se aplica sólo al campo eléctrico conservativo.

Elegimos el sentido de las agujas del reloj como positivo, según está indicado en la figura 25.27, y aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas recorriendo el circuito en el sentido positivo, comenzando en el punto *a*. Obsérvese que hay una caída de potencial al atravesar la fuente de fem entre *c* y *d* y un incremento de potencial al atravesar la fuente de potencial entre *e* y *a*. Suponiendo que *I* es positiva, se produce una caída de potencial al atravesar cada una de las resistencias. Comenzando en el punto *a*, la regla de las mallas de Kirchhoff nos da:

$$(V_b - V_a) + (V_c - V_b) + (V_d - V_c) + (V_e - V_d) + (V_a - V_e) = 0$$

expresando las diferencias de potencial en términos de fuerzas electromotrices, intensidades y resistencias, tenemos que

$$(-IR_1) + (-IR_2) + (-\mathcal{E}_2 - Ir_2) + (-IR_3) + (\mathcal{E}_1 - Ir_1) = 0$$

Despejando el valor de la intensidad, se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} \qquad 25.29$$

Si $\mathcal{E}_2$ es mayor que $\mathcal{E}_1$, se obtiene un número negativo para la corriente *I*, indicando que ésta circula en sentido negativo (opuesto al movimiento de las agujas del reloj).

En este ejemplo, se supone que $\mathcal{E}_1$ es mayor que $\mathcal{E}_2$, de tal forma que la corriente es positiva. Además, se acostumbra definir la corriente positiva cuando las cargas positivas se mueven en la malla en sentido horario. (Los portadores de carga reales tienen carga negativa, pues son electrones, y se mueven en sentido antihorario.) En la batería 2, la carga fluye del potencial más alto al más bajo. Por lo tanto, una carga ΔQ que sale de la batería 2 desde el punto *c* hasta el punto *d* pierde una energía $\Delta Q\mathcal{E}_2$ (más la energía disipada en la batería por el efecto Joule debido a que tiene una resistencia interna). Si esta batería es recargable, la energía eléctrica se convierte en energía química y se almacena en ella, lo que significa que la batería 2 está cargándose.

Normalmente, el análisis del circuito se simplifica si elegimos un punto como potencial cero y referimos a éste los potenciales de los restantes puntos. Como sólo son importantes las diferencias de potencial, cualquier punto del circuito puede escogerse como potencial cero. En muchos circuitos, un punto se conecta a una barra metálica que se inserta en tierra. A este punto, conocido como toma de tierra, se le asigna un valor de potencial igual a cero. En un automóvil, la terminal negativa de su batería se conecta al chasis por medio de un cable pesado, denominado cable de tierra, y el punto donde se conecta al chasis es la toma de tierra de los circuitos de la batería del coche. En el siguiente ejemplo, se ha escogido el punto *e* como potencial cero. Esto viene indicado en el circuito por el símbolo ⏚ en el punto *e*.

Ejemplo 25.14 Determinación del potencial

Supongamos que los elementos del circuito de la figura 25.28 tienen los valores $\mathcal{E}_1 = 12$ V, $\mathcal{E}_1 = 4$ V, $r_1 = r_2 = 1\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$, y $R_3 = 4\ \Omega$. (*a*) Calcular los potenciales en los puntos *a*, *b*, *c*, *d* y *e* indicados en la figura considerando que el potencial en el punto *e* es cero. (*b*) Determinar la potencia de entrada y de salida del circuito.

PLANTEAMIENTO Para determinar las diferencias de potencial, necesitamos determinar en primer lugar la corriente *I* que circula por el circuito. La caída de voltaje a través de cada resistencia es igual a *IR*. Para analizar el balance energético, calcularemos la potencia de entrada y de salida en cada elemento utilizando las ecuaciones 25.14 y 25.15.

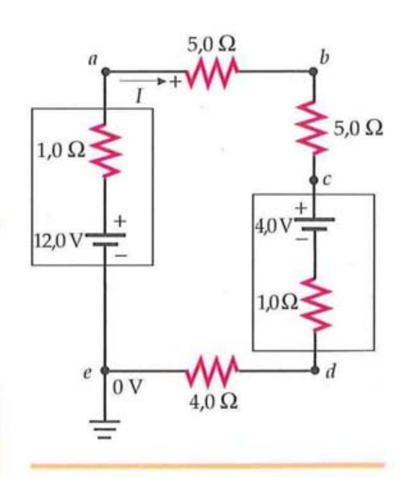


FIGURA 25.28

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La corriente I del circuito se obtiene a partir de la ecuación 25.29:

$$I = \frac{12{,}0\ \text{V} - 4{,}0\ \text{V}}{5{,}0\ \Omega + 5{,}0\ \Omega + 4{,}0\ \Omega + 1{,}0\ \Omega + 1{,}0\ \Omega} = \frac{8{,}0\ \text{V}}{16\ \Omega} = 0{,}50\ \text{A}$$

2. A continuación, calculamos el potencial en cada uno de los puntos especificados en el circuito:

$$V_a = V_e + \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 0 + 12{,}0\ \text{V} - (0{,}50\ \text{A})(1{,}0\ \Omega) = \boxed{11{,}5\ \text{V}}$$

$$V_b = V_a - IR_1 = 11{,}5\ \text{V} - (0{,}50\ \text{A})(5{,}0\ \Omega) = \boxed{9{,}0\ \text{V}}$$

$$V_c = V_b - IR_2 = 9{,}0\ \text{V} - (0{,}50\ \text{A})(5{,}0\ \Omega) = \boxed{6{,}5\ \text{V}}$$

$$V_d = V_c - \mathcal{E}_2 - Ir_2 = 6{,}5\ \text{V} - 4{,}0\ \text{V} - (0{,}50\ \text{A})(1{,}0\ \Omega) = \boxed{2{,}0\ \text{V}}$$

$$V_e = V_d + IR_3 = 2{,}0\ \text{V} - (0{,}50\ \text{A})(4{,}0\ \Omega) = \boxed{0{,}0\ \text{V}}$$

(*b*) 1. En primer lugar, se calcula la potencia suministrada por la fuente de fem $\mathcal{E}_1$:

$$P_{\mathcal{E}_1} = \mathcal{E}_1 I = (12{,}0\ \text{V})(0{,}50\ \text{A}) = 6{,}0\ \text{W}$$

2. Una parte de esta potencia se disipa en las resistencias, tanto internas como externas:

$$P_R = I^2R_1 + I^2R_2 + I^2R_3 + I^2r_1 + I^2r_2$$
$$= (0{,}50\ \text{A})^2(5{,}0\ \Omega + 5{,}0\ \Omega + 4{,}0\ \Omega + 1{,}0\ \Omega + 1{,}0\ \Omega) = 4{,}0\ \text{W}$$

3. Los restantes 2 W de potencia se destinan a cargar la batería 2:

$$P_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E}_2 I = (4{,}0\ \text{V})(0{,}50\ \text{A}) = 2{,}0\ \text{W}$$

4. La energía potencial por unidad de tiempo consumida por el circuito es:

$$P = P_R + P_{\mathcal{E}_1} = 6{,}0\ \text{W}$$

COMPROBACIÓN El ritmo con el que la batería de 12 volts convierte la energía química en energía potencial eléctrica (6,0 W) es igual al ritmo con el que la batería de 4 volts convierte la energía potencial eléctrica en energía química (2,0 W) más el que corresponde a la disipación de energía potencial (4,0 W).

Obsérvese que el voltaje en los bornes de la batería del ejemplo 25.14 que se está cargando es igual a $V_c - V_d = 4{,}5$ V, es decir, un valor superior al de la fem de la batería. Si la misma batería de 4 V tuviese que suministrar 0,5 A a un circuito externo, su voltaje en bornes sería de 3,5 V (suponiendo de nuevo que el valor de su resistencia interna es de 1 Ω). Si la resistencia interna es muy pequeña, el voltaje en bornes de la batería es, aproximadamente, igual a su fem, tanto si cede corriente a un circuito externo como si se está cargando. Algunas baterías reales, como los acumuladores utilizados en los coches, son prácticamente reversibles y se pueden recargar fácilmente; otros tipos de baterías no lo son. Si se intenta recargar una de estas últimas mediante el sistema de hacer pasar corriente a través de ella desde su polo positivo al negativo, en la mayor parte de los casos, si no en todos, la energía suministrada se disipa en forma de calor y no en energía química de batería.

Ejemplo 25.15 Poniendo en marcha un coche

Una batería de automóvil totalmente cargada* se conecta mediante cables a otra batería descargada para proceder a su carga. (*a*) ¿A qué borne de la batería descargada debemos conectar el borne positivo de la batería cargada? (*b*) Suponer que la cargada tiene una fem $\mathcal{E}_1 = 12$ V mientras que la descargada tiene una fem $\mathcal{E}_2 = 11$ V, que las resistencias internas de las baterías son $r_1 = r_2 = 0{,}02\ \Omega$ y que la resistencia de los cables es $R = 0{,}01\ \Omega$. ¿Cuál será la corriente de carga? (*c*) ¿Y si las baterías se conectan incorrectamente? ¿Cuál sería la corriente?

PLANTEAMIENTO Para resolver la parte (*a*) del problema, las baterías deberán conectarse con objeto de que la que está inicialmente descargada se cargue. Para calcular la corriente, se aplica la regla de las mallas de Kirchhoff.

* Las baterías no almacenan carga. Una batería *totalmente cargada* es aquella que contiene la máxima cantidad de energía química almacenada.

SOLUCIÓN

(*a*) Para cargar la batería descargada, se conectan entre sí los bornes positivos de ambas baterías, así como los bornes negativos, a fin de que pueda transportarse carga a través de la batería descargada desde el borne positivo al borne negativo. La figura 25.29 muestra el diagrama de circuito de este proceso:

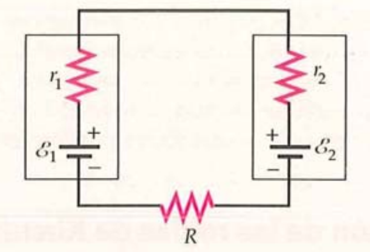


FIGURA 25.29

(*b*) Mediante la regla de las mallas de Kirchhoff se determina la corriente de carga:

$$\mathcal{E}_1 - Ir_1 - Ir_2 - \mathcal{E}_2 - IR = 0$$

por lo tanto,

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12{,}0\text{ V} - 11{,}0\text{ V}}{0{,}050\ \Omega} = \boxed{20\text{ A}}$$

(*c*) Si las baterías se conectan incorrectamente, terminales positivos con negativos, las fem se suman:

$$\mathcal{E}_1 - Ir_1 + \mathcal{E}_2 - Ir_2 - IR = 0$$

por lo tanto,

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12{,}0\text{ V} + 11{,}0\text{ V}}{0{,}050\ \Omega} = \boxed{460\text{ A}}$$

COMPROBACIÓN Si las baterías se conectan incorrectamente, como indica la figura 25.30, la resistencia total del circuito es del orden de centésimas de un ohm, la corriente es muy grande y ambas baterías pueden explotar, produciendo un vertido de ácido hirviendo.

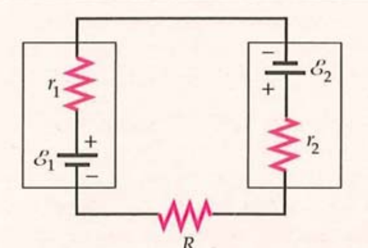


FIGURA 25.30 Dos baterías conectadas incorrectamente. Se trata de una situación peligrosa.

CIRCUITO DE MÚLTIPLES MALLAS

En circuitos con múltiples mallas, inicialmente no se suele conocer el sentido de la corriente de cada rama. Afortunadamente, para aplicar la reglas de Kirchhoff no necesitamos conocer de entrada dichos sentidos. De hecho, estas reglas nos permiten determinar, entre otras cosas, estos sentidos. Para resolver el problema, debemos asignar arbitrariamente un determinado sentido en cada rama que definiremos como positivo y cuya representación vendrá dada por una flecha que indica el flujo de la corriente (véase la figura 25.31). Si cuando calculamos mediante las reglas de Kirchhoff cada una de las intensidades, la correspondiente a una rama determinada es negativa, esto implicará que el sentido es el contrario del inicialmente asignado, y si es positiva, el sentido asignado será el correcto. La corriente siempre circula por una resistencia de mayor a menor potencial. Por consiguiente, siempre que se atraviesa una resistencia en el sentido de la corriente, el cambio del potencial es negativo y viceversa. Se puede aplicar la siguiente regla:

FIGURA 25.31 En principio, no tiene por qué saberse si la intensidad de corriente es positiva o negativa. Tanto si es positiva como negativa, $V_b - V_a = -IR$. Si la corriente I va en la dirección ascendente del dibujo, I es positiva y $-IR$ es una cantidad negativa. Si, por el contrario, la corriente va hacia abajo, I es negativa y $-IR$ es positiva.

> Para cada rama del circuito, dibujamos una flecha indicando el sentido positivo de la corriente. La diferencia de potencial ΔV entre los extremos final e inicial de una determinada resistencia, definidos estos extremos por el sentido de la corriente, es igual a $-IR$. El ΔV entre los extremos inicial y final es IR.
>
> REGLA DEL SIGNO PARA LA DIFERENCIA DE POTENCIAL A TRAVÉS DE UNA RESISTENCIA

Si atravesamos una resistencia en sentido positivo, e I es positiva, entonces $-IR$ es negativo. Esto es así porque la corriente va siempre en el sentido de potencial decreciente. Si atravesamos la resistencia en sentido positivo, e I es negativa, enton-

ces $-IR$ es una cantidad positiva. De forma similar, si atravesamos la resistencia en sentido negativo, e I es positiva, IR es positivo, y si lo hacemos en sentido negativo, e I es negativa, el resultado es que IR es una cantidad negativa.

Para analizar circuitos que contienen más de una rama, necesitamos utilizar ambas leyes de Kirchhoff. La regla de los nudos de Kirchhoff se aplica en los puntos del circuito en los que la corriente se distribuye por diferentes conductores.

Ejemplo 25.16 Aplicación de las reglas de Kirchhoff

(*a*) Determinar la corriente en cada parte del circuito mostrado en la figura 25.32. (*b*) Calcular la energía disipada en 3 s en la resistencia de 4 Ω.

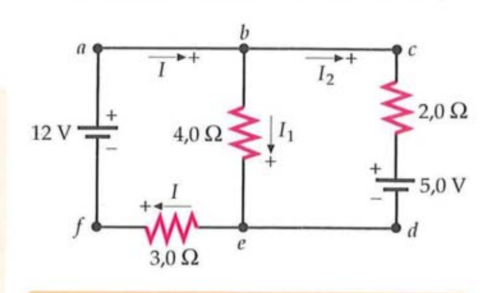


FIGURA 25.32

PLANTEAMIENTO Como existen tres intensidades de corriente a determinar, I, I_1 e I_2, necesitaremos tres ecuaciones. Una ecuación procede de aplicar la regla de los nudos al punto *b*. (Igualmente podía aplicarse al punto *e*, pero obtendríamos la misma información.) Las otras dos ecuaciones se obtienen mediante la regla de las mallas. Existen tres mallas en el circuito: las dos interiores *abefa* y *bcdeb* y la exterior *abcdefa*. Podemos utilizar dos cualesquiera de ellas —la tercera nos daría una información redundante. Existe un sentido fijado por la flecha en cada rama del circuito de la figura 25.32. El sentido que indica la flecha en cada rama es por definición la positiva. Si nuestro cálculo determina que la corriente en una rama tiene valor negativo, esto implicará que la corriente va en esta rama en sentido opuesto al de la flecha.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Aplicar la regla de los nudos al punto *b*:

$$I = I_1 + I_2$$

2. Aplicar la regla de las mallas al circuito exterior *abcdefa*:

$$-(2{,}0\ \Omega)I_2 - 5{,}0\ \text{V} - (3{,}0\ \Omega)(I_1 + I_2) + 12\ \text{V} = 0$$

3. Dividir la ecuación anterior por 1 Ω, recordando que (1 V)/(1 Ω) = 1 A, y simplificar:

$$7{,}0\ \text{A} - 3{,}0I_1 - 5{,}0I_2 = 0$$

4. Para la tercera condición, aplicar la regla de las mallas a la malla derecha *bcdeb*:

$$-(2{,}0\ \Omega)I_2 - 5{,}0\ \text{V} + (4{,}0\ \Omega)I_1 \text{ por tanto, } -5{,}0\ \text{V} + 4{,}0I_1 - 2{,}0I_2 = 0$$

5. Los resultados de los pasos 3 y 4 pueden combinarse para determinar I_1 e I_2. Para hacer esto, multiplicar el resultado del paso 3 por 2, y el resultado del paso 4 por −5:

$$14\ \text{A} - 6{,}0I_1 - 10I_2 = 0$$
$$25\ \text{A} - 20I_1 + 10I_2 = 0$$

6. Restando miembro a miembro las ecuaciones del paso 5, se elimina I_2 y se puede despejar I_1:

$$39\ \text{A} - 26I_1 = 0$$
$$I_1 = \frac{39\ \text{A}}{26} = \boxed{1{,}5\ \text{A}}$$

7. Sustituir I_1 en los resultados de los pasos 3 o 4 para obtener el valor de I_2:

$$7{,}0\ \text{A} - 3{,}0(1{,}5\ \text{A}) - 5{,}0I_2 = 0$$
$$I_2 = \frac{2{,}5\ \text{A}}{5{,}0} = \boxed{0{,}50\ \text{A}}$$

8. Finalmente, conocidas I_1 e I_2 se calcula I mediante la ecuación del paso 1:

$$I = I_1 + I_2 = 1{,}5\ \text{A} + 0{,}50\ \text{A} = \boxed{2{,}0\ \text{A}}$$

(*b*) 1. La potencia disipada en la resistencia de 4 Ω se determina mediante $P = I_1^2R$:

$$P = I_1^2R = (1{,}5\ \text{A})^2(4{,}0\ \Omega) = 9{,}0\ \text{W}$$

2. La energía total disipada en un tiempo Δt es $W = P\Delta t$. En este caso, $\Delta t = 3$ s:

$$W = P\,\Delta t = (9{,}0\ \text{W})(3{,}0\ \text{s}) = \boxed{27\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN En la figura 25.33, hemos elegido el potencial nulo en el punto *f* y hemos especificado las corrientes y los potenciales en los restantes puntos. Obsérvese que $V_b - V_e = 6$ V, y $V_e - V_f = 6$ V. Aplicando la regla de las mallas a la de la izquierda, obtenemos +12 V − 6,0 V − 6,0 V = 0.

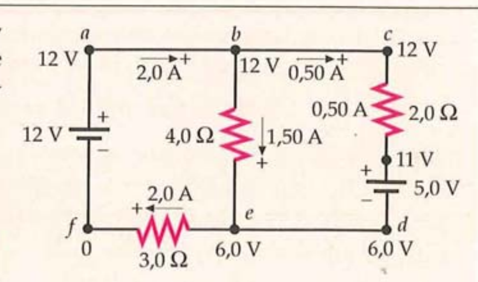


FIGURA 25.33

OBSERVACIÓN Aplicando la regla de las mallas a la malla de la izquierda, *abefa*, se obtiene $12\ \text{V} - (4\ \Omega)I_1 - (3\ \Omega)(I_1 + I_2) = 0$, es decir, $12\ \text{A} - 7I_1 - 3\ I_2 = 0$. Obsérvese que éste es justamente el resultado del paso 3 menos el resultado del paso 4 y, por lo tanto, no contiene nueva información, como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.9 Determinar I_1 para el caso en que la resistencia de 3 Ω tiende a ser (*a*) una resistencia nula y (*b*) una resistencia infinita.

El ejemplo 25.16 ilustra el método general para el análisis de circuitos con múltiples mallas. A continuación, resumimos las diversas etapas del método para resolver este tipo de problemas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Método para analizar los circuitos multimalla

PLANTEAMIENTO Dibujar un esquema del circuito.

SOLUCIÓN

1. Reemplazar cualquier asociación de resistencias o capacidades en serie o paralelo por su resistencia equivalente.
2. Repetir el proceso del paso 1 tantas veces como sea necesario.
3. Elegir un sentido para la corriente en cada rama del circuito e indicar el sentido positivo con una flecha. Especificar las corrientes de cada rama. Añadir los signos más y menos para indicar los extremos de los terminales de potencial mayor y menor de cada fuente de fem.
4. Aplicar la regla de los nudos a cada una de las uniones en donde la corriente se divide.
5. Aplicar la regla de las mallas a cada uno de los bucles cerrados hasta obtener tantas ecuaciones como incógnitas. Cuando se atraviesa una resistencia en sentido positivo, el cambio en el potencial es $-IR$. Cuando se atraviesa una batería desde el terminal negativo al positivo, el cambio en el potencial es $\mathcal{E} \pm Ir$.
6. Resolver las ecuaciones para deducir los valores de las incógnitas.

COMPROBACIÓN Comprobar los resultados asignando un potencial cero a un punto del circuito y utilizar los valores de las corrientes para determinar los potenciales en otros puntos del circuito.

Ejemplo 25.17 Circuito con tres ramas

(*a*) Determinar la intensidad de la corriente en cada parte del circuito mostrado en la figura 25.34. (*b*) Asignar $V = 0$ en el punto *c* y después especificar el potencial en cada uno de los puntos de *a* a *f* respecto de aquél.

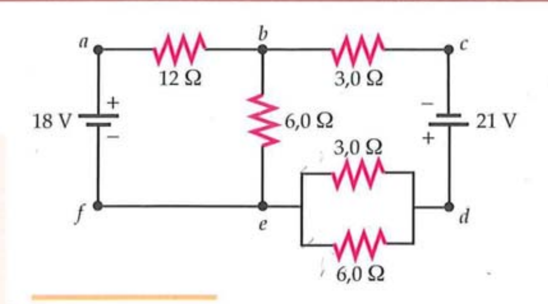


FIGURA 25.34

PLANTEAMIENTO En primer lugar, reemplazar las dos resistencias en paralelo por su resistencia equivalente. En segundo lugar, asignar una dirección positiva a cada malla e indicarla con una flecha. En tercer lugar, poner un signo + y otro − en los correspondientes bornes de la batería. Asignar un símbolo a cada malla. Las corrientes pueden deducirse aplicando la regla de los nudos a los puntos *b* y *e*, y la regla de las mallas a cada uno de los bucles cerrados del circuito.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Determinar la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de las resistencias de 3 Ω y 6 Ω.

$R_{eq} = 2{,}0\ \Omega$

2. Volver a dibujar el circuito (figura 25.35) con una resistencia de 2 Ω en lugar de la asociación en paralelo. Poner una flecha en cada malla para asignar la dirección de la corriente. Sea I la corriente de la malla con la batería de 18 V, I_1 la corriente en la resistencia de 6 Ω, e I_2 la corriente de la malla con la batería de 21 V:

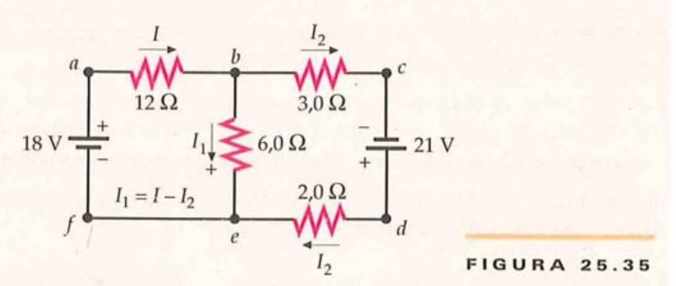


FIGURA 25.35

3. Aplicar la regla del nudo en el punto *b*:

$I = I_1 + I_2$

4. Aplicar la regla de las mallas de Kirchhoff a la malla *bcdeb* para obtener una ecuación donde aparezcan I e I_2:

$18\ \text{V} - (12\ \Omega)I - (6{,}0\ \Omega)I_1 = 0$

5. Simplificar la ecuación del paso 4 (dividiendo ambos miembros de la igualdad por 6 Ω):

$3{,}0\ \text{A} - 2{,}0I - 1{,}0I_1 = 0$

6. Aplicar la regla de las mallas de Kirchhoff a la malla *bcdeb*:

$-(3{,}0\ \Omega)I_2 + 21\ \text{V} - (2{,}0\ \Omega)I_2 + (6{,}0\ \Omega)I_1 = 0$

7. Simplificar la ecuación del paso 6 (dividiendo ambos miembros por 1,0 Ω):

$21\ \text{A} + 6{,}0I_1 - 5{,}0I_2 = 0$

8. Resolver las ecuaciones de los pasos 3, 5 y 7 para obtener I, I_1 e I_2. Una forma de hacer esto es sustituir $I_1 + I_2$ por I en la ecuación del paso 5 para obtener $3{,}0\ \text{A} - 3{,}0\,I_1 - 2{,}0I_2 = 0$. Esta ecuación y la del paso 7 constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Despejar las corrientes:

$I_1 = \boxed{-1{,}0\ \text{A}}\quad I_2 = \boxed{3{,}0\ \text{A}}\quad I = \boxed{2{,}0\ \text{A}}$

9. Utilizar $V = I_2 R_{eq}$ para determinar la caída de potencial a través de las resistencias en paralelo de 3 Ω y 6 Ω.

$V = 6{,}0\ \text{V}$

10. Utilizar el resultado del paso 9 y la ley de Ohm para determinar la corriente en cada una de las resistencias en paralelo:

$I_{3\,\Omega} = \boxed{2{,}0\ \text{A}}\quad I_{6\,\Omega} = \boxed{1{,}0\ \text{A}}$

(*b*) Volver a dibujar la figura 25.35 especificando el valor de la intensidad y su dirección en cada parte del circuito (figura 25.36). Comenzar con $V = 0$ en el punto *c* y calcular el potencial en los puntos *d*, *e*, *f*, *a* y *b*:

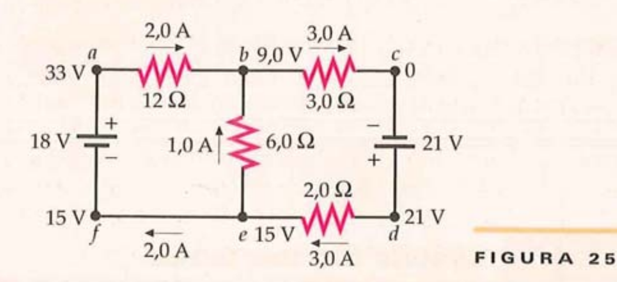


FIGURA 25.36

$V_d = V_c + 21\ \text{V} = 0 + 21\ \text{V} = \boxed{21\ \text{V}}$

$V_e = V_d - (3{,}0\ \text{A})(2{,}0\ \Omega) = 21\ \text{V} - 6{,}0\ \text{V} = \boxed{15\ \text{V}}$

$V_f = V_e = \boxed{15\ \text{V}}$

$V_a = V_f + 18\ \text{V} = 15\ \text{V} + 18\ \text{V} = \boxed{33\ \text{V}}$

$V_b = V_a - (2{,}0\ \text{A})(12{,}0\ \Omega) = 33\ \text{V} - 24\ \text{V} = \boxed{9\ \text{V}}$

COMPROBACIÓN De *b* a *c* el potencial cae (3 A)(3 Ω) = 9 V, lo cual da $V_c = 0$, como se ha supuesto inicialmente. De *e* a *b* el potencial cae (1 A)(6 Ω) = 6 V, de modo que entonces el potencial en *b* sería $V_b = V_e - 6\ \text{V} = 15\ \text{V} - 6\ \text{V} = 9\ \text{V}$.

AMPERÍMETROS, VOLTÍMETROS Y OHMÍMETROS

Los dispositivos que miden la corriente, la diferencia de potencial y la resistencia se denominan **amperímetros, voltímetros** y **ohmímetros**, respectivamente. A menudo, los tres dispositivos están incluidos en un solo *multímetro*, que se conecta según se use uno u otro. Cualquiera puede usar un voltímetro para medir la tensión entre los bornes de la batería del coche o un ohmímetro para determinar la resistencia entre dos puntos de un aparato eléctrico doméstico (por ejemplo, un tostador de pan o una bombilla) en el que se sospecha que hay un cortocircuito o un cable roto.

Para medir la intensidad de corriente a través de la resistencia del circuito simple de la figura 25.37, colocamos un amperímetro en serie con la resistencia, según se indica en la figura, de modo que el amperímetro y la resistencia sean recorridos por la misma corriente. Puesto que el amperímetro tiene cierta resistencia, la corriente del circuito se modifica cuando se incluye el amperímetro. En el caso ideal, el amperímetro deberá tener una resistencia muy pequeña de modo que introduzca una variación despreciable en la corriente a medir.

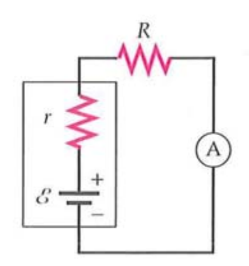


FIGURA 25.37 Para medir la corriente que circula por la resistencia R, se coloca un amperímetro (círculo A) en serie con ella, de tal modo que por él circula la misma corriente que por la resistencia.

La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia se mide colocando un voltímetro en paralelo con ella, según se indica en la figura 25.38, de modo que la caída de potencial a través del voltímetro sea la misma que a través de la resistencia. El voltímetro reduce la resistencia entre los puntos a y b, aumentando así la corriente total que circula en el circuito y variando la caída de potencial a través de la resistencia. Un buen voltímetro tiene una resistencia muy grande, para hacer mínima su influencia sobre el circuito.

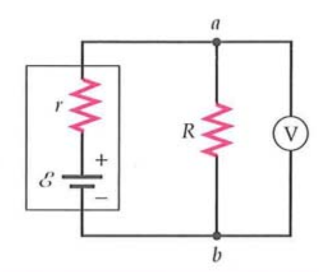


FIGURA 25.38 Para medir la caída de tensión entre los extremos de una resistencia, se coloca un voltímetro (círculo V) en paralelo con ella, de modo que las caídas de potencial a través del voltímetro y la resistencia es la misma.

El componente principal de un amperímetro o un voltímetro es el **galvanómetro**, aparato que detecta una pequeña corriente que pasa a su través. El galvanómetro se diseña de modo que la lectura en la escala sea proporcional a la corriente que pasa por él. Un galvanómetro típico utilizado en los laboratorios de prácticas para estudiantes consiste en una bobina de alambre situada en el campo magnético de un imán permanente. Cuando circula una corriente por la bobina, el campo magnético ejerce un momento de fuerza sobre ella y la hace girar. Un vástago unido a la bobina indica la lectura sobre una escala. La propia bobina contribuye con una pequeña resistencia al conectar el galvanómetro al circuito.

Para construir un amperímetro mediante un galvanómetro se coloca una resistencia pequeña, denominada **resistencia *shunt***, en *paralelo* con el galvanómetro. Puesto que la resistencia *shunt* es normalmente mucho menor que la resistencia del galvanómetro, la mayor parte de la corriente circula por el *shunt*. De este modo, la resistencia efectiva del amperímetro es aproximadamente igual que la resistencia *shunt*, la cual es mucho menor que la resistencia interna del galvanómetro solo. Para construir un voltímetro, se conecta en serie con el galvanómetro una gran resistencia, de manera que la resistencia equivalente del voltímetro es mucho mayor que la del galvanómetro solo. La figura 25.39 ilustra la construcción de un amperímetro y de un voltímetro a partir de un galvanómetro. En estos dibujos esquemáticos se muestra separadamente la resistencia del galvanómetro R_g, pero en realidad ésta forma parte del galvanómetro.

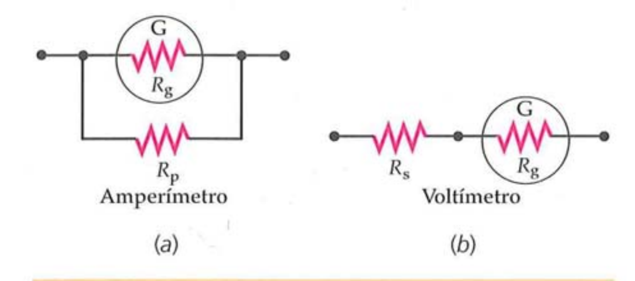
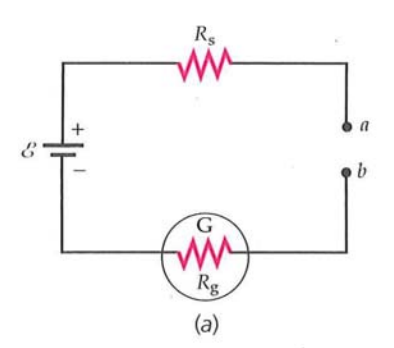


FIGURA 25.39 (*a*) Un amperímetro se compone de un galvanómetro (círculo G) cuya resistencia es R_g y una resistencia pequeña en paralelo R_p. (*b*) Un voltímetro se compone de un galvanómetro (círculo G) y una resistencia grande en serie R_s.

Un ohmímetro simple para medir resistencias consiste en una batería conectada en serie con un galvanómetro y una resistencia, como



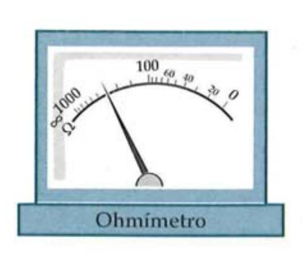


FIGURA 25.40 (*a*) Ohmímetro formado por una batería en serie con un galvanómetro y una resistencia R_s, elegida de tal modo que el galvanómetro sufre una desviación a fondo de escala cuando los puntos *a* y *b* están en cortocircuito. (*b*) Cuando una resistencia R se sitúa entre *a* y *b*, la aguja del galvanómetro se desvía en una cantidad que depende del valor de R. La escala del galvanómetro está calibrada para hacer lecturas en ohms.

indica la figura 25.40*a*. La resistencia R_s se elige de modo que cuando los terminales *a* y *b* se cortocircuitan (se ponen en contacto eléctrico con una resistencia despreciable entre ellos), la corriente a través del galvanómetro ofrece una desviación a fondo de escala. Así, una desviación a fondo de escala significa que no hay resistencia entre los terminales *a* y *b*, y una desviación nula indica que existe una resistencia infinita entre los terminales. Cuando éstos se conectan a través de una resistencia incógnita *R*, la intensidad de corriente que circula a través del galvanómetro depende de *R*, de modo que la escala puede calibrarse para dar una lectura directa de la resistencia *R*, como indica la figura 25.40*b*. Como el ohmímetro suministra una corriente a través de la resistencia a medir, este instrumento debe manejarse con precaución. Por ejemplo, no es aconsejable medir la resistencia de un galvanómetro sensible con un ohmímetro, pues la corriente suministrada por la batería de este aparato lo dañaría.

25.6 CIRCUITOS *RC*

Se denomina **circuito *RC*** aquel en el que interviene una resistencia y una capacidad. La corriente en un circuito *RC* fluye en un solo sentido, como en los circuitos de corriente continua (cc), pero la intensidad de corriente varía con el tiempo. Un ejemplo práctico de un circuito *RC* es el dispositivo *flash* de una cámara fotográfica. Antes de tomar la fotografía, la batería del *flash* carga el condensador a través de una resistencia. Cuando esto se verifica, el *flash* está preparado. Al tomar la imagen, el condensador se descarga a través de la lámpara del *flash*. El condensador se recarga por acción de la batería y, poco tiempo después, el *flash* está dispuesto para otra fotografía. Mediante las reglas de Kirchhoff, podemos obtener unas ecuaciones que relacionan la carga Q y la intensidad de corriente I en función del tiempo, tanto en el proceso de carga como en el de descarga de un condensador a través de una resistencia.

DESCARGA DE UN CONDENSADOR

La figura 25.41 muestra un condensador con una carga inicial $+Q_0$ en la placa superior y $-Q_0$ en la placa inferior. Se conecta a una resistencia R y a un interruptor S que está inicialmente abierto. La diferencia de potencial a través del condensador es inicialmente $V_0 = Q_0/C$, siendo C la capacidad.

Cerremos el interruptor en el instante $t = 0$. Puesto que ahora existe una diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia, debe pasar una corriente por la misma. La corriente inicial es

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \qquad 25.30$$

La corriente se debe al flujo de carga que va desde la placa positiva a la negativa pasando por la resistencia y así, después de un cierto tiempo, la carga del condensador se ve reducida. Si tomamos como positiva la corriente en el sentido de las agujas del reloj, la intensidad de corriente es igual a la disminución de esta carga por unidad de tiempo. Si Q es la carga sobre el condensador en un instante cualquiera t, la corriente en dicho momento es

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad 25.31$$

(El signo menos debe ser interpretado en el sentido de que como Q decrece, dQ/dt es una cantidad negativa.*) Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente (sentido horario), nos encontramos con una caída de potencial IR en la resistencia y un aumento de potencial Q/C entre las placas del condensador. La primera regla de Kirchhoff nos da

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \qquad 25.32$$

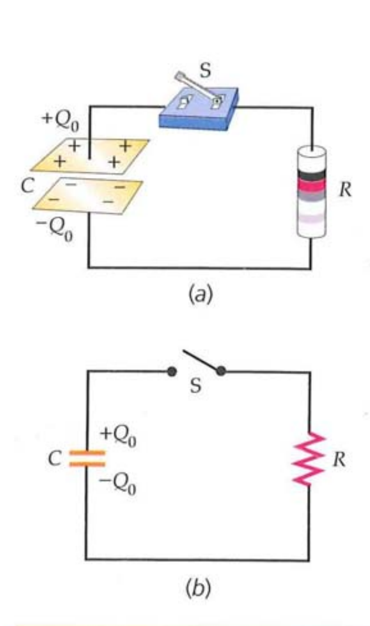


FIGURA 25.41 (*a*) Condensador de placas paralelas en serie con un interruptor y una resistencia *R*. (*b*) Diagrama que representa este circuito.

* Si se eligiera como dirección positiva la contraria a la de las agujas del reloj, el signo en la ecuación 25.31 debería ser positivo.

donde tanto Q como I son funciones de tiempo y están relacionadas por la ecuación 25.31. Sustituyendo I por $-dQ/dt$ en la ecuación 25.32, tenemos

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

o

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q \qquad 25.33$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar separamos las variables Q y t. Multiplicando ambos miembros por dt y dividiendo por Q, resulta

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\,dt \qquad 25.34$$

Ahora, las variables Q y t están en diferentes miembros de la igualdad, por lo que integrando desde Q_0 en $t = 0$ hasta Q' en t', tenemos que

$$\int_{Q_0}^{Q'} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int_0^{t'} dt$$

de modo que

$$\ln\frac{Q'}{Q_0} = -\frac{t'}{RC}$$

Como t' es arbitrario, podemos reemplazar t' por t, y entonces $Q' = Q(t)$. Despejando $Q(t)$, nos da

$$Q(t) = Q_0e^{-t/(RC)} = Q_0e^{-t/\tau} \qquad 25.35$$

donde τ, llamada **constante de tiempo**, es el tiempo durante el cual la carga disminuye hasta $1/e$ de su valor original:

$$\tau = RC \qquad 25.36$$

DEFINICIÓN: CONSTANTE DE TIEMPO

FIGURA 25.42 Representación de la carga de un condensador en función del tiempo para el circuito de la figura 25.41 cuando el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$. La constante de tiempo $\tau = RC$ es el tiempo necesario para que la carga decrezca en un factor e^{-1}. (La constante de tiempo es también el tiempo que tardaría el condensador en descargarse completamente si su velocidad de descarga fuera constante, como indica la línea de trazos.)



Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Funciones exponenciales

La figura 25.42 muestra la carga del condensador del circuito de la figura 25.41 en función del tiempo. Después de un tiempo $t = \tau$, la carga es $Q = e^{-1}Q_0 = 0{,}37Q_0$. Después de un tiempo $t = 2\tau$, la carga es $Q = e^{-2}Q_0 = 0{,}135Q_0$, y así sucesivamente. Después de un tiempo igual a varias veces la constante de tiempo, la carga del condensador es despreciable. Este tipo de disminución, muy común en la naturaleza, se llama **decrecimiento exponencial**. Ocurre siempre que la disminución de una magnitud con el tiempo es proporcional a la propia magnitud.*

La disminución de carga en un condensador puede compararse con la disminución de la cantidad de agua en un vaso que tiene un pequeño agujero en el fondo. El flujo de agua que sale por el orificio es proporcional a la presión del agua, la cual es a su vez proporcional a la cantidad de agua existente en el vaso.

La intensidad de corriente se obtiene derivando la ecuación 25.35

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/(RC)}$$

Usando la ecuación 25.30, obtenemos

$$I = I_0e^{-t/\tau} \qquad 25.37$$

donde $I_0 = V_0/R = Q_0/(RC)$ es la corriente inicial. La corriente, como la carga, también disminuye exponencialmente con el tiempo, siendo su constante de tiempo $\tau = RC$. Este proceso se representa en la figura 25.43.

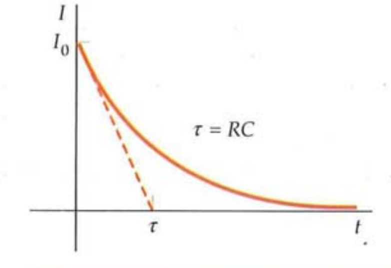


FIGURA 25.43 Gráfico de la intensidad de corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 25.41. La curva tiene la misma forma que la de la figura 25.42. Si la corriente decreciese a un ritmo constante se anularía al cabo de un tiempo igual a la constante de tiempo, como indica la línea de trazos.

* Ya vimos un decrecimiento exponencial en el capítulo 14 al estudiar el oscilador amortiguado.

Ejemplo 25.18 Descarga de un condensador

Un condensador de 4 μF se carga a 24 V y luego se conecta a una resistencia de 200 Ω. Determinar (*a*) la carga inicial del condensador, (*b*) la corriente inicial que circula a través de la resistencia de 200 Ω, (*c*) la constante de tiempo y (*d*) la carga que posee el condensador después de 4 ms.

PLANTEAMIENTO El diagrama del circuito es el mismo que el de la figura 25.41.

SOLUCIÓN

(*a*) La carga inicial está relacionada con la capacidad y el voltaje:

$$Q_0 = CV_0 = (4,0\ \mu\text{F})(24\ \text{V}) = \boxed{96\ \mu\text{C}}$$

(*b*) La corriente inicial es el voltaje inicial dividido por la resistencia:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{24\ \text{V}}{200\ \Omega} = \boxed{0,12\ \text{A}}$$

(*c*) La constante de tiempo es igual a *RC*:

$$\tau = RC = (200\ \Omega)(4,0\ \mu\text{F}) = 800\ \mu\text{s} = \boxed{0,80\ \text{ms}}$$

(*d*) Sustituyendo $t = 4$ ms en la ecuación 25.35, determinamos la carga sobre el condensador después de este tiempo:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} = (96\ \mu\text{C})e^{-(4,0\ \text{ms})/(0,80\ \text{ms})}$$

$$= (96\ \mu\text{C})e^{-5} = \boxed{0,65\ \mu\text{C}}$$

COMPROBACIÓN Como sabemos que la corriente inicial es $I_0 = 0,12$ A, el tiempo que tardaría en descargarse totalmente el condensador sería $Q_0/I_0 = 96\ \mu\text{C}/0,12\ \text{A} = 0,80$ ms. Como la corriente decrece exponencialmente durante la descarga, no debe sorprender que pierda el 99,3% de su carga inicial en 4,0 ms.

OBSERVACIÓN Después de un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo, la carga Q es menor que el 1% de su valor inicial.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.10 Hallar la corriente que circula a través de la resistencia de 200 Ω para $t = 4$ ms.

CARGA DE UN CONDENSADOR

La figura 24.44*a* muestra un circuito utilizado para cargar un condensador inicialmente descargado. El interruptor S, abierto inicialmente, se cierra en el instante $t = 0$. La carga empieza a fluir inmediatamente a través de la resistencia, depositándose en la placa positiva del condensador (figura 25.44*b*). Si la carga del condensador en un instante cualquiera t es Q, la corriente en el circuito es I, y el sentido positivo es el de las agujas del reloj, la regla de las mallas de Kirchhoff nos da

$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0 \qquad 25.38$$

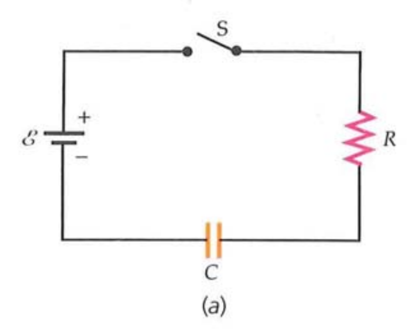
Analizando esta ecuación, vemos cuando la carga del condensador es cero (en $t = 0$), la corriente es $I_0 = \mathcal{E}/R$. La carga entonces crece y la corriente decrece. La carga alcanza su máximo valor de $Q_f = C\mathcal{E}$ cuando la corriente I es cero, lo cual coincide con el resultado obtenido a partir de la ecuación 25.38.

En este circuito, se ha elegido el sentido positivo de modo que si I es positiva, Q aumenta. Por lo tanto:

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

Sustituyendo I por $+\,dQ/dt$ en la ecuación 25.38, se obtiene

$$\mathcal{E} - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \qquad 25.39$$



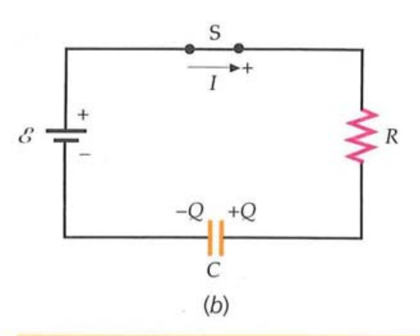


FIGURA 25.44 (*a*) Circuito para cargar un condensador hasta una diferencia de potencial $\mathcal{E}$. (*b*) Después de cerrar el interruptor, existe una corriente y una caída de potencial a través de la resistencia y una carga y una caída de potencial en el condensador.

La ecuación 25.39 puede resolverse del mismo modo que la 25.33. Los detalles se dejan como materia de un problema (véase el problema 101). El resultado es

$$Q = C\mathcal{E}[1 - e^{-t/(RC)}] = Q_f(1 - e^{-t/\tau}) \qquad 25.40$$

donde $Q_f = C\mathcal{E}$ es la carga final. La intensidad de corriente se obtiene de $I = dQ/dt$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\mathcal{E}\left[-\frac{-1}{RC}e^{-t/(RC)}\right] = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/(RC)}$$

o sea,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/(RC)} = I_0 e^{-t/\tau} \qquad 25.41$$

donde la corriente inicial en este caso es $I_0 = \mathcal{E}/R$.

Las figuras 25.45 y 25.46 muestran la carga y la corriente en función del tiempo.

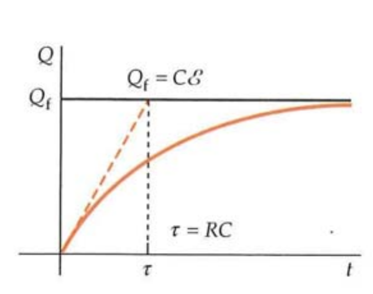


FIGURA 25.45 Representación de la carga de un condensador en función del tiempo en el caso del circuito de la figura 25.44 después de cerrar el interruptor en $t = 0$. Después del tiempo $t = \tau = RC$, la carga en el condensador es $0{,}63C\mathcal{E}$, donde $C\mathcal{E}$ es su carga final. Si la velocidad de carga fuese constante, el condensador se cargaría por completo al cabo de un tiempo $t = \tau$.

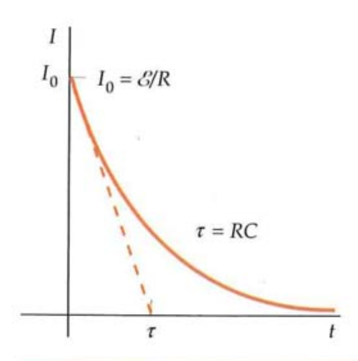


FIGURA 25.46 Gráfico de la corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 25.44. La corriente es inicialmente $\mathcal{E}/R$, y disminuye exponencialmente con el tiempo.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.11

Demostrar que la ecuación 25.40 satisface la ecuación 25.39 sustituyendo en esta última los valores de Q y dQ/dt.

PROBLEMA PRÁCTICO 25.12

¿Qué fracción de la carga máxima existe en un condensador en proceso de carga al cabo de un tiempo $t = 2\tau$?

Ejemplo 25.19 Carga de un condensador — *Inténtelo usted mismo*

Una batería de 6 V y resistencia interna despreciable se utiliza para cargar un condensador de 2 μF a través de una resistencia de 100 Ω. Hallar (*a*) la corriente inicial, (*b*) la carga final del condensador, (*c*) el tiempo necesario para obtener un 90% de la carga final y (*d*) la carga cuando la corriente es la mitad que la corriente inicial.

PLANTEAMIENTO La carga inicialmente es cero y, por tanto, la caída del potencial a través de la resistencia es igual a la fem de la batería. Se aplica la ley de Ohm a la resistencia y se obtiene la corriente. Después de un tiempo prolongado, la corriente es cero y el voltaje entre las placas del condensador es el de la batería. Aplicando la definición de capacidad, se obtiene la carga. Usar la ecuación 25.40 para relacionar la carga con el tiempo, y mediante la regla de Kirchhoff de mallas relacionar la carga y la corriente.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) Determinar la corriente inicial a partir de $I_0 = \mathcal{E}/R$.	$I_0 = 0{,}060\ \text{A} = \boxed{60\ \text{mA}}$
(*b*) Calcular la carga final a partir de $Q = C\mathcal{E}$.	$Q_f = \boxed{12\ \mu\text{C}}$
(*c*) Considerar que $Q = 0{,}9\ Q_f$ en la ecuación 25.40 y despejar *t*. (Para ello, primero despejar $e^{t/\tau}$, y luego aplicar logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad.)	$t = 2{,}3\tau = \boxed{0{,}46\ \text{ms}}$
(*d*) 1. Aplicar la regla de las mallas de Kirchoff al circuito utilizando la figura 25.44*b*.	$\mathcal{E} - IR - \dfrac{Q}{C} = 0$
2. Considerar que $I = I_0/2$, y obtener *Q*.	$Q = \dfrac{Q_f}{2} = \boxed{6{,}0\ \mu\text{C}}$

COMPROBACIÓN La respuesta al apartado (*d*) se puede obtener despejando primero *t* en la ecuación 25.41, y sustituyendo el valor obtenido de *t* en la ecuación 25.40 para obtener *Q*. No obstante, aplicando la regla de las mallas la resolución es más directa.

Ejemplo 25.20 Valores para tiempos largos y cortos

El condensador de 6 μF del circuito de la figura 25.47 está inicialmente descargado. Calcular la corriente a través de las resistencias de 4 Ω y de 8 Ω (*a*) inmediatamente después de que el interruptor se haya cerrado y (*b*) un largo tiempo después de que el interruptor se haya cerrado. (*c*) Determinar la carga del condensador transcurrido un largo tiempo después de cerrarse el interruptor.

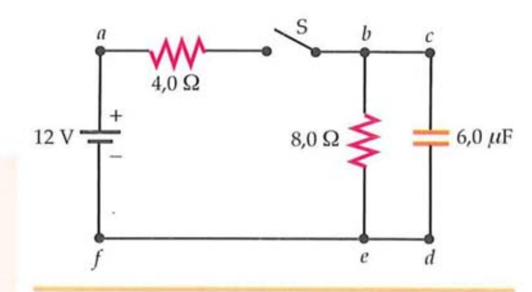


FIGURA 25.47

PLANTEAMIENTO Como el condensador está inicialmente descargado y la resistencia de 4 Ω limita la corriente que pasa a través de la batería, la diferencia de potencial inicial entre las placas del condensador es cero. El condensador y la resistencia de 8 Ω están conectados en paralelo, por lo que la diferencia de potencial entre los extremos de ambos es la misma. Por consiguiente, la diferencia de potencial inicial entre los extremos de la resistencia de 8 Ω es también cero. La dirección positiva en la rama que tiene la batería es hacia arriba y en las otras dos ramas es hacia abajo. Sea *Q* la carga en la placa de mayor potencial del condensador.

SOLUCIÓN

(*a*) Aplicar la regla de las mallas al bucle exterior y determinar la corriente que atraviesa la resistencia de 4 Ω. La diferencia de potencial a través de la resistencia de 8 Ω y a través del condensador es la misma. Considerar que la carga inicial del condensador es cero y hallar la intensidad que circula por la resistencia de 8 Ω:

$$12\ \text{V} - (4{,}0\ \Omega)I_{4\Omega} - \frac{0}{C} = 0$$

$$I_{4\Omega} = \boxed{3{,}0\ \text{A}}$$

$$I_{8\Omega}(8\ \Omega) - \frac{0}{C} = 0$$

$$I_{8\Omega} = \boxed{0}$$

(*b*) Después de un largo tiempo, el condensador se carga completamente, la carga deja de fluir o de escapar de las placas y la corriente que circula por ambas resistencias es la misma. Aplicar la regla de las mallas al bucle de la izquierda y determinar la intensidad:

$$12\ \text{V} - (4{,}0\ \Omega)I_f - (8{,}0\ \Omega)I_f = 0$$

$$I_f = \boxed{1{,}0\ \text{A}}$$

(*c*) Las diferencias de potencial entre los extremos de la resistencia de 8 Ω y las placas del condensador son iguales. Utilizando esta condición, obtener Q_f:

$$I_f(8{,}0\ \Omega) = \frac{Q_f}{C}$$

$$Q_f = (1{,}0\ \text{A})(8{,}0\ \Omega)(6{,}0\ \mu\text{F}) = \boxed{48\ \mu\text{C}}$$

COMPROBACIÓN Vemos pues, que el análisis de este circuito en los tiempos extremos, cuando el condensador está descargado o totalmente cargado, es simple. Cuando el condensador está descargado actúa igual que un buen conductor entre los puntos *c* y *d*, es decir, el circuito es equivalente al mostrado en la figura 25.48*a* en donde se ha reemplazado el condensador por un cable de resistencia cero. Cuando el condensador está totalmente cargado, actúa como el circuito del interruptor abierto indicado en la figura 25.48*b*.

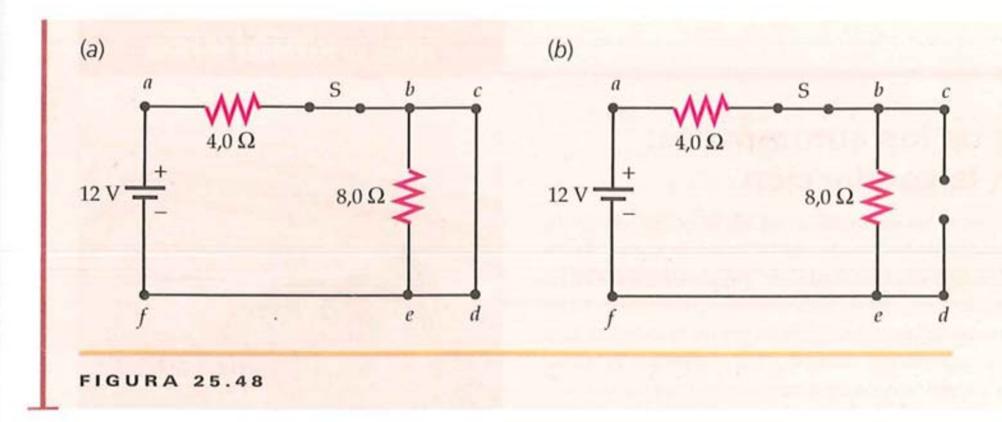


FIGURA 25.48

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN LA CARGA DE UN CONDENSADOR

Durante el proceso de carga, fluye una carga total $Q_f = \mathcal{E}C$ a través de la batería. Por tanto, la batería realiza un trabajo

$$W = Q_f\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$$

La energía almacenada en el condensador es, precisamente, la mitad de esta cantidad. Recordad la ecuación 24.8:

$$U = \tfrac{1}{2}Q_f\mathcal{E}$$

Demostraremos ahora que la otra mitad de energía proporcionada por la batería se disipa como energía térmica por efecto Joule en la resistencia. La potencia disipada por la resistencia es

$$\frac{dW_R}{dt} = I^2R$$

Utilizando la ecuación 25.41 para el valor de la corriente, tenemos

$$\frac{dW_R}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/(RC)}\right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-2t/(RC)}$$

La energía disipada total se obtiene integrando desde $t = 0$ hasta $t = \infty$:

$$W_R = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-2t/(RC)}\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^\infty e^{-at}\,dt$$

donde $a = 2/RC$. Entonces,

$$W_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\frac{e^{-at}}{-a}\bigg|_0^\infty = -\frac{\mathcal{E}^2}{Ra}(0-1) = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\frac{1}{a} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\frac{RC}{2}$$

Por lo tanto, el calor total debido al efecto Joule es

$$W_R = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2C = \frac{1}{2}Q_f\mathcal{E}$$

donde $Q_f = \mathcal{E}C$. Este resultado es independiente de la resistencia R. Por lo tanto, cuando un condensador se carga a través de una resistencia mediante una fem constante, la mitad de la energía proporcionada por la batería se almacena en el condensador y la otra mitad se transforma en calor independientemente de la resistencia. Esta energía térmica incluye la potencia disipada en la resistencia interna de la batería.

Temas de actualidad en Física

Sistemas eléctricos de los automóviles: innovación en la conducción



(Graham Harrison/Alamy.)

Las baterías de 6 voltios (de 7 V con carga) fueron las más usadas en los circuitos eléctricos de los automóviles fabricados en Estados Unidos en la década de 1930. A mediados de los 50, los fabricantes de automóviles de todo el mundo se persuadieron de que esta batería no era la adecuada para abastecer las necesidades de energía eléctrica de los coches y, como consecuencia, introdujeron modificaciones en la instalación eléctrica para poder incorporar una batería de 12 V (14 V con carga), que pudiera suministrar energía a los sistemas eléctricos[1] cuyo consumo requiriera 14 V. El proceso de adaptación de este cambio duró varios años.[2]

A mediados de los 60, las necesidades de energía eléctrica incluían estárter (sistema de arranque), mecanismo de ignición, luces, radio e incluso aire acondicionado en los coches de lujo.[3] Hoy en día, el sistema eléctrico y electrónico del coche[4] puede incluir sensores antichoque, sistemas automáticos de frenado (ABS), motores para mover los asientos, dirección asistida, frenado automático, limpiaparabrisas intermitente, reproductor de vídeo, sistemas de control, luces de cruce y ventanillas de subida y bajada automática. Algunos coches de gran lujo requerían otras prestaciones en sus sistemas eléctricos como sistemas electrónicos de control del acelerador, radar para detectar objetos a distancia,[5] estabilidad y suspensión con control electrónico y calentamiento discreccional de los asientos.[6] La potencia eléctrica que requiere un automóvil, hoy en día, oscila entre 1,5 y 2,0 kW y es previsible que aumente hasta una potencia de entre 3,0 y 3,5 kW, e incluso más en un futuro próximo.[7] El sistema eléctrico y electrónico de un coche medio supone actualmente alrededor del 20% del coste total de su fabricación.[8]

Dado que las necesidades de energía eléctrica son cada vez mayores en la automoción,[9] se ha sugerido la idea de elevar la tensión entre los bornes de las baterías a 36 V e incluso a 42 V dada la creciente necesidad de abastecer nuevos dispositivos eléctricos. (Como la potencia es el producto de voltaje por intensidad, esto significa que a un crecimiento del voltaje sigue una disminución de la corriente para suministrar la misma potencia.) Ello llevó a la creencia de que se podrían utilizar instalaciones eléctricas más ligeras y simplificadas para cubrir las necesidades eléctricas de los coches.[10] Además, un voltaje alto puede significar motores de arranque y alternadores más ligeros y pequeños.

Sin embargo, el cambio a un sistema de 42 V está siendo más complejo de lo esperado inicialmente, ya que teóricamente un coche con este tipo de batería de 42 V exigiría dotar al vehículo de componentes no estándar.[11] En un sistema de 14 V, una conexión que se suelte por una vibración tiene que tener una distancia de unos milímetros o inferior para que forme un arco voltaico, mientras que en el de 42 V esta misma desconexión sí puede dar a lugar a dicho arco con el consiguiente peligro de que se produzca un incendio.[12] En consecuencia, las conexiones con 42 V resultan más caras. En 2005, varios fabricantes dieron a conocer que no estaban interesados en utilizar sistemas de 42 V en los próximos años.[13,14] No obstante, un consorcio de investigadores continúa con el proyecto de implantar sistemas de 42 V en los coches.[15] Cuando estos sistemas de 42 V sean rentables será posible que se instalen masivamente en los automóviles.

---

1 Ribbens, W. B., *Understanding Automotive Electronics, 6th ed.* New York: Newnes (Elsevier), 2003.
2 Corbett, B., "No Flick of the Switch." *Ward's Auto World*, April 2001, Vol. 37, No. 4, p. 50.
3 Ribbens, W. B., op. cit.
4 *Automotive Electronics Handbook*, R. Jurgen, ed., New York: McGraw-Hill, 1995.
5 Allen, R., "New Technologies Make Roads Safer... One Smart Car at a Time." *Electronic Design*, Jun. 29, 2006, pp. 41–44.
6 "The 2007 S600 Sedan," Mercedes-Benz, http://www.mbusa.com/models/features/specs/overview.do?modelCode=S600V&class=07_S As of Sept. 2006.
7 Masrur, M. A., Monroe, J., Patel, R., and Garg, V. K., "42-volt Electrical Power System for Military Vehicles—Comparison with Commercial Automotive Systems," *Vehicular Technology Conference*, 2002. Proceedings, VTC 2002-Fall, 2002 IEEE 56th, Vol. 3, pp. 1846–1850.
8 Marsh, D., "LIN Simplifies and Standardizes In-Vehicle Networks." *Electronic Design News*, Apr. 8, 2005, pp. 29+.
9 Huber, P. W., and Mills, M. P., "The End of the M. E.?" *Mechanical Engineering*, May 2005, pp. 26–29.
10 Truett, R., "42-Volt Systems Boost Fuel Economy Efforts." *Automotive News*, Oct. 21, 2001, Vol. 77, No. 6008, p. 6i.
11 "No-Compromise Mild Hybrid Car Engine Has a Promising Future." *Asia-Pacific Engineer*, Jun. 1, 2003. http://www.engineerlive.com/asiapacific-engineer/automotive-design/1603/nocompromise-mild-hybrid-car-engine-has-a-promising-future.thtml As of Sept. 2006.
12 Moran, T., "42-Volt Challenges: Arcs and Sparks." *Automotive News*, Mar. 12, 2001, Vol. 75, No. 5920, p. 8.
13 Kelly, K., "DC Dumps 42-Volts." *Ward's AutoWorld*, Jun. 2004, p. 9.
14 Crain, K., "Let's Step Back, Rethink Technology." *Automotive News*, Jan. 3, 2005, Vol. 79, No. 6128, p. 12.
15 MIT/Industry Consortium on Advanced Automotive Electrical/Electronic Components and Systems. "Consortium Research Units." http://lees-web.mit.edu/public/Public%20Documents/Research_Units_and_Deliverables.pdf As of Sept. 2006.

Resumen

1. La ley de Ohm es una ley empírica que se cumple sólo en ciertos materiales.
2. La intensidad de corriente, la resistencia y la fem son importantes magnitudes *definidas*.
3. Las reglas de Kirchhoff son una consecuencia de la conservación de la carga y de la naturaleza conservativa del campo eléctrico.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Intensidad de la corriente eléctrica	La intensidad de corriente eléctrica es el flujo de carga que atraviesa un área transversal por unidad de tiempo. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ cuando Δt tiende a cero.	25.1
Velocidad de desplazamiento	En un cable conductor, la corriente eléctrica es el resultado del lento desplazamiento de los electrones cargados negativamente, que son acelerados por un campo eléctrico en el cable y chocan con los iones del conductor. Las velocidades típicas de desplazamiento de los electrones en cables metálicos son del orden de unos pocos milímetros por segundo. Para cargas que se muevan en la dirección positiva, $I = qnAv_d$ donde $q = -e$, n la densidad numérica de electrones, A la sección transversal y v_d la velocidad de desplazamiento.	25.3
Densidad de corriente	La densidad de corriente $\vec{J}$ se relaciona con la velocidad de arrastre (o desplazamiento) mediante la siguiente relación $\vec{J} = qn\vec{v}_d$ La corriente I a través de la superficie de la sección transversal del hilo es el flujo del vector densidad de corriente a través de dicha superficie.	25.4
2. Resistencia		
Definición	$R = \frac{V}{I}$	25.7
Resistividad ρ	$R = \rho\frac{L}{A}$	25.10
Coeficiente de resistividad en función de la temperatura α	$\alpha = \frac{(\rho - \rho_0)/\rho_0}{T - T_0}$	25.12
3. Ley de Ohm	En los materiales óhmicos, la resistencia no depende de la corriente ni de la caída de voltaje: $V = IR$, R constante	25.9
4. Potencia		
Suministrada a un dispositivo o segmento	$P = IV$	25.13
Disipada en una resistencia	$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$	25.14
5. fem		
Fuente de fem	Una fuente de fem es un dispositivo que suministra energía a un circuito.	
Potencia suministrada por una fem	$P = I\mathcal{E}$	25.15
6. Batería		
Ideal	Una batería ideal es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus bornes, independientemente de la corriente suministrada.	
Real	Una batería real puede considerarse como una batería ideal en serie con una pequeña resistencia llamada resistencia interna.	
Voltaje en los bornes	$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir$ siendo la dirección positiva en la batería la que indica el potencial creciente	25.16

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Energía total almacenada	$E_{almacenada} = Q\mathcal{E}$	25.18
7. Resistencia equivalente		
Resistencias en serie	$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$	25.20
Resistencias en paralelo	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \ldots$	25.25
8. Reglas de Kirchhoff	1. Al recorrer un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial es igual a cero. 2. En toda unión (nudo) de un circuito, donde la corriente puede dividirse, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes.	
9. Aparatos de medida		
Amperímetro	Un amperímetro es un aparato de muy baja resistencia que se conecta en serie con un elemento del circuito para medir la intensidad en dicho elemento.	
Voltímetro	Un voltímetro es un aparato de resistencia muy elevada que se conecta en paralelo con un elemento del circuito para medir la caída de voltaje a través de dicho elemento.	
Ohmímetro	Un ohmímetro es un aparato que se usa para medir la resistencia de un elemento de un circuito situado entre sus bornes. Consta de una batería conectada en serie con un galvanómetro y de una resistencia.	
10. Descarga de un condensador		
Carga en el condensador	$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)} = Q_0 e^{-t/\tau}$	25.35
Corriente en el circuito	$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} = I_0 e^{-t/\tau}$	25.37
Constante de tiempo	$\tau = RC$	25.36
11. Carga de un condensador		
Carga en el condensador	$Q = C\mathcal{E}[1 - e^{-t/(RC)}] = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$	25.40
Corriente en el circuito	$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/(RC)} = I_0 e^{-t/\tau}$	25.41

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

25.1 (*a*) La corriente es mayor justo después de cerrar el circuito porque el filamento de la bombilla, en ese instante, es un metal frío y, en consecuencia, su resistencia es menor que la que alcanza cuando lleva tiempo funcionando. Menores resistencias implican mayores corrientes. (*b*) La batería suministra energía inicialmente a mayor velocidad que la que disipa el filamento, relativamente frío todavía, al emitir calor. Después de un tiempo, la energía suministrada por la batería al filamento es igual que el calor disipado por éste. En estas condiciones, la temperatura del filamento y, por lo tanto, su resistencia se mantienen constantes.

Respuestas a los problemas prácticos

25.1 7,9 h

25.2 14 000

25.3 4,5 V

25.4 2,4 m

25.5 Los colores de las bandas, de arriba hacia abajo, son marrón, naranja, azul, rojo, y marrón. El valor de la resistencia es, por lo tanto, 13,6 kΩ, y su tolerancia 1%.

25.6 (*a*) 45 W, (*b*) 270 J

25.7	(*a*) 6,0 Ω, (*b*) 1,3 Ω
25.8	(*a*) $R'_{eq} = 2{,}0\ \Omega$; (*b*) $I = 9{,}0$ A; (*c*) $V_2 = 18$ V, $V_0 = 0$, $V_{12} = 0$; (*d*) $I_2 = 9{,}0$ A, $I_0 = 9{,}0$ A, $I_{12} = 0$
25.9	(*a*) 3,0 A (*b*) 0,83 A
25.10	0,81 mA
25.12	0,86

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Al estudiar la electrostática, llegamos a la conclusión de que en condiciones de equilibrio no existe campo eléctrico dentro de un conductor. ¿Cómo es que ahora hablamos de campos eléctricos dentro de un conductor?

2 • La figura 25.12 ilustra una analogía mecánica de un circuito eléctrico sencillo. Idear otra analogía mecánica en la cual la corriente esté representada por un flujo de agua en lugar de bolitas. En el circuito de agua, ¿qué sería lo análogo a la batería? ¿Qué sería lo análogo al cable? y ¿qué a la resistencia?

3 • Sean dos cables de cobre A y B conectados en serie por los que, como es obvio, pasa la misma corriente. El diámetro del cable A es el doble del diámetro del cable B ¿Cuál de los dos hilos tiene mayor densidad de portadores de carga? (*a*) A. (*b*) B. (*c*) Tienen la misma.

4 • Si los diámetros de dos hilos de cobre son idénticos y la corriente transportada por el hilo A es el doble de la del B, ¿en qué hilo la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga es mayor? (*a*) A. (*b*) B. (*c*) En los dos es igual.

5 • Si los dos hilos, A y B, son idénticos y la corriente en A es doble que en B, ¿cuál tiene mayor densidad de corriente? (*a*) A. (*b*) B. (*c*) Los dos tienen la misma. (*d*) La respuesta es otra diferente a las anteriores.

6 •• Sea un hilo metálico conectado por sus extremos a los bornes de una batería. Analizar esta afirmación: la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga es independiente de la longitud del hilo.

7 • En una resistencia, la dirección de la corriente es la dirección en la que decrece el potencial eléctrico. ¿En una batería es también así? Razonar la respuesta.

8 • Analizar la diferencia existente entre una fem y una diferencia de potencial.

9 • Dos cables del mismo material e igual longitud tienen diámetros distintos. El cable A tiene un diámetro doble que el de B. Si la resistencia del cable B es R, ¿cuál es la resistencia del cable A? (*a*) R. (*b*) $2R$. (*c*) $R/2$. (*d*) $4R$. (*e*) $R/4$.

10 • Dos alambres de cobre cilíndricos poseen la misma masa. El cable A tiene doble longitud que el B. La relación de sus resistencias es (*a*) $R_A = 8R_B$. (*b*) $R_A = 4R_B$. (*c*) $R_A = 2R_B$. (*d*) $R_A = R_B$.

11 • Por una resistencia circula una corriente I. La potencia disipada en la resistencia es P. ¿Cuál es la potencia disipada si por la misma resistencia circula una corriente $3I$? (Suponer que la resistencia no se modifica.) (*a*) P. (*b*) $3P$. (*c*) $P/3$. (*d*) $9P$. (*e*) $P/9$.

12 • La potencia disipada en una resistencia es P cuando la caída de voltaje a su través es V. Si la caída de voltaje se incrementa a $2V$ (sin cambio de resistencia), ¿cuál es la potencia disipada? (*a*) P. (*b*) $2P$. (*c*) $4P$. (*d*) $P/2$. (*e*) $P/4$.

13 • Un calentador posee una resistencia variable conectada a una fuente ideal de voltaje constante. (Una fuente ideal de tensión es aquélla que mantiene constante la fem y no tiene resistencia interna.) Para incrementar la emisión de calor, ¿debemos aumentar o disminuir la resistencia? Explicar la respuesta. SSM

14 • Se conectan dos resistencias, R_1 y R_2, en paralelo. Si $R_1 >> R_2$, la resistencia equivalente es, aproximadamente, (*a*) R_1. (*b*) R_2. (*c*) 0. (*d*) Infinito.

15 • ¿Cuál será la respuesta del problema 14 si R_1 y R_2 se conectan en serie? Si $R_1 >> R_2$, la resistencia equivalente de la asociación es, aproximadamente, (*a*) R_1. (*b*) R_2. (*c*) 0. (*d*) Infinito.

16 • Se conectan dos resistencias en paralelo existiendo entre sus extremos comunes una diferencia de potencial. La resistencia A es el doble que la B. Si la corriente que atraviesa la resistencia A es I, ¿cuál es la que pasa por la B? (*a*) I. (*b*) $2I$. (*c*) $I/2$. (*d*) $4I$. (*e*) $I/4$.

17 • Dos resistencias están conectadas en serie a través de una diferencia de potencial. La resistencia de A es doble que la de B. Si la corriente que circula por la resistencia A es I, ¿cuál es la corriente que circula por B? (*a*) I. (*b*) $2I$. (*c*) $I/2$. (*d*) $4I$. (*e*) $I/4$.

18 • La regla de las mallas de Kirchhoff es una consecuencia de (*a*) la conservación de la carga, (*b*) la conservación de la energía, (*c*) las leyes de Newton, (*d*) la ley de Coulomb, (*e*) la cuantización de la carga.

19 • Verdadero o falso:

(*a*) Un voltímetro ideal tiene resistencia interna nula.
(*b*) Un amperímetro ideal tiene resistencia interna nula.
(*c*) Una fuente de tensión ideal tiene resistencia interna nula.

20 • En una clase práctica de laboratorio sobre seguridad, la profesora explicó que para medir la caída de potencial en una resistencia, debe conectarse el voltímetro en paralelo con la resistencia y para medir la corriente que la atraviesa, el amperímetro debe conectarse en serie con ella. Además, dijo que si conectamos el voltímetro en serie con la resistencia, no medimos la resistencia, pero tampoco causamos ningún daño ni a la resistencia ni al instrumento; sin embargo, conectando el amperímetro en paralelo con la resistencia no mediremos la resistencia, pero podríamos dañar gravemente al circuito y al instrumento de medida. Explicar por qué conectando en serie voltímetro y resistencia no se causa daño alguno, mientras que conectando el amperímetro en paralelo con la resistencia se puede causar un daño al circuito y al aparato.

21 • El condensador C de la figura 25.49 está inicialmente descargado. Justo después de cerrar el interruptor, (*a*) el voltaje a través de C es igual a $\mathcal{E}$, (*b*) el voltaje a través de R es igual a $\mathcal{E}$, (*c*) la corriente en el circuito es cero, (*d*) ambas afirmaciones (*a*) y (*c*) son correctas.

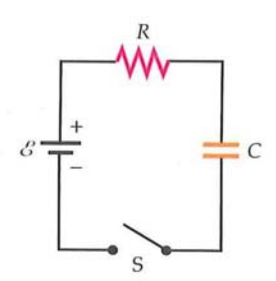


FIGURA 25.49 Problemas 21 y 24

22 •• Un condensador se descarga a través de una resistencia. Si la carga de este condensador tarda un tiempo T en caer a la mitad de su valor inicial, ¿cuánto tiempo tarda la energía almacenada en caer a la mitad de su valor inicial?

23 •• En la figura 25.50, los valores de las resistencias tienen las siguientes relaciones, $R_2 = R_3 = 2R_1$. Si P es la potencia disipada en R_1, ¿cuál es la potencia disipada por R_2 y R_3? SSM

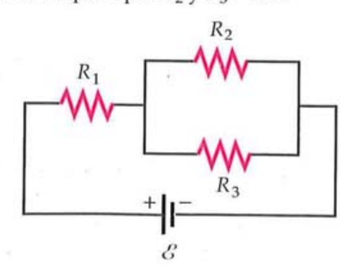


FIGURA 25.50 Problema 23

24 •• El condensador de la figura 25.49 está inicialmente descargado. Se cierra el interruptor y permanece cerrado un tiempo prolongado, (*a*) la energía suministrada por la batería es $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, (*b*) la energía disipada en la resistencia es $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, (*c*) la energía se disipa en la resistencia a ritmo constante, (*d*) la carga total que fluye a través de la resistencia es $\frac{1}{2}C\mathcal{E}$.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

25 •• Explicar por qué es peligroso colocar cada uno de los extremos de un objeto en forma de hilo en sendos polos de un enchufe doméstico de corriente y decir por qué la corriente que se produciría podría hacer estallar los fusibles y/o hacer caer el diferencial.

26 •• (*a*) Estimar la resistencia del cable del motor de arranque de un automóvil. (*b*) Hacer una estimación sobre la corriente necesaria para poner en marcha un coche. Considerando esta corriente, ¿cuál es la caída de potencial eléctrico en el cable del apartado (*a*)? (*c*) ¿Cuánta potencia se disipa en este cable considerando aquella corriente?

27 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Se utiliza una espiral de alambre de nicrom como elemento calefactor en un evaporador de agua que genera 8 g de vapor por segundo. El alambre posee un diámetro de 1,80 mm y está conectado a una fuente de alimentación de 120 V. Calcular la longitud del alambre. *Ayuda: se necesita determinar el tamaño de un calentador de agua estándar en un periodo razonable de tiempo para calentar agua.*

28 •• Unos tubos fluorescentes compactos cuestan 6 dólares cada uno y su periodo de vida se estima en 8000 h. Estos tubos consumen 20 W de potencia, pero producen una iluminación equivalente a la de las bombillas incandescentes de 75 W. Éstas cuestan 1,5 dólares cada una y su periodo de vida se estima en 1000 h. Si una vivienda tiene por término medio seis bombillas incandescentes de 75 W constantemente encendidas y la energía cuesta 11,5 centavos de dólar por kilowatt × hora, ¿cuánto dinero se ahorrará un consumidor cada año instalando en su lugar tubos fluorescentes?

29 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Los cables eléctricos de una casa deben ser suficientemente gruesos de diámetro para que no se calienten demasiado y provoquen un incendio. Supongamos que un alambre determinado transporta una corriente de 20 A, y se especifica que el calentamiento por efecto Joule no debe exceder los 2 W/m. ¿Qué diámetro debe tener un alambre de cobre para que se considere "seguro" con esta corriente?

30 •• Para construir un puntero láser se requiere un diodo láser que actúe como elemento extremadamente no lineal de un circuito. Cuando la caída de potencial en dicho elemento es menor que 2,3 V, se comporta como si tuviera una resistencia interna infinita, y para voltajes superiores a este valor, su resistencia interna efectiva es muy baja, cercana a cero. (*a*) Un puntero láser está construido mediante dos pilas de reloj de 1,55 V conectadas en serie entre los extremos del diodo. Si cada una de las pilas tiene una resistencia interna de entre 1,00 Ω y 1,50 Ω, estimar la intensidad de corriente que circula por el diodo láser. (*b*) Alrededor de la mitad de la potencia suministrada al diodo se disipa en forma de energía radiante. Utilizando este hecho, estimar la potencia del diodo láser y compararla con los valores estándar de 3 mW de este tipo de dispositivos. (*c*) Si cada una de las pilas puede producir 20 mA · hora (es decir, puede generar hasta una corriente constante de 20 mA durante una hora aproximadamente antes de descargarse), estimar durante cuánto tiempo se puede utilizar el puntero láser antes de tener que reemplazar las pilas.

CORRIENTE, DENSIDAD DE CORRIENTE, VELOCIDAD DE DESPLAZAMIENTO Y MOVIMIENTO DE CARGAS

31 • Por un conductor de cobre de calibre 10 circula una corriente de 20 A. Considerando que cada átomo tiene un electrón libre, calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones. SSM

32 •• Un anillo no conductor de radio a tiene una carga por unidad de longitud λ. El anillo gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje. Hallar una expresión para la corriente.

33 •• Un conductor de calibre 14 se suelda por un extremo a otro de calibre 10. Por los conductores circula una corriente de 15 A. (*a*) Si ambos conductores son de cobre con un electrón libre por átomo, hallar la velocidad de desplazamiento en cada conductor. (*b*) ¿Cuál es la relación entre los módulos de las densidades de corriente del hilo de calibre 10 y del hilo de calibre 14? SSM

34 •• Un haz de protones con un diámetro de 2 mm producido en un acelerador determinado constituye una corriente de 1 mA. La energía cinética de cada protón es 20 MeV. La densidad de corriente es uniforme en todo el haz. El haz choca contra un blanco metálico y es absorbido por él. (*a*) ¿Cuál es el número de protones n por unidad de volumen en el haz? (*b*) ¿Cuántos protones chocarán contra el blanco en 1 min? (*c*) ¿Cuál será el módulo de la densidad de corriente del haz?

35 •• En uno de los haces de partículas en un acelerador de colisión de protones, éstos se mueven a velocidades muy próximas a la de la luz y la corriente es de 5,00 mA. La densidad de corriente se distribuye uniformemente en todo el haz. (*a*) ¿Cuántos protones hay por unidad de longitud en el haz? (*b*) ¿Cuál es la densidad de protones si el área de la sección transversal del haz es de $1{,}00 \times 10^{-6}$ m^2? (*c*) ¿Cuál es el módulo de la densidad de corriente del haz? SSM

36 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El *viento solar* está formado de protones procedentes del Sol que se mueven en dirección a la Tierra. La densidad numérica de esos protones a una distancia del Sol igual al radio de la órbita de la Tierra es de alrededor de 7,0 protones por centímetro cúbico. Supongamos un satélite que describa una trayectoria en una órbita solar cuyo radio es igual a la órbita terrestre alrededor del Sol. El espectrómetro de masas, que es un instrumento adecuado para medir la composición e intensidad del viento solar, tiene una apertura circular de 25 cm de radio. La velocidad de captación de protones por el espectrómetro es tal que realiza una medida de 85 nA. ¿Cuál es la velocidad de los protones procedentes del viento solar? (Considerar que los protones entran en la apertura del espectrómetro mediante incidencia normal.)

37 •• Un hilo de oro de 7,5 cm de longitud cuya sección transversal es de 0,10 mm de diámetro está conectado a los bornes de una batería. ¿Cuánto tiempo, en valor medio, requerirá un electrón para trasladarse del borne negativo al positivo de la batería yendo por el hilo de oro? Considerar que la resistividad del oro es $2{,}44 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m.

RESISTENCIA, RESISTIVIDAD Y LEY DE OHM

***Nota:* en esta sección, se asume que la resistencia es óhmica (resistencia constante), a no ser que se diga otra cosa.**

38 • Por un conductor de 10 m de longitud y resistencia de 0,2 Ω circula una corriente de 5 A. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial en los extremos del conductor? (*b*) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico del conductor?

39 • Una diferencia de potencial de 100 V produce una corriente de 3 A en una resistencia determinada. (*a*) ¿Cuál es el valor de dicha resistencia? (*b*) ¿Cuál es la corriente cuando la diferencia de potencial es de 25 V? Considerar que el valor de la resistencia permanece constante. SSM

40 • Un trozo de carbono tiene una longitud de 3,0 cm y una sección transversal cuadrada de 0,5 cm de lado. Se mantiene una diferencia de potencial de 8,4 V entre los extremos de su dimensión más larga. (*a*) ¿Cuál es la resistencia del bloque? (*b*) ¿Cuál es la corriente en esta resistencia?

41 • ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de un cable de 30 m de longitud formado por hilo de cobre de calibre 16 por el cual circula una corriente de 5 A? SSM

42 • (*a*) ¿Qué longitud tiene un conductor de cobre de calibre 14 que posee una resistencia de 12 Ω? (*b*) ¿Cuánta corriente transportará si se aplica una diferencia de potencial de 120V entre los extremos del hilo?

43 • Un cilindro de vidrio de 1 cm de longitud posee una resistividad de $10^{12}\ \Omega \cdot$ m. ¿Qué longitud debería tener un hilo de cobre de la misma sección transversal para que sus resistencia fuera igual a la del cilindro de vidrio?

44 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un conductor de cobre de 80 m y de 1 mm de diámetro se une por su extremo con otro conductor de aluminio de 49 m y del mismo diámetro. La máxima corriente en cada uno de ellos es 2 A. (*a*) Hallar el campo eléctrico en cada conductor. (*b*) Calcular la diferencia de potencial aplicada a cada conductor.

45 •• Un cable de longitud 1 m tiene una resistencia de 0,3 Ω. Un segundo hilo del mismo material tiene una longitud 2,00 m y masa igual a la del primer hilo. ¿Cuál es la resistencia del segundo hilo? SSM

46 •• Por un cable de cobre de calibre 10 pueden circular corrientes de hasta 30 A. (*a*) ¿Cuál es la resistencia de 100 m de cable de cobre de calibre 10? (*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en este cable cuando la corriente es de 30 A? (*c*) ¿Cuánto tiempo tarda un electrón en recorrer 100 m de cable cuando la corriente es de 30 A?

47 •• Las aristas de un cubo de cobre miden 2 cm de longitud. ¿Cuál será su resistencia si se convierte en un cable de calibre 14? Considerar que la densidad del cobre no cambia.

48 ••• Determinar la resistencia entre los extremos del semianillo de la figura 25.51. La resistividad del material del anillo es ρ. *Ayuda: para resolver el problema, considerar el semianillo formado por una asociación en paralelo de infinitos semianillos elementales de grosor infinitesimal por los que circula la misma corriente, de tal forma que la corriente total que pasa por el semianillo original es la suma de la de todos los semianillos elementales.*

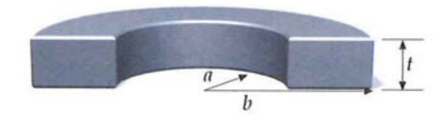


FIGURA 25.51 Problema 48

49 ••• El radio de un cable de longitud L crece linealmente con su longitud según la expresión $r = a + [(b - a)/L]x$, donde x es la distancia al extremo menor de radio a. ¿Cuál es la resistencia de este cable en función de su resistividad ρ, longitud L, radio a y radio b? *Ayuda: considerar el hilo en forma de tronco de cono como una asociación infinita de discos elementales cuya sección transversal es variable que están conectados en serie y por los que se distribuye una densidad de corriente uniforme en todos los puntos de cada disco elemental.* SSM

50 ••• El espacio comprendido entre dos conductores esféricos concéntricos se llena con un material de resistividad $10^9\ \Omega \cdot$ m. Si la corteza interior posee un radio de 1,5 cm y la exterior de 5 cm, ¿cuál es la resistencia entre los conductores? (*Sugerencia: determinar la resistencia de una corteza esférica del material de área $4\pi r^2$ y espesor dr e integrar para determinar la resistencia total de las sucesivas cortezas en serie.*)

51 ••• El espacio comprendido entre dos cilindros metálicos coaxiales de longitud L y radios a y b se llena totalmente de un material de resistividad ρ. (*a*) ¿Cuál es la resistencia entre los dos cilindros? *Ayuda: considerar el material como una asociación en serie de finas capas cilíndricas.* (*b*) Determinar la intensidad de la corriente entre los dos cilindros si $\rho = 30\ \Omega \cdot$ m, $a = 1{,}5$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $L = 50$ cm y se aplica una diferencia de potencial de 10 V entre los dos cilindros.

DEPENDENCIA DE LA RESISTENCIA RESPECTO DE LA TEMPERATURA

52 • Una varilla de tungsteno tiene una longitud de 50 cm y una sección transversal cuadrada de 1,0 mm de lado. (*a*) ¿Cuál es su resistencia a 20 °C? (*b*) ¿Cuál es su resistencia a 40 °C?

53 • ¿A qué temperatura será la resistencia de un conductor de cobre el 10% mayor que cuando está a 20 °C? SSM

54 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Sea un tostador que usa una resistencia de nicrom como elemento calefactor y se necesita determinar la temperatura del nicrom bajo las condiciones operativas. El valor medido de la resistencia cuando calienta a 20 °C es de 80,0 ohms. El valor medido de la corriente inmediatamente después de conectarlo a la red es de 8,70 A, y cuando llega el calentador al régimen estacionario, la intensidad es de 7,50 A. Utilizando estos datos determinar la temperatura máxima a la que llega la resistencia del calentador.

55 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un calentador ambiental eléctrico posee un cable de nicrom con una resistencia de 8 Ω a 20 °C. Aplicando un voltaje de 120 V, la corriente eléctrica calienta el cable de nicrom a 1000 °C. (*a*) ¿Cuál es la corriente inicial que circula por el elemento de calefacción frío? (*b*) ¿Cuál es la resistencia del elemento de calefacción a 1000 °C? (*c*) ¿Cuál es la potencia operativa de este calentador?

56 •• En un circuito electrónico existe una resistencia de nicrom de 10 Ω cableada por un hilo de cobre de longitud 50 cm y diámetro 0,6 mm. (*a*) ¿Qué resistencia adicional introduce el hilo? (*b*) ¿Qué error porcentual se comete al despreciar la resistencia del cableado? (*c*) ¿Qué variación de la temperatura produciría un cambio en la resistencia de nicrom igual a la resistencia del cableado? Asumir que la sección del nicrom es la única cuya temperatura cambia.

57 ••• Un cable con una sección transversal A, longitud L_1, resistividad ρ_1, y coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura α_1, se conecta extremo con extremo a un segundo cable de igual sección, longitud L_2, resistividad ρ_2 y coeficiente de temperatura α_2, de tal forma que por ambos cables pasa la misma corriente. (*a*) Demostrar que si $\rho_1 L_1 \alpha_1 + \rho_2 L_2 \alpha_2 = 0$, la resistencia total R es independiente de la temperatura para pequeños cambios de ésta. (*b*) Si un cable es de carbono y el otro de cobre, hallar la relación de sus longitudes para que R sea, aproximadamente, independiente de la temperatura. SSM

58 ••• La resistividad del tungsteno aumenta aproximadamente en forma lineal desde 56 nΩ · m a 293 K hasta 1,1 μΩ · m a 3500 K. Estimar (*a*) la resistencia y (*b*) el diámetro del filamento de tungsteno usado en una bombilla de 40 W, sabiendo que la temperatura del filamento es de alrededor de 2500 K y que el potencial es de 100 V. Asúmase que la longitud del filamento es constante e igual a 5,0 cm.

59 ••• Una pequeña bombilla utilizada en un práctica de electrónica tiene un filamento de carbono en forma de cilindro cuya longitud es 3 cm y cuyo diámetro es 40 μm. A temperaturas entre 500 K y 700 K, la resistividad del carbono de los filamentos para estas pequeñas bombillas es de alrededor de $3 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m. (*a*) Asumiendo que la bombilla emite radiación como un cuerpo negro perfecto, calcular la temperatura del filamento cuando el voltaje a través de él es de 5 V. (*b*) Un problema que presentan las bombillas con filamento de carbono, a diferencia de las de tungsteno, es que la resistividad del carbono decrece para temperaturas crecientes. Explicar el por qué de este problema.

LA ENERGÍA EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

60 • Se proyecta una resistencia de calefacción de 1 kW para funcionar a 240 V. (*a*) ¿Cuál es dicha resistencia y qué corriente circulará por ella? (*b*) ¿Cuál es la potencia de esta resistencia si funciona a 120 V? Se supone que la resistencia es constante.

61 • Una batería tiene una fem de 12 V. ¿Cuánto trabajo realiza en 5 s si suministra una corriente de intensidad de 3 A?

62 • Una batería con una fem de 12 V tiene una tensión en bornes de 11,4 V cuando proporciona una corriente de 20 A al estárter de un coche. ¿Cuál es la resistencia interna r de la batería?

63 • (*a*) ¿Cuánta potencia suministra la fem de la batería del problema 62 cuando proporciona una corriente de 20 A? (*b*) ¿Qué cantidad de esta potencia se proporciona al estárter? (*c*) ¿En cuánto disminuye la energía química de la batería cuando está suministrando 20 A durante 7 segundos en el arranque de un coche? (*d*) ¿Cuánto calor se desarrolla en la batería cuando suministra 20 A durante 7 segundos? SSM

64 • Una batería de 6 V con una resistencia interna de 0,3 Ω, se conecta a una resistencia variable R. Hallar la corriente y la potencia liberada por la batería cuando R es (*a*) 0 Ω, (*b*) 5 Ω, (*c*) 10 Ω, (*d*) infinita.

65 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una batería de automóvil de 12 V y resistencia interna despreciable puede suministrar una carga total de 160 A · h. (*a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en la batería? (*b*) La batería de un coche es capaz de suministrar una potencia dada durante mucho tiempo cuando el coche está en marcha, pero se descarga con cierta rapidez cuando estando parado el motor tiene los faros encendidos. Asumiendo que la batería es capaz de producir una corriente a velocidad constante hasta descargarse del todo, ¿durante cuánto tiempo podría esta batería suministrar 150 W a un par de faros del automóvil? Considerar que el par de faros necesita una potencia de 150 W.

66 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una vieja mansión posee un circuito eléctrico por el que pasa una corriente de 12,5 A que alimenta a un único aparato, un calentador ambiental para el baño. Un par de cables de cobre de calibre 12 transportan la corriente desde la caja de fusibles al enchufe de la pared a lo largo de una distancia de 30 m. El voltaje en la caja de fusibles es exactamente de 120 V. (*a*) ¿Cuál es el voltaje distribuido al calentador ambiental?

67 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche eléctrico ligero funciona con diez baterías de 12 V. A una velocidad de 80 km/h, la fuerza media de rozamiento es de 1200 N. (*a*) ¿Cuál debe ser la potencia del motor eléctrico para que el coche circule a 80 km/h? (*b*) Si cada batería puede distribuir una carga total de 160 A · h antes de necesitar su recarga, ¿cuál es la carga total en coulombs que pueden suministrar las 10

baterías? (*c*) ¿Cuál es la energía eléctrica total distribuida por las 10 baterías antes de la recarga? (*d*) ¿Qué distancia recorrerá el coche a 80 km/h antes de que las baterías deban ser recargadas? (*e*) ¿Cuál es el coste por kilómetro si el precio de recargar las baterías es de 9 centavos de dólar por kilowatt-hora? SSM

68 ••• Una resistencia de calefacción de 100 W se proyecta para funcionar cuando se le aplican en sus extremos 120 V. (*a*) ¿Cuál es su resistencia y qué corriente circula por ella? (*b*) Demostrar que si la diferencia de potencial a través de la resistencia varía en una cantidad pequeña ΔV, la potencia varía ΔP, siendo $\Delta P/P \approx 2\,\Delta V/V$. (*Sugerencia: aproximar las variaciones por diferenciales considerando que la resistencia es constante.*) (*c*) Hallar la potencia aproximada disipada en la resistencia si la diferencia de potencial disminuye a 115 V. Comparar los resultados con la respuesta exacta.

ASOCIACIONES DE RESISTENCIAS

69 • Si la caída de potencial entre *a* y *b* es de 12 V (figura 25.52), hallar la corriente que circula por cada resistencia. SSM

70 • Si la caída de potencial entre los puntos *a* y *b* (figura 25.53) es de 12,0 V, determinar la corriente en cada resistencia.

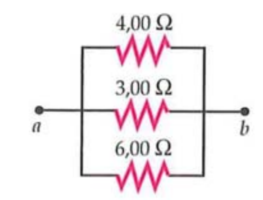


FIGURA 25.52 Problema 69

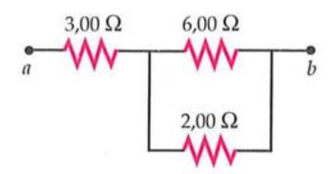


FIGURA 25.53 Problema 70

71 • (*a*) Demostrar que la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* de la figura 25.54 es *R*. (*b*) ¿Qué ocurriría si se añadiese una resistencia *R* entre los puntos *c* y *d*?

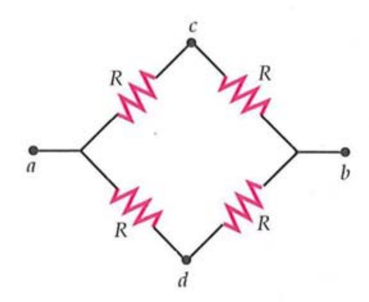


FIGURA 25.54 Problema 71

72 •• La batería de la figura 25.55 tiene una resistencia interna despreciable. Determinar (*a*) la corriente que circula por cada resistencia y (*b*) la potencia distribuida por la batería.

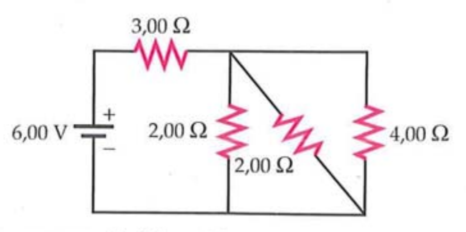


FIGURA 25.55 Problema 72

73 •• Una fuente de alimentación de 5 V tiene una resistencia interna de 50 Ω. ¿Cuál es la menor resistencia que podemos conectar en serie con la fuente para que la caída de potencial entre los extremos de la resistencia externa sea mayor que 4,5 V? SSM

74 •• APLICACIÓN A LA INGENIERÍA Una batería tiene un fem $\mathcal{E}$ y una resistencia interna *r*. Cuando se conecta una resistencia de 5 Ω entre los terminales de la batería, la corriente es 0,5 A. Cuando se sustituye esta resistencia por otra de 11 Ω, la corriente es 0,25 A. Hallar (*a*) la fem $\mathcal{E}$ y (*b*) la resistencia interna *r*.

75 •• (*a*) Calcular la resistencia equivalente entre el punto *a* y el *b* en la figura 25.56. (*b*) Si la diferencia de potencial entre *a* y *b* es 12,0 V, ¿cuál es la corriente en cada resistencia?

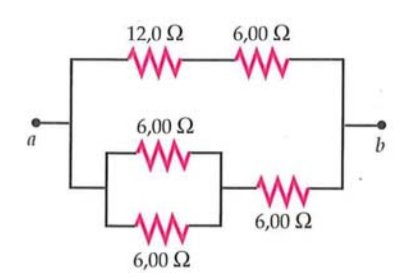


FIGURA 25.56 Problema 75

76 •• (*a*) Hallar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* en la figura 25.57. (*b*) Si la diferencia de potencial entre *a* y *b* es de 12,0 V, calcular la corriente en cada resistencia.

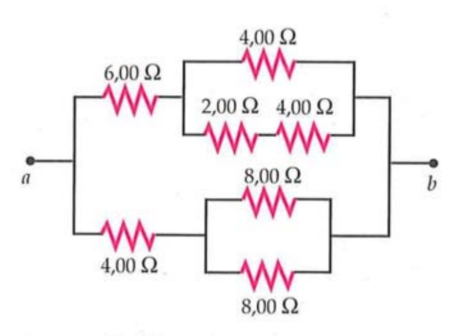


FIGURA 25.57 Problema 76

77 •• Un cable tiene una resistencia de 120 Ω. El cable se corta en N trozos idénticos que se conectan en paralelo. La resistencia de esta asociación en paralelo es 1,88 Ω. Hallar N. SSM

78 •• Una asociación en paralelo de una resistencia de 8 Ω y una resistencia incógnita R se conectan en serie con una resistencia de 16 Ω y una batería. Luego, se conectan las tres resistencias en serie con la misma batería. En ambas asociaciones la corriente a través de la resistencia de 8 Ω es la misma. ¿Cuánto vale la resistencia incógnita R?

79 •• En la red de resistencias mostrada en la figura 25.58, definimos R_{ab} como la resistencia equivalente entre los puntos a y b. Determinar (*a*) R_3, siendo $R_{ab} = R_1$; (*b*) R_2, siendo $R_{ab} = R_3$ y (*c*) R_1, siendo $R_{ab} = R_1$.

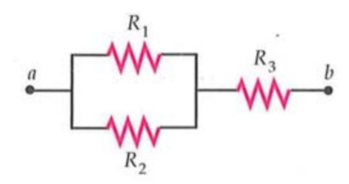


FIGURA 25.58 Problemas 79 y 80

80 •• Comprobar los resultados obtenidos en el problema 79 considerando que (*a*) $R_1 = 4{,}00\ \Omega$, $R_2 = 6{,}00\ \Omega$; (*b*) $R_1 = 4{,}00\ \Omega$, $R_3 = 3{,}00\ \Omega$; y (*c*) $R_2 = 6{,}00\ \Omega$, $R_3 = 3{,}00\ \Omega$.

REGLAS DE KIRCHHOFF

***Nota:* aunque para analizar los circuitos simples, el concepto de resistencia equivalente de las asociaciones de resistencias en serie y derivación es suficiente, utilizar en los problemas de esta sección las reglas de Kirchhoff con objeto de adquirir práctica en su uso.**

81 • En la figura 25.59 la fem es de 6 V y $R = 0{,}5\ \Omega$. La producción de calor por efecto Joule en R es 8 W. (*a*) ¿Cuál es la corriente que circula por el circuito? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de R? (*c*) ¿Cuál es el valor de r? SSM

82 • En el caso del circuito indicado en la figura 25.60 hallar, (*a*) la intensidad de corriente, (*b*) la potencia liberada o absorbida por cada fem y (*c*) la producción de calor por efecto Joule por unidad de tiempo en cada resistencia.

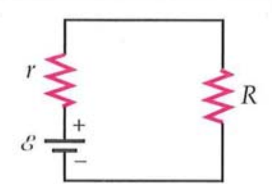


FIGURA 25.59 Problema 81

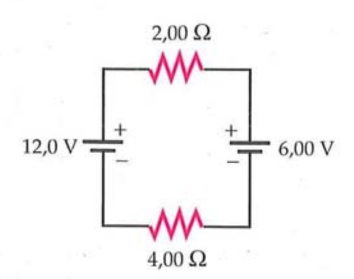


FIGURA 25.60 Problema 82

83 •• APLICACIÓN A LA INGENIERÍA Se conecta una batería de coche prácticamente descargada de 11,4 V de fem y 0,05 Ω de resistencia interna a una resistencia de 2 Ω. Para ayudar a esta batería, se conecta una segunda batería, de 12,6 V de fem y 0,01 Ω de resistencia interna, a los bornes de la primera mediante unos cables adecuados. (*a*) Dibujar un diagrama del circuito. (*b*) Calcular la corriente que circula por cada una de las ramas del mismo. (*c*) Calcular la potencia cedida por la segunda batería y explicar en qué se invierte ésta; suponer para ello que en ambas baterías la fem y la resistencia interna permanecen constantes.

84 •• En el circuito indicado en la figura 25.61, la lectura del amperímetro es la misma cuando ambos interruptores están abiertos que cuando ambos están cerrados. Hallar la resistencia R.

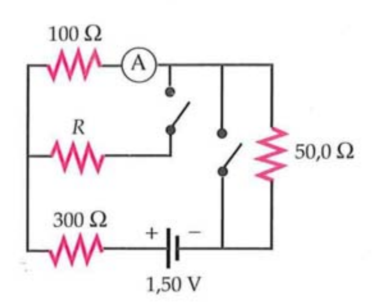


FIGURA 25.61 Problema 84

85 •• En el circuito indicado en la figura 25.62, las baterías tienen una resistencia interna despreciable. Hallar (*a*) la corriente que circula por cada resistencia, (*b*) la diferencia de potencial entre los puntos a y b, y (*c*) la potencia suministrada por cada batería. SSM

86 •• En el circuito indicado en la figura 25.63, las baterías tienen una resistencia interna despreciable. Hallar (*a*) la corriente en cada rama del circuito, (*b*) la diferencia de potencial entre los puntos a y b, y (*c*) la potencia suministrada por cada batería.

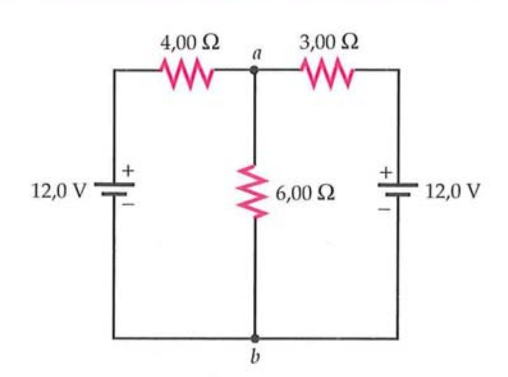


FIGURA 25.62 Problema 85

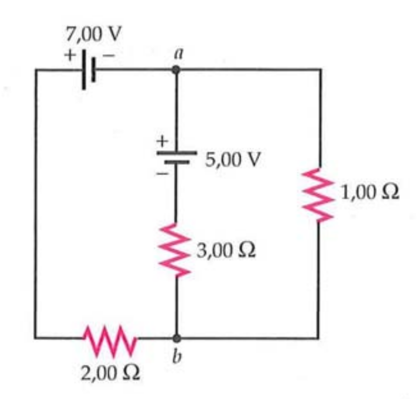


FIGURA 25.63 Problema 86

87 ••• Dos baterías idénticas, con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r, pueden conectarse a través de una resistencia R en serie o en paralelo. ¿Cuál de estas formas de conexión suministra la mayor potencia a R? (*a*) Cuando $R < r$. (*b*) Cuando $R > r$.

88 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El fragmento de circuito mostrado en la figura 25.64 se denomina *divisor de voltaje*. (*a*) Si no se conecta la R_{carga} (resistencia de carga), demostrar que el voltaje de salida es $V_{salida} = VR_2/(R_1 + R_2)$. (*b*) Si $R_1 = R_2 = 10$ kΩ, ¿cuál es el mínimo valor de R_{carga} para que V_{salida} caiga menos del 10% de su valor sin la resistencia de carga? (Como se ve en la figura, V_{salida} se mide con respecto al potencial de tierra.)

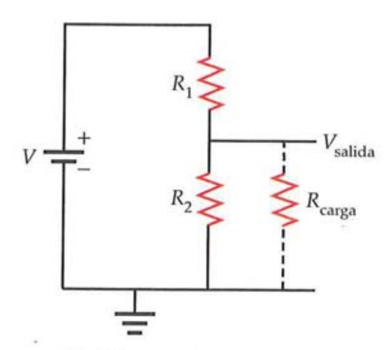


FIGURA 25.64 Problema 88

89 ••• En el circuito de la figura 25.65, calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b. SSM

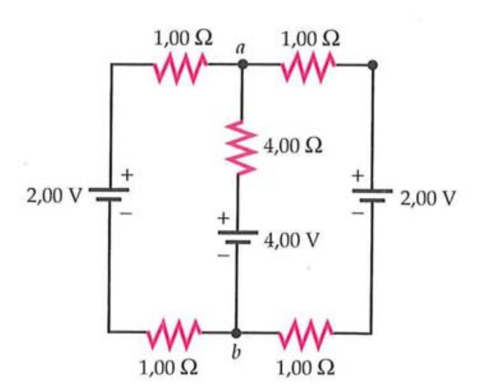


FIGURA 25.65 Problema 89

90 ••• En el circuito indicado en la figura 25.66, hallar (*a*) la corriente que circula por cada resistencia, (*b*) la potencia suministrada por cada fem y (*c*) la potencia disipada en cada resistencia.

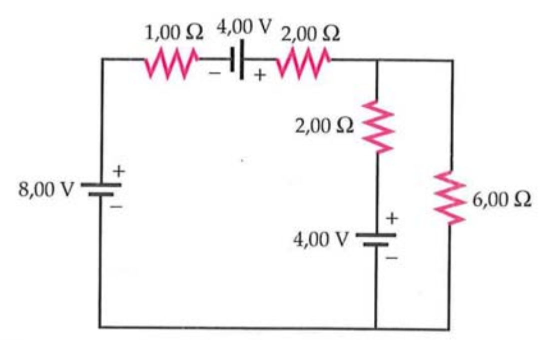


FIGURA 25.66 Problema 90

AMPERÍMETROS Y VOLTÍMETROS

91 •• Un voltímetro digital puede construirse como un voltímetro ideal, de resistencia interna infinita, conectado en paralelo con una resistencia de 10 MΩ. Calcular el voltaje medido por el voltímetro en el circuito de la figura 25.67 cuando (*a*) $R = 1$ kΩ, (*b*) $R = 10$ kΩ, (*c*) $R = 1$ MΩ, (*d*) $R = 10$MΩ y (*e*) $R = 100$ MΩ. (*f*) ¿Cuál es el máximo valor de R si queremos que la diferencia entre el voltaje medido y el *verdadero* (es decir, la caída de tensión sin colocar el voltímetro) sea menor del 10 por ciento? SSM

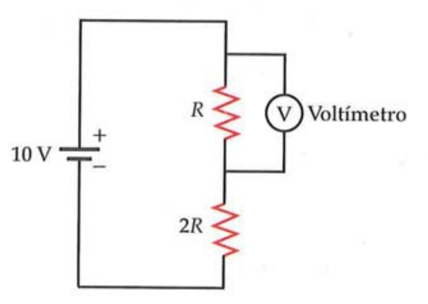


FIGURA 25.67 Problema 91

92 •• Tenemos un galvanómetro que marca el fondo de escala cuando lo atraviesa una intensidad de corriente de 50 μA. Para esa corriente, la caída de potencial entre los bornes del galvanómetro es de 0,25 V. ¿Cuál es la resistencia interna de este aparato?

93 •• En un galvanómetro se llega al final de la escala cuando la corriente que lo atraviesa es de 50,0 μA. Cuando se alcanza esta corriente, la diferencia de potencial entre los bornes del aparato es de 0,250 V. Demostrar que si se desea construir un amperímetro con este galvanómetro, se requiere colocar una resistencia en paralelo. Determinar el valor de esta resistencia para que el final de escala del amperímetro construido sea de 100 m.

94 •• Sea un galvanómetro de Arsonval que señala un final de escala con una corriente de 50,0 μA y una tensión de 0,250 V. Se desea construir con él un voltímetro capaz de medir tensiones hasta de 10,0 V. Demostrar que puede hacerse colocando una resistencia en serie con el galvanómetro y calcular la resistencia requerida.

CIRCUITOS *RC*

95 • En el circuito de la figura 25.68, considerar los siguientes datos: $C = 6{,}00$ μF, $\mathcal{E} = 100$ V, y $R = 500$ Ω. Una vez que se ha realizado el contacto en a y se ha dejado transcurrir suficiente tiempo, se cambia el contacto hacia b. (*a*) ¿Cuál es la carga en la placa de mayor potencial del condensador cuando el interruptor se coloca en posición b? (*b*) ¿Cuál es la corriente un instante de tiempo después de que el interruptor se coloca en posición b? (*c*) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito? (*d*) ¿Cuánta carga contiene la placa de mayor potencial del condensador 6,00 ms después de que el interruptor se colocase en la posición b?

96 • En $t = 0$, el interruptor de la figura 25.68 se coloca en posición b después de que ha estado en la posición a durante un tiempo prolongado. (*a*) ¿Cuánta energía se almacena en el condensador en $t = 0$? (*b*) Para $t > 0$, determinar la energía almacenada en el condensador en función del tiempo. (*c*) Hacer una gráfica de esta energía almacenada en función de t.

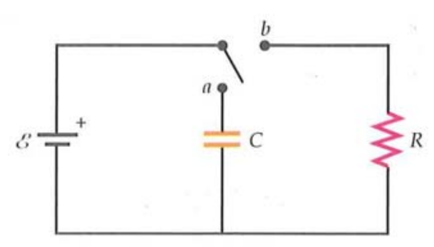


FIGURA 25.68 Problemas 95, 96 y 98

97 •• El circuito de la figura 25.69 tiene una fem de 50,0 V y una capacidad de 2,00 μF. El interruptor S se abre tras haber estado un tiempo prolongado cerrado y, 4,00 segundos después, la caída de tensión en la resistencia es de 20,0 V. Calcular el valor de la resistencia. SSM

98 •• Para el circuito mostrado en la figura 25.68, $C = 0{,}120\ \mu$F y $\mathcal{E} = 100$ V. La diferencia de potencial entre las placas del condensador, cuando el interruptor se coloca en posición *b* después de haber estado en la posición *a* durante tiempo suficiente, es de $\frac{1}{2}\mathcal{E}$. ¿Cuál es el valor de *R*?

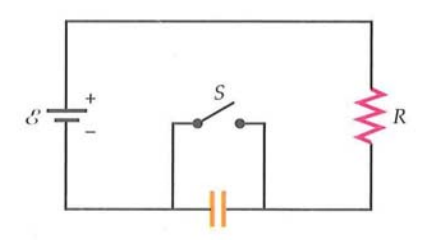


FIGURA 25.69 Problemas 97 y 99

99 •• En la figura 25.69, se conecta una resistencia de 2 MΩ en serie con un condensador de 1,5 μF y una batería de 6,0 V de resistencia interna despreciable. El interruptor ha estado cerrado un tiempo prolongado y ahora se abre. Después de que haya transcurrido un tiempo igual a la constante característica de tiempo del circuito, hallar (*a*) la carga del condensador, (*b*) el ritmo o velocidad con el que está aumentando la carga, (*c*) la corriente, (*d*) la potencia suministrada por la batería, (*e*) la potencia disipada en la resistencia y (*f*) la velocidad a la que está aumentando la energía almacenada en el condensador.

100 •• En estado estacionario, la carga del condensador de 5 μF del circuito de la figura 25.70 es de 1,00 mC. (*a*) Determinar la corriente de la batería. (*b*) Calcular las resistencias R_1, R_2 y R_3.

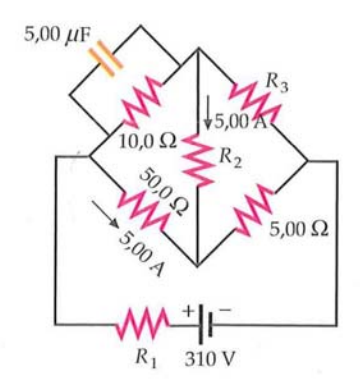


FIGURA 25.70 Problema 100

101 •• Demostrar que la ecuación 25.39 puede modificarse y escribirse de la siguiente forma $\frac{dQ}{\mathcal{E}C - Q} = \frac{dt}{RC}$. Integrar esta ecuación para obtener la ecuación 25.40.

102 •• En la figura 25.71, se cierra el interruptor S habiendo estado abierto durante un tiempo muy prolongado. (*a*) ¿Cuál es el valor inicial de la corriente de la batería justo después de cerrar el circuito? (*b*) ¿Cuál es la corriente de la batería mucho tiempo después de que el interruptor se cierra? (*c*) ¿Cuáles son las cargas en las placas del condensador mucho tiempo después de cerrar el interruptor? (*d*) Si se vuelve a abrir el interruptor, ¿cuáles son las cargas de las placas del condensador mucho tiempo después de que el interruptor se volviera a abrir?

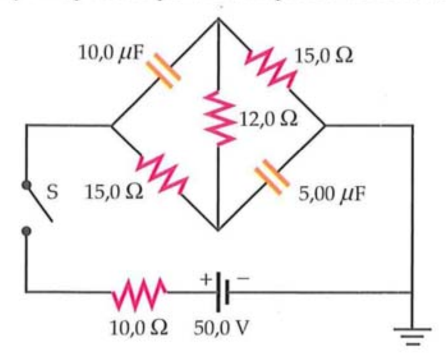


FIGURA 25.71 Problema 102

103 ••• En el circuito de la figura 25.72, el interruptor S estuvo abierto durante bastante tiempo y en el instante $t = 0$ se cierra. (*a*) ¿Cuál es la corriente inicial de la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor S? (*b*) ¿Cuál es la corriente de la batería mucho después de cerrar el interruptor S? (*c*) ¿Cómo varía la intensidad de corriente en la resistencia de 600 Ω en función del tiempo?

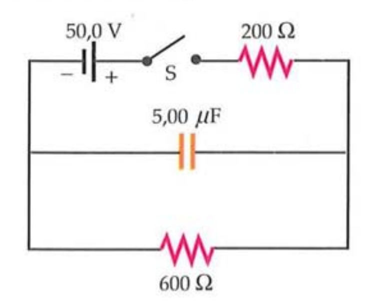


FIGURA 25.72 Problema 103

104 ••• En el circuito de la figura 25.73, el interruptor S estuvo abierto durante bastante tiempo y en el instante $t = 0$ se cierra. (*a*) ¿Cuál es la intensidad inicial de la corriente suministrada por la batería inmediatamente después de haber cerrado el interruptor S? (*b*) ¿Y transcurrido mucho tiempo desde el cierre de S? (*c*) Si el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo y luego se abre, determinar la variación de la intensidad de corriente a través de la resistencia de 600 kΩ en función del tiempo.

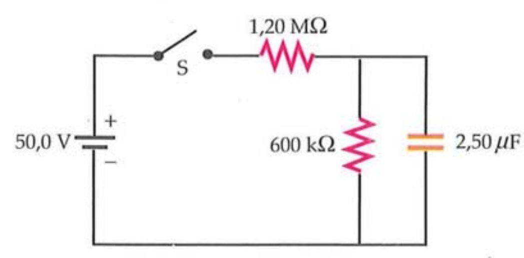


FIGURA 25.73 Problema 104

105 ••• En el circuito de la figura 25.74, el condensador tiene una capacidad de 2,5 μF y la resistencia es de 0,5 MΩ. Antes de cerrar el interruptor, la caída de potencial a través del condensador es de 12 V, como se indica. El interruptor S se cierra en $t = 0$. (*a*) ¿Cuál es la corriente que circula por R inmediatamente después de cerrar S? (*b*) ¿En qué tiempo t el voltaje a través del condensador es de 24 V? SSM

106 ••• Repetir el problema 105 si el condensador se conecta con la polaridad invertida a la mostrada en la figura 25.74.

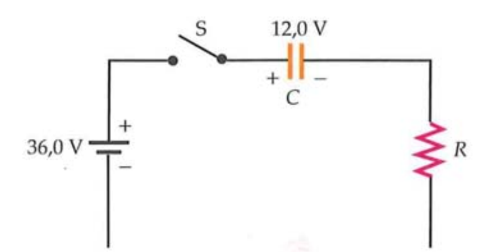


FIGURA 25.74 Problemas 105 y 106

PROBLEMAS GENERALES

107 •• En la figura 25.75, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, y $R_3 = 12\ \Omega$, y la batería es de 12,0 V. Sean I_1, I_2 e I_3 las intensidades de corriente que circulan por cada una de ellas, respectivamente. (*a*) ¿Cuál o cuáles de las desigualdades siguientes se cumplen en el circuito? (1) $I_1 > I_2 > I_3$, (2) $I_2 = I_3$, (3) $I_3 > I_2$, (4) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta. (*b*) Para verificar que las respuestas a los apartados anteriores son correctas calcular estas corrientes. SSM

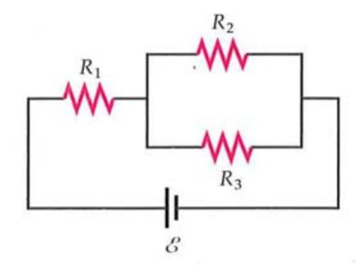


FIGURA 25.75 Problema 107

108 •• Una bombilla de 120 V y 25 W se conecta en serie con otra de 120 V y 100 W, y se coloca una diferencia de potencial de 120 V a través de la asociación. Considerar que las bombillas tienen resistencia constante. (*a*) ¿Qué bombilla deberá brillar más? Razonar la respuesta conceptualmente. *Ayuda: ¿qué quiere decir que una bombilla es de 25 W? ¿Bajo qué condiciones la bombilla disipa 25 W?* (*b*) Determinar la potencia disipada por cada bombilla en las condiciones indicadas en el problema. ¿Son congruentes los resultados con la respuesta que se debe dar en el apartado (*a*)?

109 •• El circuito de la figura 25.76 es un *puente de Wheatstone* de hilo. Se utiliza para determinar una resistencia incógnita R_x en función de las resistencias conocidas R_1, R_2 y R_0. Las resistencias R_1 y R_2 comprenden un cable de 1 m de longitud. El punto *a* es un contacto deslizante que se mueve a lo largo del cable, modificando estas resistencias. La resistencia R_1 es proporcional a la distancia desde el extremo izquierdo del cable (0 cm) al punto *a*, y R_2 es proporcional a la distancia desde el punto *a* al extremo derecho del cable (100 cm). La suma de R_1 y R_2 permanece constante. Cuando los puntos *a* y *b* están a igual potencial, no pasa corriente por el galvanómetro y se dice que el puente está equilibrado. (Como el galvanómetro se utiliza para detectar la ausencia de corriente, se le llama *detector de cero*.) Si la resistencia fija vale $R_0 = 200\ \Omega$, hallar la resistencia incógnita R_x si (*a*) el puente se equilibra en la marca de 18 cm, (*b*) el puente se equilibra en la marca de 60 cm y (*c*) el puente se equilibra en la marca de 95 cm.

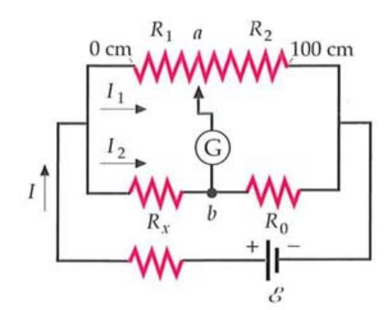


FIGURA 25.76 Problemas 109 y 110

110 •• En el puente Wheatstone del problema 109, si $R_0 = 200\ \Omega$, el puente se equilibra en la marca de 98 cm. (*a*) ¿Cuál es la resistencia incógnita? (*b*) ¿Qué influencia tendría un error de 2 mm sobre el valor medido de la resistencia incógnita? (*c*) ¿Cómo debería variarse R_0 de modo que esta resistencia incógnita diese un punto de equilibrio más próximo a la marca de 50 cm? (*d*) Si el equilibrio se consigue en 50,0 cm, ¿cuál es el porcentaje de error en la medida de R_x si existe un error de 2,00 mm en la localización del punto de equilibrio?

111 •• Un acelerador produce un haz de protones de 3,50 μA de energía 60 MeV. Los protones chocan y se detienen dentro de un blanco de cobre de 50 g dentro de la cámara de vacío. Un investigador del acelerador está preocupado porque el blanco está demasiado caliente y alguna soldadura puede romperse, y por ello pretende: (*a*) Determinar el número de protones que chocan contra el blanco por segundo. (*b*) Calcular la energía depositada en el blanco por segundo. (*c*) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que la temperatura del blanco se incremente en 300 °C? (Despreciar el calor emitido por el blanco.) SSM

112 •• La correa de un acelerador de Van de Graaff transporta una densidad de carga superficial de 5 mC/m^2. La correa tiene una anchura de 0,5 m y se mueve a 20 m/s. (*a*) ¿Qué corriente transporta? (*b*) Si esta carga ha de elevarse hasta un potencial de 100 kV, ¿cuál es el menor valor de la potencia del motor necesario para accionar la corriente?

113 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Los grandes electroimanes convencionales utilizan la refrigeración con agua para evitar el excesivo calentamiento de las bobinas. Uno de estos electroimanes utiliza una corriente de 100 A cuando se aplica un voltaje de 240 V a los terminales de las bobinas de excitación. Para refrigerar las bobinas, se hace circular agua a una temperatura inicial de 15 °C a través de ellas. ¿Cuántos litros por segundo deben pasar a través de las bobinas para que su temperatura no exceda los 50 °C?

114 ••• (*a*) Demostrar que un condensador con dieléctrico cuya resistencia sea finita puede analizarse como si fuera un condensador con resistencia infinita en paralelo con una resistencia. (*b*) Demostrar que la constante de tiempo de la descarga del condensador es $\tau = \kappa\mathcal{E}_0\rho$. (Para simplificar, considerar que el condensador es de placas paralelas y que está completamente lleno de dieléctrico.) (*c*) La mica tiene una constante dieléctrica $\kappa = 5$ y una resistividad $\rho = 9 \times 10^{13}\ \Omega \cdot$ m. Calcular el tiempo necesario para que la carga de un condensador con dieléctrico de mica decrezca el 10% de su valor inicial.

115 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En la figura 25.77, se muestra la base del circuito de barrido utilizado en un osciloscopio. S es un interruptor electrónico que cierra el circuito siempre que el potencial entre sus terminales alcanza un valor V_c y lo abre cuando el potencial ha caído

a 0,2 V. La fem $\mathcal{E}$, mucho mayor que V_c, carga el condensador C a través de una resistencia R_1. La resistencia R_2 representa la resistencia pequeña, pero finita, del interruptor electrónico. En un circuito típico, $\mathcal{E} = 800$ V, $V_c = 4{,}2$ V, $R_2 = 0{,}001\ \Omega$, $R_1 = 0{,}5$ MΩ y C = 0,02 mF. (*a*) ¿Cuál es la constante de tiempo para la carga del condensador C? (*b*) Demostrar que durante el tiempo necesario para que se alcance el potencial crítico $V_c = 4{,}2$ V entre los bornes de S, el voltaje a través del condensador crece casi linealmente con el tiempo. (*Sugerencia: utilizar el desarrollo de la función exponencial para valores pequeños del exponente.*) (*c*) ¿Cuál debería ser el valor de R_1 para que C se cargara de 0,2 V a 4,2 V en 0,1 s? (*d*) ¿Cuánto tiempo transcurre durante la descarga de C a través del interruptor S? (*e*) ¿A qué ritmo se disipa la potencia en la resistencia R_1 y en la resistencia del interruptor?

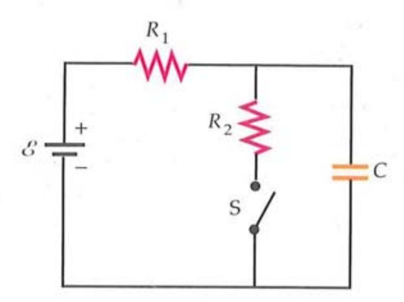


FIGURA 25.77 Problema 115

116 ••• En el circuito de la figura 25.78, $R_1 = 2$ MΩ, $R_2 = 5$ MΩ y $C = 1{,}0\ \mu$F. En el tiempo $t = 0$, el interruptor S está cerrado y en $t = 2{,}0$ s está abierto. (*a*) Representar gráficamente el voltaje a través de *C* y la corriente a través de R_2 entre $t = 0$ y $t = 10$ s. (*b*) Determinar el voltaje a través del condensador en los tiempos $t = 2$ s y $t = 8$ s.

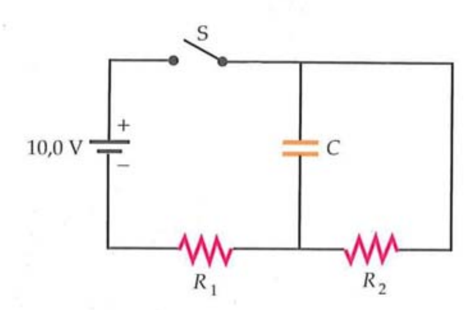


FIGURA 25.78 Problema 116

117 ••• Dos baterías de fem $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ y de resistencias internas r_1 y r_2 se conectan en paralelo. Demostrar que si una resistencia *R* se conecta en paralelo con esta asociación, la resistencia de carga óptima (el valor de *R* para la cesión de una potencia máxima) es $R = r_1 r_2/(r_1 + r_2)$.

118 ••• Se conectan dos condensadores C_1 y C_2, una resistencia y una batería ideal de voltaje V_0, tal como indica la figura 25.79. El interruptor estaba inicialmente en posición *a* y ambos condensadores estaban sin carga. Se giró el interruptor a la posición *b* y se dejó bastante tiempo en esa posición. Finalmente, para $t = 0$ se vuelve a la posición *a*. (*a*) Comparar cuantitativamente la energía total almacenada en los dos condensadores a $t = 0$ y mucho tiempo después. (*b*) Determinar la corriente a través de *R* como función de *t* para $t > 0$. (*c*) Hallar la energía

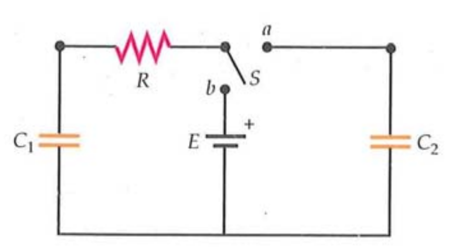


FIGURA 25.79 Problema 118

disipada por la resistencia como una función de *t* para $t > 0$. (*d*) Determinar la energía total disipada en la resistencia después de $t = 0$ y compararla con la pérdida de energía almacenada calculada en el apartado (*a*).

119 ••• (*a*) Calcular la resistencia equivalente, en función de *R*, entre los puntos *a* y *b* para el circuito de resistencias en forma de escalera infinita mostrada en la figura 25.80, asumiendo que todas las resistencias son idénticas, es decir, $R = R_1 = R_2$. (*b*) Repetir la parte (*a*) considerando que R_1 es diferente de R_2 y expresar el resultado en función de R_1 y R_2. (*c*) Comprobar los resultados demostrando que los resultados de la parte (*b*) concuerdan con los de la parte (*a*) si sustituimos R_1 y R_2 por *R*.

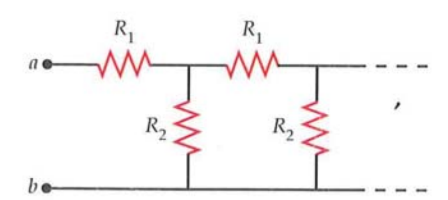


FIGURA 25.80 Problema 119

120 ••• La gráfica del voltaje en función de la intensidad para un diodo Esaki se muestra en la figura 25.81. (*a*) Hacer una gráfica de la resistencia diferencial del diodo en función del voltaje. La resistencia diferencial del circuito viene dada por la expresión $R_d = dV/dI$, donde *V* es la caída de tensión a través del dispositivo e *I* es la corriente en él. (*b*) ¿En qué valor del voltaje la resistencia diferencial pasa a ser negativa? (*c*) ¿Cuál es la máxima resistencia diferencial del diodo en el rango mostrado y para qué voltaje ocurre? (*d*) ¿Hay valores en el rango de voltaje mostrado en la figura donde el diodo tiene resistencia diferencial nula? Si los hay, ¿para qué valores del potencial ocurre esto?

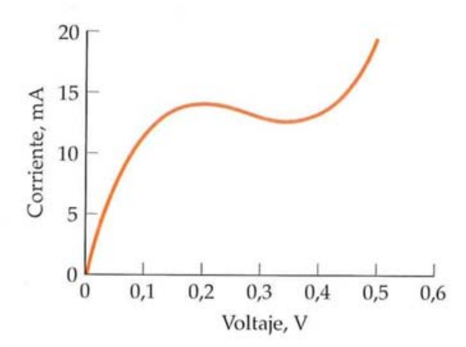
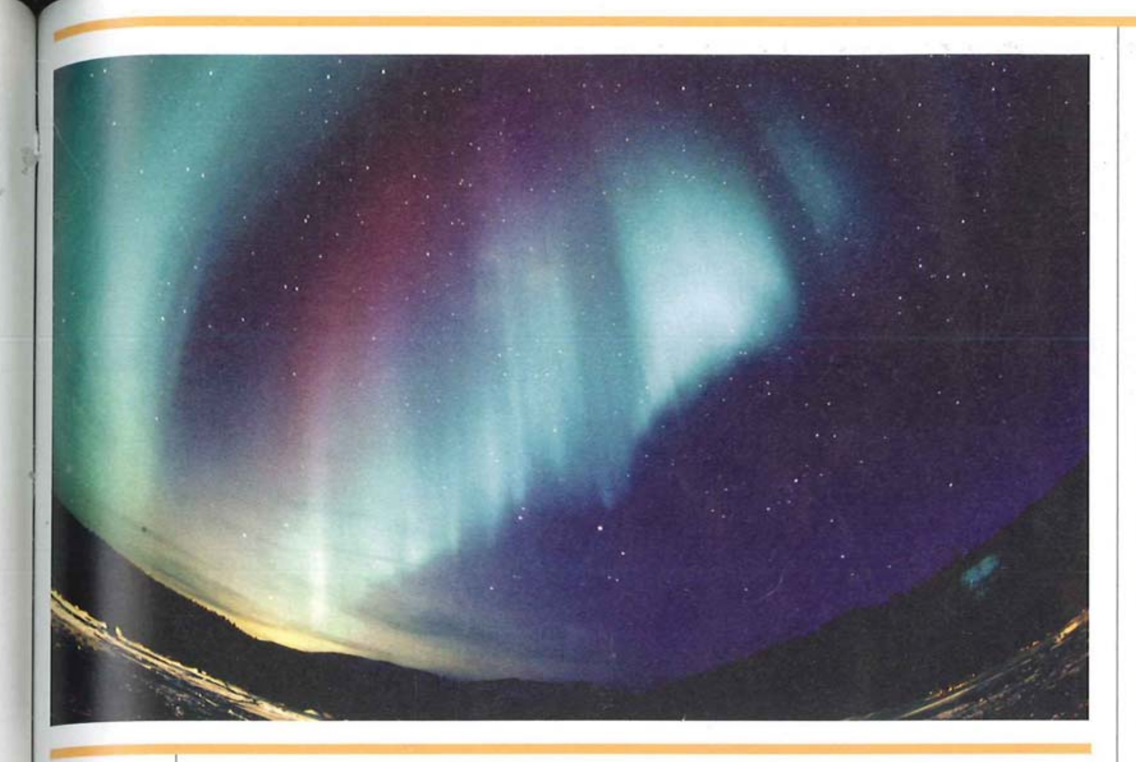
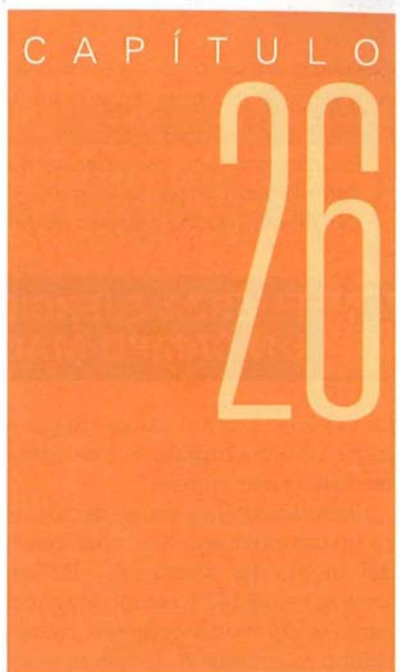


FIGURA 25.81 Problema 120





LA AURORA BOREAL SURGE CUANDO PARTÍCULAS CARGADAS PROCEDENTES DE LAS REACCIONES DE FUSIÓN NUCLEAR QUE TIENEN LUGAR EN EL SOL, EL LLAMADO *VIENTO SOLAR*, SON ATRAPADAS POR EL CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE. *(Atlas Photo Bank/Photo Researchers, Inc.)*

El campo magnético

? ¿Cómo actúa el campo magnético terrestre sobre las partículas subatómicas? (Véase el ejemplo 26.1.)

Hace ya más de 2000 años que los griegos sabían que cierto mineral (llamado ahora magnetita) tenía la propiedad de atraer piezas de hierro, y existen referencias escritas del uso de imanes en la navegación que datan del siglo XII.

En 1269, Pierre de Maricourt descubrió que si una aguja se deja libremente en distintas posiciones sobre un imán natural esférico, se orienta a lo largo de líneas que, rodeando el imán, pasan por puntos situados en extremos opuestos de la esfera. Estos puntos fueron llamados polos del imán. Posteriormente, muchos experimentadores observaron que todo imán, cualquiera que sea su forma, posee dos polos, llamados polo norte y polo sur, en donde la fuerza ejercida por el imán tiene su máxima intensidad. También se observó que los polos iguales de dos imanes se repelen entre sí y los polos distintos se atraen mutuamente.

En 1600, William Gilbert descubrió que la Tierra es un imán natural con polos magnéticos próximos a los polos geográficos norte y sur. Como el polo norte de la aguja de una brújula apunta al polo sur de un imán, lo que llamamos polo norte de la Tierra es realmente un polo sur magnético, como se ilustra en la figura 26.1. De esta forma, los polos norte y sur de un imán se definen como aquellos polos que marcan el norte y sur geográficos, respectivamente.

Aunque las cargas eléctricas y los polos magnéticos son semejantes en muchos aspectos, hay una diferencia importante: los polos magnéticos siempre se presentan por parejas. Si se rompe un imán por la mitad, aparecen polos iguales y opuestos a cada lado del punto de rotura; es decir, aparecen dos imanes, cada uno con un polo norte y un polo sur. A lo largo del tiempo se ha especulado mucho sobre la posible

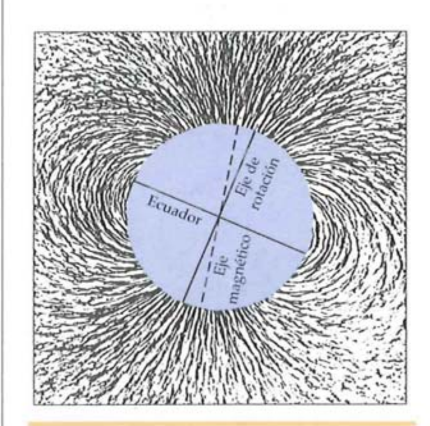
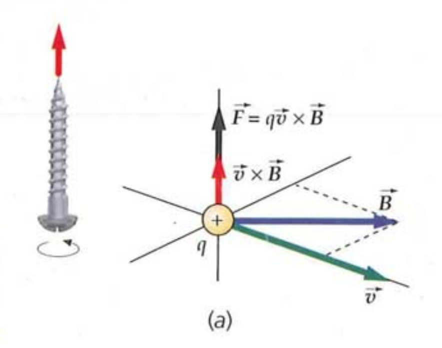


FIGURA 26.1 Las líneas de campo magnético de la Tierra, indicadas por limaduras de hierro alrededor de una esfera imantada de modo uniforme. Las líneas de campo salen del polo magnético norte, que está próximo al polo sur geográfico y entran en el polo magnético sur, que esta próximo al polo norte geográfico.

existencia de un polo magnético aislado, y más recientemente se ha realizado un considerable esfuerzo experimental a fin de localizar tal objeto. Hasta ahora no existe una evidencia concluyente sobre la existencia de un polo magnético aislado.

En este capítulo, consideraremos sólo los efectos de un campo magnético determinado sobre cargas móviles y sobre cables portadores de corrientes. Las fuentes de los campos magnéticos serán el objeto del capítulo siguiente.



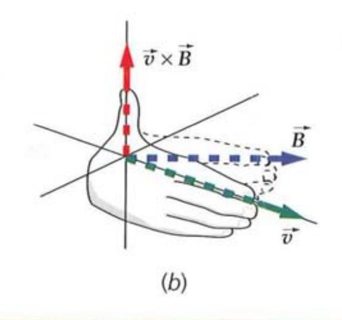


FIGURA 26.2 Regla de la mano derecha para determinar la dirección y el sentido de la fuerza magnética ejercida sobre una carga que se mueve en un campo magnético. Si q es positiva, $\vec{F}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v} \times \vec{B}$. (*a*) El producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ es perpendicular a ambos $\vec{v}$ y $\vec{B}$, y su sentido es el que correspondería a un tornillo que avanza cuando gira en el mismo sentido de $\vec{v}$ hacia $\vec{B}$. (*b*) Si los dedos de la mano derecha señalan la dirección de $\vec{v}$ de tal modo que pueden curvarse hacia $\vec{B}$, el pulgar señala la dirección de F.

26.1 FUERZA EJERCIDA POR UN CAMPO MAGNÉTICO

La existencia de un campo magnético $\vec{B}$ en un punto del espacio puede demostrarse con una brújula. Si existe un campo magnético, la aguja se alineará en la dirección de este campo.*

Experimentalmente, se demuestra que cuando una carga q posee la velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético, aparece una fuerza que es proporcional a q y a v, y al seno del ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Sorprendentemente, la fuerza es perpendicular a ambos, velocidad y campo magnético. Estos resultados experimentales pueden resumirse del modo siguiente: cuando una carga q se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza magnética $\vec{F}$ que actúa sobre la carga es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{26.1}$$

FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA MÓVIL

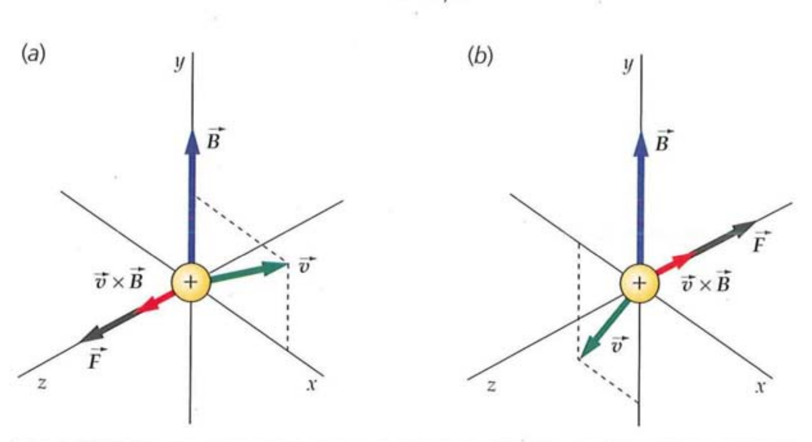
Como $\vec{F}$ es perpendicular a ambos, $\vec{v}$ y $\vec{B}$, resulta ser perpendicular al plano definido por estos dos vectores. La dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ viene dada por la regla de la mano derecha como el eje de rotación cuando $\vec{v}$ gira hacia $\vec{B}$, como se muestra en la figura 26.2. Si q es positiva, $\vec{F}$ está dirigida en el mismo sentido que $\vec{v} \times \vec{B}$.

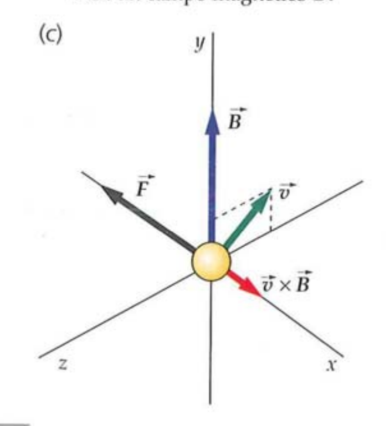
En la figura 26.3, se muestran algunos ejemplos de la dirección de las fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles cuando el vector campo magnético $\vec{B}$ se encuentra en la dirección vertical hacia arriba. Obsérvese que la dirección de cualquier campo magnético particular $\vec{B}$ puede encontrarse experimentalmente midiendo $\vec{F}$ y $\vec{v}$ para varias velocidades en diferentes direcciones y aplicando después la ecuación 26.1.

La ecuación 26.1 define el **campo magnético** $\vec{B}$ en función de la fuerza ejercida sobre una carga móvil. La unidad del SI del campo magnético es el **tesla** (T). Una carga de un coulomb que se mueve con una velocidad de un metro por segundo perpendicular a un campo magnético de un tesla, experimenta una fuerza de un newton:

$$1\,\text{T} = 1\frac{\text{N}}{\text{C}\cdot\text{m/s}} = 1\,\text{N/(A}\cdot\text{m)} \tag{26.2}$$

FIGURA 26.3 Dirección y sentido de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$.





* Las agujas de una brújula se colocan de tal forma que permanecen horizontales. Esto da lugar a que la aguja de la brújula se alinee con la componente horizontal del campo magnético. Una aguja de una brújula suspendida sin restricción de movimiento se alinearía con el campo magnético.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 26.1

La dirección de cualquier campo magnético $\vec{B}$ se define por aquella dirección con la que se alinea el polo norte de la aguja de una brújula. Si la dirección del campo magnético $\vec{B}$ se alineara con la dirección que toma el polo sur de una brújula, ¿seguiría siendo válida la regla de la mano derecha en la determinación de la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una carga positiva o, por el contrario, se tendría que considerar una regla similar pero de la mano izquierda? Explique su respuesta.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 26.2

La partícula en la figura 26.3*b*: (*a*) tiene carga positiva, (*b*) negativa, (*c*) no queda determinada la carga. Explicar las respuestas.

Pero esta unidad es bastante grande. El campo magnético terrestre es algo menor que 10^{-4} T en la superficie de la Tierra. Los campos magnéticos próximos a potentes imanes permanentes suelen ser de 0,1 a 0,5 T y los grandes electroimanes de laboratorio y de la industria producen campos de 1 a 2 T. Campos magnéticos superiores a 10 T son muy difíciles de producir, pues las fuerzas magnéticas resultantes romperían los imanes en pedazos o los aplastarían. Una unidad usada habitualmente, deducida del sistema cgs, es el **gauss** (G), que está relacionada con el tesla por

$$1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T} \qquad 26.3$$

DEFINICIÓN: GAUSS

Como normalmente se utiliza el gauss como unidad del campo magnético, que no es una unidad del SI, no debe olvidarse la conversión de esta magnitud a teslas cuando se realizan los cálculos.

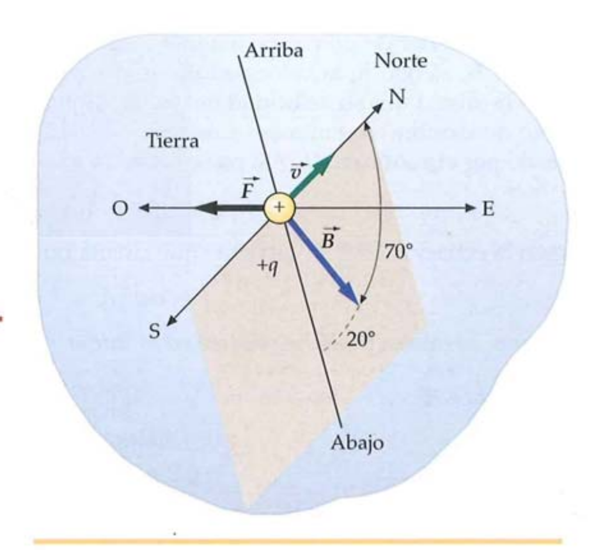


FIGURA 26.4

Ejemplo 26.1 Fuerza sobre un protón que se dirige hacia el norte

El campo magnético en un punto de la superficie de la Tierra tiene un valor de 0,6 G y está dirigido hacia abajo y, en el caso del hemisferio norte, hacia el norte, formando un ángulo de 70° aproximadamente con la horizontal, como indica la figura 26.4. (El módulo, dirección y sentido del campo magnético terrestre varía de un lugar a otro. Los datos que aquí se dan corresponden aproximadamente a la parte central de los Estados Unidos.) Un protón ($q = +e$) se mueve horizontalmente en dirección norte con velocidad $v = 10$ Mm/s = 107 m/s. Calcular la fuerza magnética que actúa sobre el protón (*a*) utilizando $F = qvB \operatorname{sen}\theta$ y (*b*) expresando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, y calculando $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

PLANTEAMIENTO Sean x e y las direcciones este y norte, respectivamente, y sea z la dirección hacia arriba (figura 26.5). El vector velocidad está en la dirección y.

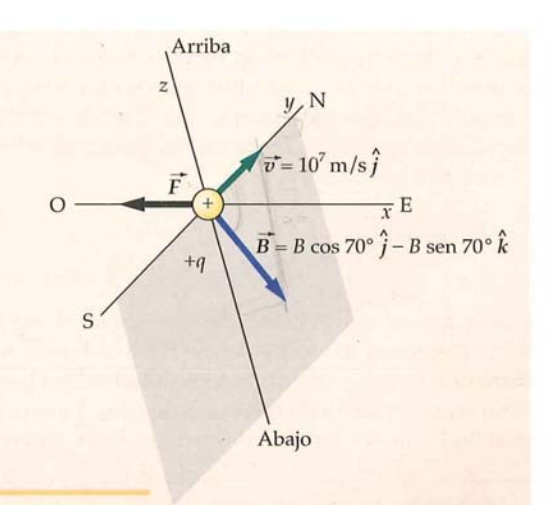


FIGURA 26.5

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular $F = qvB\operatorname{sen}\theta$, siendo $\theta = 70°$. En la figura 26.4 podemos ver que la dirección de la fuerza es hacia el oeste:

$$F = qvB \operatorname{sen} 70°$$
$$= (1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C})(10 \times 10^{6}\text{ m/s})(0{,}6 \times 10^{-4}\text{ T})(0{,}94)$$
$$= \boxed{9{,}0 \times 10^{-17}\text{ N}}$$

(*b*) 1. La fuerza magnética es el producto vectorial de $q\vec{v}$ por $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

2. Expresar $\vec{v}$ y $\vec{B}$ en función de sus componentes:

$$\vec{v} = v_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

3. Escribir $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ en función de estas componentes:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_y\hat{j}) \times (B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$= qv_yB_y(\hat{j} \times \hat{j}) + qv_yB_z(\hat{j} \times \hat{k}) = qv_yB_z\hat{i}$$

4. Hallar el valor de $\vec{F}$:

$$\vec{F} = qv(-B\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{i}$$
$$= -(1{,}6 \times 10^{-19}\mathrm{C})(10^7\ \mathrm{m/s})(0{,}6 \times 10^{-4}\ \mathrm{T})\mathrm{sen}\,70°\ \hat{i}$$
$$= \boxed{-9{,}0 \times 10^{-17}\ \mathrm{N}\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN El resultado de la parte (*a*) es igual al módulo del obtenido en la parte (*b*).

OBSERVACIÓN La dirección de $\hat{i}$ es hacia el este, de modo que la fuerza está dirigida hacia el oeste como indica la figura 26.5.

PROBLEMA PRÁCTICO 26.1 Determinar la fuerza que actúa sobre un protón que se mueve con velocidad $\vec{v} = 4 \times 10^6\ \mathrm{m/s}\ \hat{i}$ en un campo magnético $\vec{B} = 2{,}0\ \mathrm{T}\hat{k}$.

Cuando por un cable situado en el interior de un campo magnético circula una corriente, existe una fuerza que se ejerce sobre el conductor que es simplemente la suma de las fuerzas magnéticas sobre las partículas cargadas cuyo movimiento produce la corriente. La figura 26.6 muestra un segmento de alambre corto de área de sección transversal A y de longitud L por el cual circula una corriente I. Si el alambre está en el interior de un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza magnética sobre cada carga es $q\vec{v}_d \times \vec{B}$, siendo $\vec{v}_d$ la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga, que es la misma que su velocidad media. El número de cargas en el interior del segmento de alambre es el número n de cargas que hay por unidad de volumen multiplicado por el volumen AL. Así pues, la fuerza total sobre el segmento del cable es

$$\vec{F} = (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAL$$

Según la ecuación 25.3, la corriente que circula por el hilo es

$$I = nqv_dA$$

Así pues, la fuerza puede escribirse en la forma

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \qquad 26.4$$

FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN SEGMENTO DE ALAMBRE PORTADOR DE CORRIENTE

donde $\vec{L}$ es un vector cuyo módulo es la longitud del hilo y cuya dirección es paralela a la corriente, en el mismo sentido.* Para la corriente en la dirección x positiva y el campo magnético en el plano xy mostrado en la figura 26.7, la fuerza sobre el alambre está dirigida a lo largo del eje z positivo.

En la ecuación 26.4 se considera que el segmento de cable es recto y que el campo magnético no varía en toda su longitud. Se generaliza fácilmente el caso de un conductor de forma arbitraria en el interior de un campo magnético cualquiera. Así, si se elige un segmento de hilo suficientemente pequeño $d\vec{\ell}$, la fuerza que actúa sobre dicho segmento, $d\vec{F}$, viene dada por

$$d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad 26.5$$

FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN ELEMENTO DE CORRIENTE

donde $\vec{B}$ es el vector campo magnético en el segmento. La magnitud $I\,d\vec{\ell}$ se denomina **elemento de corriente**. Se halla la fuerza total que actúa sobre el conductor sumando (o integrando) respecto a todos los elementos de corriente y utilizando el campo apropiado B en cada uno de ellos. La ecuación 26.5 es la misma que la ecuación 26.1 con el elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$ sustituyendo a $q\vec{v}$.

FIGURA 26.6 Segmento de alambre de longitud L que transporta una corriente de intensidad I. Si el alambre está en un campo magnético, se producirá una fuerza sobre cada portador de carga, dando lugar a una fuerza resultante sobre el alambre.

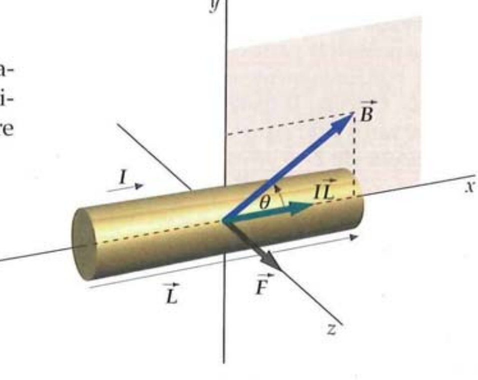


FIGURA 26.7 Fuerza magnética sobre un segmento de alambre portador de corriente en un campo magnético. La corriente lleva la dirección x, y el campo magnético está en el plano xy, y forma un ángulo θ con el eje x positivo. La fuerza $\vec{F}$ está dirigida en el sentido positivo de z, perpendicular a ambos, $\vec{B}$ y $\vec{L}$. Su módulo es $ILB\,\mathrm{sen}\,\theta$.

* La dirección de la corriente viene definida por la del vector densidad de corriente $\vec{J}$.

Del mismo modo que el campo eléctrico $\vec{E}$ puede representarse mediante líneas de campo eléctrico, también el campo magnético $\vec{B}$ puede ser representado mediante **líneas de campo magnético**. En ambos casos, la dirección y el sentido del campo vienen indicados por la dirección y el sentido de las líneas de campo y el módulo del campo por su densidad. Existen, sin embargo, dos importantes diferencias entre las líneas del campo eléctrico y las líneas del campo magnético:

1. Las líneas de campo eléctrico poseen la dirección de la fuerza eléctrica actuando sobre una carga positiva, mientras que las líneas de campo magnético son perpendiculares a la fuerza magnética sobre una carga móvil.
2. Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas; las líneas de campo magnético son cerradas.

La figura 26.8 muestra las líneas de campo magnético tanto fuera como dentro de una barra imanada.

> **!** No crea que las líneas del campo magnético comienzan en el polo sur y acaban en el norte. En realidad, ni empiezan ni acaban, sino que entran en el imán por un extremo (polo sur) y salen del imán por el otro (polo norte).

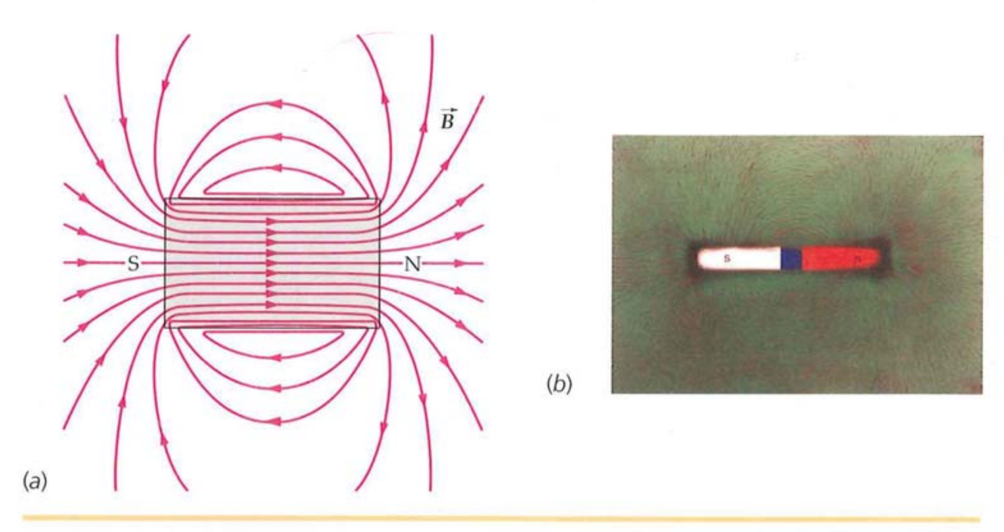


FIGURA 26.8 (*a*) Líneas de campo magnético dentro y fuera de una barra magnética. Las líneas emergen del polo norte y entran en el polo sur, pero carecen de principio y de fin. Forman circuitos cerrados. (*b*) Líneas de campo magnético exteriores a una barra imanada, visualizadas por limaduras de hierro. *(© 1995 Tom Pantages.)*

Ejemplo 26.2 Fuerza sobre un cable recto

Un segmento de cable de 3 mm de longitud transporta una corriente de 3 A en la dirección $+x$. Se encuentra en el interior de un campo magnético de módulo 0,02 T cuya dirección es paralela al plano xy, formando un ángulo de 30° con el eje $+x$, como indica la figura 26.9. ¿Cuál es la fuerza magnética ejercida sobre el segmento de cable?

FIGURA 26.9

PLANTEAMIENTO La fuerza magnética se encuentra en la dirección de $\vec{L} \times \vec{B}$, que como vemos en la figura 26.9 está en la dirección $+z$.

SOLUCIÓN

1. La fuerza magnética viene dada por la ecuación 26.4:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = ILB \operatorname{sen} 30^\circ\,\hat{k}$$
$$= (3{,}0\ \text{A})(0{,}0030\ \text{m})(0{,}020\ \text{T})(\operatorname{sen} 30^\circ)\hat{k}$$
$$= \boxed{9{,}0 \times 10^{-5}\ \text{N}\hat{k}}$$

COMPROBACIÓN La fuerza es perpendicular al hilo, tal como era de esperar.

Ejemplo 26.3 Fuerza sobre un cable curvado

Un alambre curvado en forma semicircular de radio R se encuentra en el plano xy. Por él circula una corriente I del punto a al punto b, como se indica en la figura 26.10. Un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{k}$ está dirigido perpendicularmente al plano de la espira. Determinar la fuerza que actúa sobre la parte semicircular del alambre.

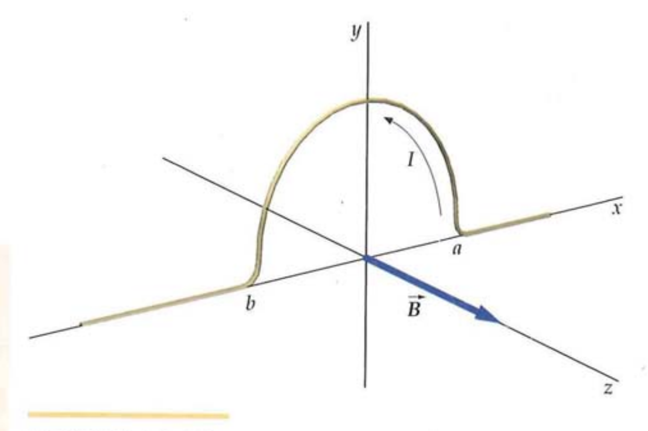


FIGURA 26.10

PLANTEAMIENTO En la figura 26.11 se muestra la fuerza $d\vec{F}$ ejercida sobre un segmento del alambre semicircular. Como vemos, esta fuerza está en el plano xy. Para determinar la fuerza total expresaremos las componentes x e y de $d\vec{F}$ en función de θ e integraremos separadamente de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

SOLUCIÓN

1. Expresar la fuerza $d\vec{F}$ que actúa sobre un elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$:
$$d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

2. Expresar $d\vec{\ell}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$:
$$d\vec{\ell} = -d\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + d\ell\,\cos\theta\,\hat{j}$$

3. Calcular $I\,d\vec{\ell}$ utilizando $d\ell = R\,d\theta$ y $\vec{B} = B\hat{k}$:
$$d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$$
$$= I(-R\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,\hat{i} + R\cos\theta\,d\theta\,\hat{j}) \times B\hat{k}$$
$$= IRB\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,\hat{j} + IRB\cos\theta\,d\theta\,\hat{i}$$

4. Integrar cada componente de $d\vec{F}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$:
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = IRB\hat{i}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + IRB\hat{j}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$
$$= IRB\hat{i}(0) + IRB\hat{j}(2) = \boxed{2IRB\hat{j}}$$

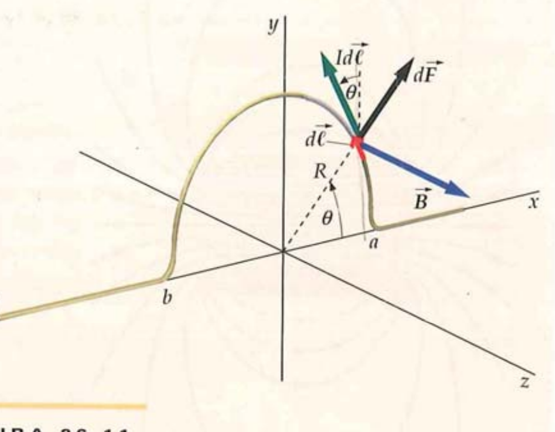


FIGURA 26.11

COMPROBACIÓN Por simetría puede comprobarse que la componente x de $\vec{F}$ es cero, ya que en la mitad derecha del semicírculo $d\vec{F}$ apunta hacia la derecha, y en la mitad izquierda, $d\vec{F}$ apunta hacia la izquierda.

OBSERVACIÓN La fuerza neta que actúa sobre el alambre semicircular es la misma que si el semicírculo fuera reemplazado por un segmento de una línea recta de longitud $2R$ que conectase los puntos a y b. (Éste es un resultado general, como se demuestra en el problema 30.)

26.2 MOVIMIENTO DE UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO MAGNÉTICO

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. Por lo tanto, la fuerza magnética modifica la dirección de la velocidad, pero no su módulo. *Por lo tanto, los campos magnéticos no realizan trabajo sobre las partículas y no modifican su energía cinética.*

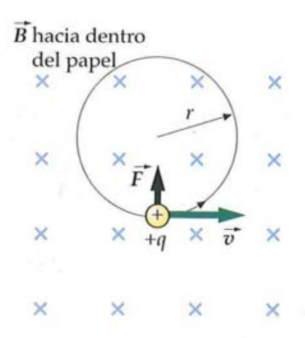


FIGURA 26.12 Partícula cargada que se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme que está dirigido hacia dentro del plano del papel indicado por las cruces. (Cada cruz indica el extremo posterior de una flecha. Un campo dirigido hacia fuera del plano del papel se representaría por puntos, indicando la punta de una flecha.) La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula haciendo que se mueva en una órbita circular.

En el caso especial en que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme, como se ve en la figura 26.12, la partícula se mueve describiendo una órbita circular. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que la partícula adquiera la aceleración $v2/r$ del movimiento circular. Utilizando la segunda ley de Newton podemos relacionar el radio r de la circunferencia con el campo magnético $\vec{B}$ y la velocidad v de la partícula. Si la velocidad es $\vec{v}$, la fuerza magnética sobre una partícula cargada q es $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. El

módulo de la fuerza resultante es qvB, ya que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. La segunda ley de Newton nos da

$$F = ma$$

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

o sea,

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad 26.6$$

donde m es la masa de la partícula.

El periodo del movimiento circular es el tiempo que la partícula tarda en dar una vuelta completa alrededor del círculo. El periodo viene relacionado con la velocidad por

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Aplicando $r = mv/qB$ (ecuación 26.6) podemos obtener el periodo del movimiento circular de la partícula, llamado **periodo de ciclotrón**:

$$T = \frac{2\pi(mv/qB)}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad 26.7$$

PERIODO DE CICLOTRÓN

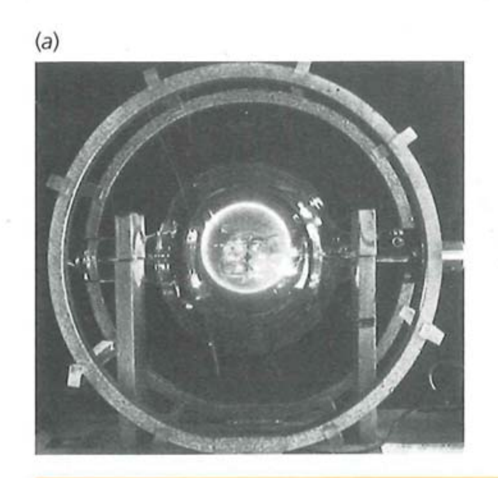
La frecuencia del movimiento circular, llamada **frecuencia de ciclotrón**, es el valor recíproco del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \text{de modo que} \quad \omega = 2\pi f = \frac{q}{m}B \qquad 26.8$$

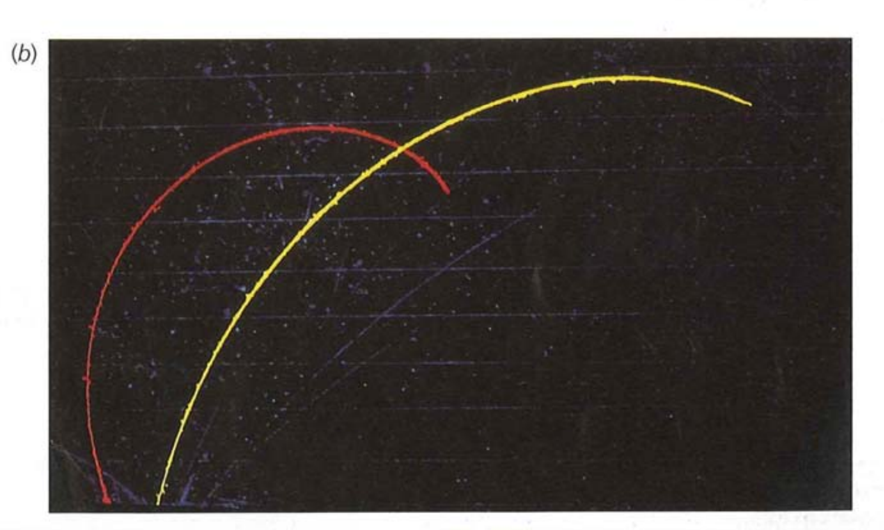
FRECUENCIA DE CICLOTRÓN

Obsérvese que el periodo y la frecuencia dadas por las ecuaciones 26.7 y 26.8 dependen de la relación carga/masa (q/m), pero son independientes del radio r y de la velocidad v. Dos importantes aplicaciones del movimiento circular de las partículas cargadas en un campo magnético uniforme, el espectrómetro de masas y el ciclotrón, serán estudiados más adelante en esta sección.

(a)



(b)



(*a*) Trayectoria circular de los electrones que se mueven en el interior de un campo magnético producido por dos grandes bobinas. Los electrones ionizan el gas contenido en el tubo, produciendo un destello azulado que indica la trayectoria del haz. (*b*) Fotografía en falso color que muestra las trayectorias de un protón de 1,6 MeV (rojo) y una partícula a de 7 MeV (amarillo) en una cámara de niebla. El radio de curvatura es proporcional al momento lineal e inversamente proporcional a la carga de la partícula. Para estas energías, el momento lineal de la partícula α, que posee doble carga que el protón, es aproximadamente cuatro veces el del protón, por lo que su radio de curvatura es mayor. *((a) Larry Langrill. (b) © Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library.)*

Ejemplo 26.4 Periodo de ciclotrón

Un protón de masa $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y carga $q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C se mueve en un círculo de radio $r = 21$ cm, perpendicularmente a un campo magnético $B = 4000$ G. Determinar (*a*) el periodo del movimiento y (*b*) la velocidad del protón.

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton para hallar la velocidad y determinar el periodo considerando que distancia es igual a velocidad por tiempo.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Aplicar la segunda ley de Newton ($F = ma$):

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad qvB = m\frac{v^2}{r}$$

2. Despejar en la ecuación la velocidad:

$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0{,}210\text{ m})(1{,}60 \times 10^{-19}\text{ C})(0{,}400\text{ T})}{1{,}67 \times 10^{-27}\text{ kg}}$$

$$= \boxed{8{,}05 \times 10^6\text{ m/s} = 0{,}0268c}$$

(*b*) Determinar el periodo considerando que distancia es igual a velocidad por tiempo:

$$2\pi r = vT$$

de esta forma, se tiene

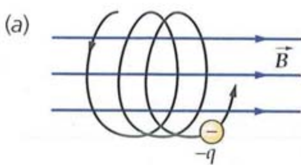
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(0{,}210\text{ m})}{(8{,}05 \times 10^6\text{ m/s})} = 1{,}64 \times 10^{-7}\text{ s} = \boxed{164\text{ ns}}$$

OBSERVACIÓN El radio del movimiento circular es proporcional a la velocidad, pero el periodo es independiente tanto de la velocidad como del radio.

Si una partícula cargada entra en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme, con una velocidad que no es perpendicular a $\vec{B}$, no existe una componente de la fuerza, ni por lo tanto tampoco de la aceleración, que sea paralela a $\vec{B}$, de modo que la componente de velocidad paralela a $\vec{B}$ se mantiene constante. La fuerza magnética que actúa sobre la partícula es perpendicular a $\vec{B}$, por lo que la variación del movimiento de la partícula debida a esta fuerza es la misma que la que ya se ha estudiado. La trayectoria de la partícula es una hélice, como muestra la figura 26.13.

El movimiento de las partículas cargadas en campos magnéticos no uniformes es muy complicado. La figura 26.14 muestra una botella magnética, una interesante configuración de campos magnéticos en la cual el campo es débil en el centro y muy intenso en ambos extremos. Un análisis detallado del movimiento de una partícula cargada en tal campo muestra que la partícula recorrerá una trayectoria en espiral alrededor de la línea de campo y quedará atrapada oscilando atrás y adelante entre los puntos P_1 y P_2 de la figura. Estas configuraciones de campo magnético se utilizan para confinar haces densos de partículas cargadas, el llamado plasma, en las investigaciones sobre fusión nuclear. Un fenómeno semejante es la oscilación de iones que tiene lugar entre los polos magnéticos de la Tierra en los llamados cinturones de Van Allen (figura 26.15).

(*a*)



(*b*)



FIGURA 26.13 (*a*) Cuando una partícula cargada posee una componente de la velocidad paralela a un campo magnético y otra perpendicular al mismo, se mueve en una trayectoria helicoidal alrededor de las líneas del campo. (*b*) Fotografía en una cámara de niebla de la trayectoria helicoidal de un electrón que se mueve en un campo magnético. La trayectoria de los electrones se hace visible por la condensación de gotitas de agua en la cámara de niebla. *(Carl E. Nielson.)*

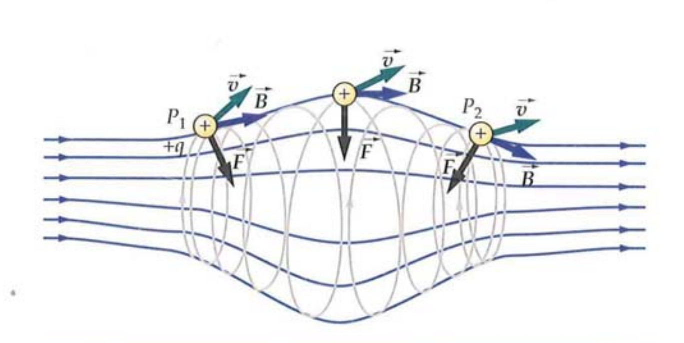


FIGURA 26.14 Botella magnética. Cuando una partícula cargada se mueve en este campo, muy intenso en ambos extremos y débil en el centro, la partícula queda atrapada y se mueve en espiral atrás y adelante, alrededor de las líneas de campo.

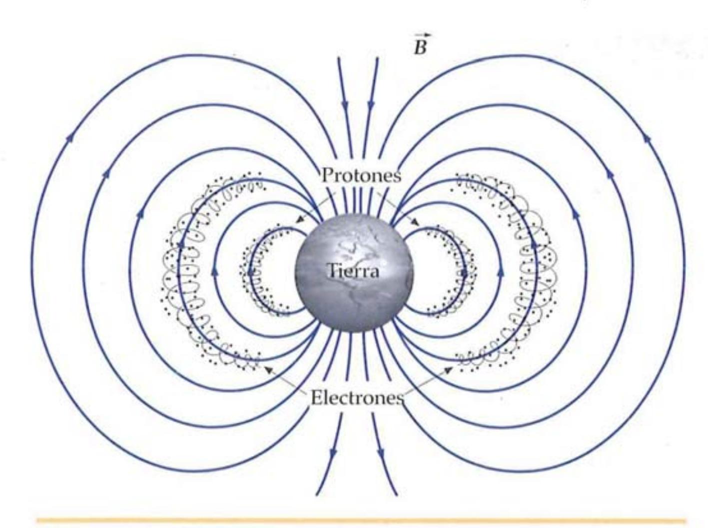


FIGURA 26.15 Cinturones de Van Allen. Los protones (cinturones externos) y los electrones (cinturones internos) están atrapados en el campo magnético terrestre y se mueven en espiral a lo largo de las líneas de campo que existen entre los polos norte y sur.

*SELECTOR DE VELOCIDADES

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo magnético uniforme puede equilibrarse por una fuerza electrostática si se eligen adecuadamente los valores, direcciones y sentidos de los campos magnético y eléctrico. Puesto que la fuerza eléctrica tiene la dirección y el sentido del campo eléctrico (en el caso de partículas positivas) y la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, los campos eléctrico y magnético deber ser perpendiculares entre sí para que se contrarresten estas fuerzas. Una región de estas características se dice que tiene los **campos cruzados.**

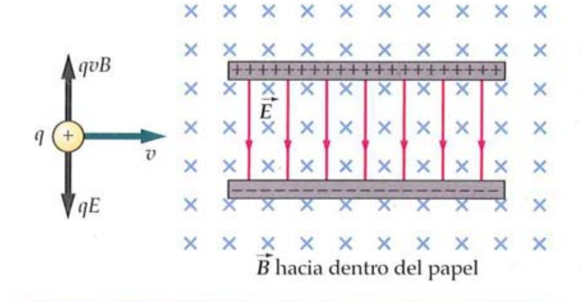


FIGURA 26.16 Campos eléctrico y magnético cruzados (es decir perpendiculares). Cuando una partícula con carga positiva se mueve hacia la derecha, experimenta una fuerza eléctrica dirigida hacia abajo y otra magnética hacia arriba, siendo nula la fuerza resultante si los módulos de los dos campos cumplen la siguiente relación $vB = E$.

La figura 26.16 muestra una región del espacio entre las placas de un condensador en donde existe un campo eléctrico y un campo magnético perpendicular al primero (producido por un imán con los polos magnéticos por encima y por debajo del papel). Consideraremos una partícula de carga q entrando en este espacio desde la izquierda. La fuerza neta sobre la partícula es

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si q es positiva, la fuerza eléctrica de módulo qE está dirigida hacia abajo y la fuerza magnética de módulo qvB está dirigida hacia arriba. Si la carga es negativa, estarán invertidas ambas fuerzas. Las dos fuerzas se equilibrarán si $qE = qvB$, o sea,

$$v = \frac{E}{B} \qquad 26.9$$

Para determinados valores de los campos eléctrico y magnético, las fuerzas se equilibrarán sólo para partículas cuya velocidad sea la dada por la ecuación 26.9. Cualquier partícula con esta velocidad, independientemente de su masa o carga, atravesará el espacio sin desviarse. Una partícula de velocidad mayor se desviará en el sentido de la fuerza magnética y otra de velocidad menor se desviará en el sentido de la fuerza eléctrica. Un dispositivo de campos de esta forma se denomina, por ello, **selector de velocidades**. Solo pasarán y serán seleccionadas aquellas partículas cuya velocidad venga dada por la ecuación 26.9.

PROBLEMA PRÁCTICO 26.2

Un protón se mueve en la dirección $+x$ en una región de campos cruzados, en donde $\vec{E} = 2{,}00 \times 10^5$ N/C $\hat{k}$ y $\vec{B} = 0{,}300$ T $\hat{j}$. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del protón si no se desvía? (*b*) Si el protón se mueve con una velocidad doble que la anterior, ¿en qué dirección se desviará?

*MEDIDA DEL COCIENTE q/m PARA ELECTRONES POR EL MÉTODO DE THOMSON

Un ejemplo de aplicación de campos cruzados eléctrico y magnético es el famoso experimento de J. J. Thomson realizado en 1897, en el cual demostró que los rayos catódicos podían desviarse mediante estos campos y, por lo tanto, se componían de partículas cargadas. Midiendo la desviación de estas partículas, Thomson pudo demostrar que todas las partículas tenían la misma relación carga/masa, q/m. También demostró que las partículas con esta razón carga/masa pueden obtenerse utilizando un material cualquiera como cátodo, lo que significa que estas partículas, ahora denominadas electrones, son un constituyente fundamental de la materia.

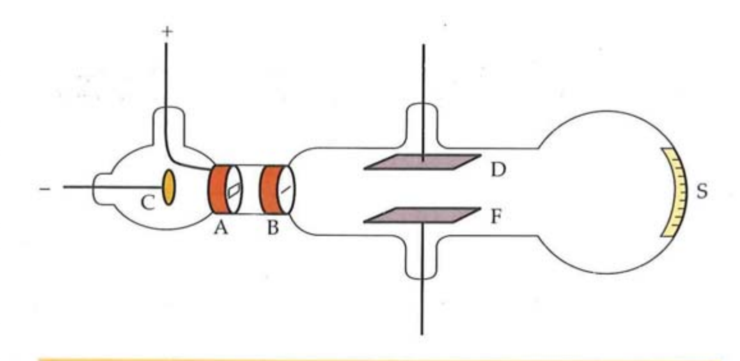


FIGURA 26.17 Tubo de Thomson utilizado para medir el cociente q/m para las partículas que forman los rayos catódicos (electrones). Los electrones procedentes del cátodo C pasan a través de las rendijas en A y B e inciden sobre una pantalla fosforescente S. El haz puede desviarse mediante un campo eléctrico situado entre las placas D y F o mediante un campo magnético (no indicado).

La figura 26.17 muestra un diagrama esquemático del tubo de rayos catódicos utilizado por Thomson. Los electrones son emitidos por el cátodo C, que está a un potencial negativo respecto a las rendijas A y B. Existe un campo eléctrico en la dirección que va desde A hasta C que acelera a los electrones. Éstos pasan a través de las rendijas A y B hacia el interior de una región libre de campo y luego se encuentran con un campo eléctrico entre las placas D y F que es perpendicular a la velocidad de los electrones. Este campo los acelera verticalmente durante el corto tiempo que permanecen entre las placas. Los electrones se desvían e inciden en la pantalla fosforescente S situada en el extremo derecho del tubo con cierto desplazamiento Δy respecto al punto en el cual incidirían si no existiese campo entre las placas D y F. Cuando los electrones chocan contra la pantalla, se produce un destello que indica la posición del haz. La velocidad inicial de los electrones v_0 se determina introduciendo un campo magnético $\vec{B}$ entre las placas en una dirección perpendicular tanto al campo eléctrico como a la velocidad inicial de los electrones. El módulo de $\vec{B}$ se ajusta entonces hasta que el haz no se desvía, y la velocidad se determina mediante la ecuación 26.9.

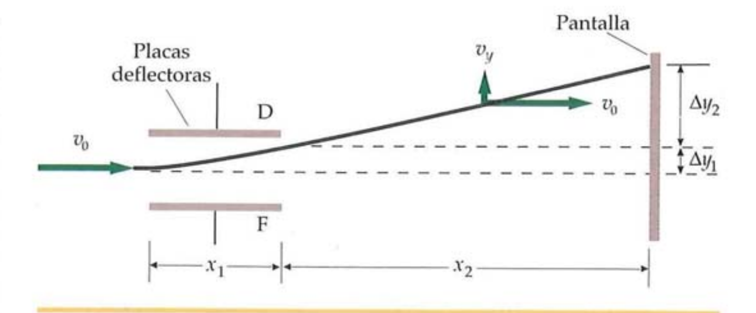


FIGURA 26.18 La desviación total del haz en los experimentos de J. J. Thomson consta de una desviación Δy_1 mientras los electrones se encuentran entre las placas, más la desviación Δy_2 que ocurre en la región libre del campo entre las placas y la pantalla.

Con el campo magnético interrumpido, el haz se desvía en una cantidad Δy que consta de dos partes: la desviación Δy_1, que tiene lugar mientras los electrones se encuentran entre las placas, y Δy_2, que tiene lugar una vez que los electrones abandonan la región existente entre las placas (figura 26.18).

Sea x_1 la distancia horizontal a través de las placas deflectoras D y F. Si el electrón se mueve horizontalmente con velocidad v_0 al entrar en la región de las placas, el tiempo que pasa en esta región es $t_1 = x_1/v_0$, y la velocidad vertical cuando abandona las placas es

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

siendo E_y la componente hacia arriba del campo eléctrico existente entre las placas. La desviación en esta región será

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2$$

El electrón entonces se mueve recorriendo una distancia horizontal adicional x_2 en la región libre de campo existente entre las placas de desviación y la pantalla. Como la velocidad del electrón es constante en esta región, el tiempo necesario para alcanzar la pantalla es $t_2 = x_2/v_0$ y la desviación vertical adicional es

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

La desviación total en la pantalla es, por lo tanto,

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE_y}{mv_0^2}x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2}x_1x_2 \qquad 26.10$$

La desviación medida Δy puede utilizarse para determinar la relación carga / masa, q/m, según la ecuación 26.10.

Ejemplo 26.5 Desviación de un haz de electrones

Los electrones pasan sin desviarse a través de las placas del aparato de Thomson cuando el campo eléctrico es de 3000 V/m y existe un campo magnético cruzado de 1,40 G. Si las placas tienen 4 cm de longitud y el extremo de las placas dista 30 cm de la pantalla, determinar la desviación en la pantalla cuando se interrumpe el campo magnético.

PLANTEAMIENTO La masa y carga del electrón se conocen. Así, $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg y $q = -e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C. La velocidad del electrón puede determinarse a partir de la relación que existe entre los campos eléctrico y magnético.

SOLUCIÓN

1. La desviación total del electrón viene dada por la ecuación 26.10:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE_y}{mv_0^2}x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2}x_1x_2$$

2. La velocidad v_0 es igual a E/B:

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{3000\ \text{V/m}}{1{,}40 \times 10^{-4}\ \text{T}} = 2{,}14 \times 10^7\ \text{m/s}$$

3. Aplicar este valor de v_0, el valor dado de E, y los valores conocidos de m y q para determinar Δy:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2}\frac{(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(-3000\ \text{V/m})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2{,}14 \times 10^7\ \text{m/s})^2}(0{,}0400\ \text{m})^2$$
$$= 9{,}20 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

$$\Delta y_2 = \frac{(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(-3000\ \text{V/m})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2{,}14 \times 10^7\ \text{m/s})^2}(0{,}0400\ \text{m})(0{,}300\ \text{m})$$
$$= 1{,}38 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$$
$$= 9{,}20 \times 10^{-4}\ \text{m} + 1{,}38 \times 10^{-2}\ \text{m}$$
$$= 0{,}92\ \text{mm} + 13{,}8\ \text{mm} = \boxed{14{,}7\ \text{mm}}$$

COMPROBACIÓN Δy_2 es de un orden de magnitud mayor que Δy_1, tal como era de esperar. Esto es así porque la distancia de las placas a la pantalla es de un orden de magnitud superior a la longitud de las placas.

*ESPECTRÓMETRO DE MASAS

El **espectrómetro de masas**, diseñado por vez primera por Francis William Aston en 1919, fue desarrollado para medir las masas de los isótopos. Estas medidas constituyen un medio importante para la determinación de la existencia de isótopos y su abundancia en la naturaleza. Por ejemplo, así se comprobó que el magnesio natural está formado por un 78,7% de ^{24}Mg, un 10,1% de ^{25}Mg y un 11,2% de ^{26}Mg. Estos isótopos poseen masas en la relación aproximada 24:25:26.

La figura 26.19 muestra un dibujo esquemático simple de un espectrómetro de masas. Los iones positivos se consiguen bombardeando átomos neutros con rayos X o con un haz de electrones. (Los electrones se extraen de los átomos mediante rayos X o mediante electrones de bombardeo.) Estos iones son acelerados por un campo eléctrico y entran en un campo magnético uniforme. Si los iones positivos parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial ΔV, su energía cinética cuando entran en el campo magnético es igual a la pérdida de energía potencial, $q|\Delta V|$:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = q|\Delta V| \qquad 26.11$$

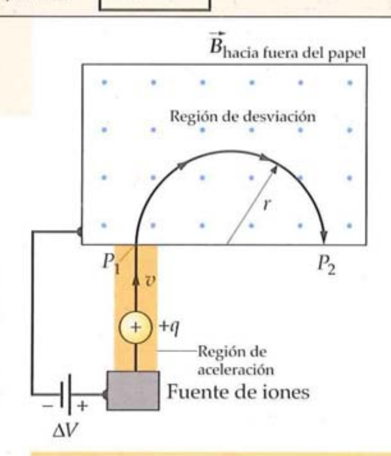


FIGURA 26.19 Dibujo esquemático de un espectrómetro de masas. Los iones positivos procedentes de una fuente iónica se aceleran bajo una diferencia de potencial ΔV y entran en un campo magnético uniforme. El campo magnético es perpendicular y saliente del plano del papel, como indican los puntos dibujados. Los iones se curvan en arcos circulares y emergen en P_2. El radio de la circunferencia varía con la masa del ion.

Los iones se mueven en una semicircunferencia de radio r dada por la ecuación 26.6, $r = mv/qB$, e inciden sobre una película fotográfica en el punto P_2, a una distancia $2r$ del punto P_1 por el que entraron en el campo magnético.

La velocidad v puede eliminarse utilizando ambas ecuaciones 26.6 y 26.11 para determinar m/q en función de las magnitudes conocidas ΔV, B y r. En primer lugar, se despeja v de la ecuación 26.6 y se elevan al cuadrado los dos miembros:

$$v^2 = \frac{r^2q^2B^2}{m^2}$$

Sustituyendo este valor de v^2 en la ecuación 26.11, se obtiene

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r^2q^2B^2}{m^2}\right) = q|\Delta V|$$

Simplificando esta ecuación y despejando m/q, resulta

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2|\Delta V|} \qquad 26.12$$

En el espectrómetro de masas original de Aston, las diferencias de masas podían medirse con una precisión de 1 parte en 10 000. La precisión se ha mejorado con la introducción de un selector de velocidades entre la fuente de iones y el imán, lo que incrementa la exactitud con la que pueden determinarse las velocidades de los iones incidentes.

Ejemplo 26.6 Separación de isótopos de níquel

Un ion de ^{58}Ni de carga +e y masa 9,62 3 10^{-26} kg se acelera a través de una diferencia de potencial de 3 kV y se desvía en un campo magnético de 0,12 T. (*a*) Determinar el radio de curvatura de la órbita del ion. (*b*) Determinar la diferencia que existe entre los radios de curvatura de los iones ^{58}Ni y ^{60}Ni. (Suponer que la relación de masas es 58:60.)

PLANTEAMIENTO El radio de curvatura r puede determinarse utilizando la ecuación 26.12. Teniendo en cuenta la dependencia de r con la masa, podemos determinar el radio de los iones ^{60}Ni a partir del radio de los iones ^{58}Ni y después hallar la diferencia.

SOLUCIÓN

(*a*) Despejar r de la ecuación 26.12:

$$r = \sqrt{\frac{2m|\Delta V|}{qB^2}} = \left[\frac{2(9,62 \times 10^{-26}\ \text{kg})(3000\ \text{V})}{(1,60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0,120\ \text{T})^2}\right]^{1/2} = \boxed{0,501\ \text{m}}$$

(*b*) 1. Sean r_1 y r_2 los radios de la órbita del ion ^{58}Ni y del ion ^{60}Ni, respectivamente. Utilizar el resultado de (*a*) para calcular la relación entre r_2 y r_1:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1,017$$

2. Utilizar el resultado del paso anterior para calcular el radio r_2 del ion ^{60}Ni:

$$r_2 = 1,017r_1 = (1,017)(0,501\ \text{m}) = 0,510\ \text{m}$$

3. La diferencia de los radios orbitales $r_2 - r_1$ es:

$$r_2 - r_1 = 0,510\ \text{m} - 0,501\ \text{m} = \boxed{9\ \text{mm}}$$

COMPROBACIÓN La diferencia en los radios de las órbitas es menor del 2% del radio de curvatura de la propia órbita. Este resultado es así porque las masas de los dos iones difieren en menos del 4%.

EL CICLOTRÓN

El ciclotrón fue inventado por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1934 para acelerar partículas tales como protones o deuterones hasta conseguir una energía cinética elevada. Para bombardear núcleos atómicos se utilizan partículas de alta

* El deuterón es el núcleo de hidrógeno pesado, 2H, formado por un protón y un neutrón fuertemente ligados entre sí.

energía; así se producen reacciones nucleares que se estudian con objeto de obtener información acerca del núcleo. Se utilizan también protones o deuterones de alta energía para producir materiales radiactivos y con fines médicos.

La figura 26.20 es un dibujo esquemático de un ciclotrón. Las partículas se mueven en el interior de dos recipientes metálicos semicirculares denominados *des* (debido a su forma de D). Los recipientes están contenidos en una cámara de vacío situada en el interior de un campo magnético proporcionado por un electroimán. En la región en la cual se mueven las partículas debe haberse realizado el vacío para que las partículas no pierdan energía y no sean dispersadas en choques con las moléculas de aire. Entre las des se mantiene una diferencia de potencial ΔV que se alterna en el tiempo con un periodo T, elegido de modo que sea igual al periodo de ciclotrón, $T = 2\pi m/(qB)$ (ecuación 26.7). Esta diferencia de potencial crea un campo eléctrico en el espacio hueco comprendido entre las des. No existe campo eléctrico dentro de las des debido al blindaje metálico.

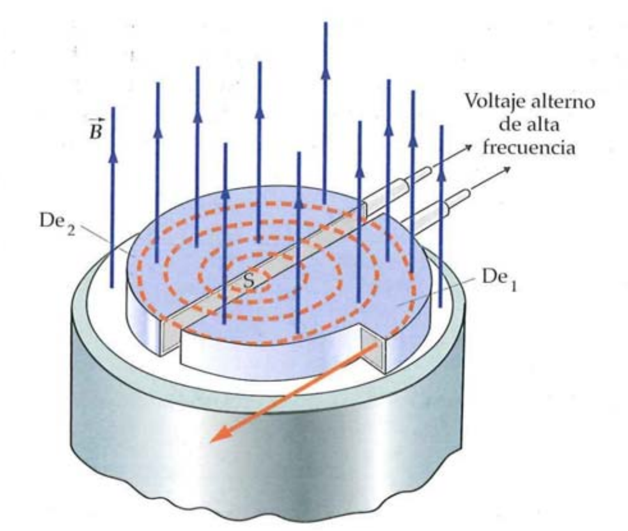


FIGURA 26.20 Dibujo esquemático de un ciclotrón. Se ha omitido la cara del polo superior del imán. Las partículas cargadas, tales como protones, procedentes de una fuente S situada en el centro, son aceleradas por la diferencia de potencial establecida a través del hueco entre las *des* del ciclotrón. Cuando las partículas llegan al hueco de nuevo, la diferencia de potencial ha cambiado de signo y vuelven a acelerarse describiendo un círculo mayor. Esta diferencia de potencial alterna su signo con el periodo del ciclotrón de la partícula, el cual es independiente del radio de la circunferencia descrita.

Las partículas cargadas positivamente se inyectan inicialmente en la de_1 con una velocidad pequeña, procedentes de una fuente de iones S próxima al centro de las des. Se mueven en una semicircunferencia en de_1 y llegan al hueco que hay entre de_1 y de_2 al cabo de un tiempo $\frac{1}{2}T$. El potencial se ajusta de modo que la de_1 está a mayor potencial que la de_2 cuando las partículas llegan al espacio hueco entre ambas. Por lo tanto, cada partícula se acelera a través de este hueco a causa del campo eléctrico y gana una energía cinética igual a $q\,\Delta V$.

Al poseer más energía cinética, la partícula se mueve en un semicírculo de mayor radio en la de_2 y de nuevo llega al hueco después de un tiempo $\frac{1}{2}T$, porque el periodo es independiente de la velocidad de la partícula. En este tiempo, el potencial entre las des se ha invertido, de modo que la de_2 está ahora a mayor potencial. De nuevo, la partícula se acelera a través del hueco y gana una energía cinética adicional igual a $q\,\Delta V$. Cada vez que la partícula llega al hueco, es acelerada y gana una energía cinética igual a $q\,\Delta V$. De este modo se mueve en órbitas semicirculares cada vez mayores, hasta que finalmente abandona el campo magnético. En un ciclotrón típico, cada partícula realiza de 50 a 100 revoluciones y emerge con energías de hasta varios centenares de megaelectronvolts (MeV).

La energía cinética de una partícula que emerge de un ciclotrón puede calcularse mediante la ecuación 26.6 sustituyendo r por el valor máximo del radio de las des y despejando el valor de v:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{qBr}{m}$$

Por lo tanto,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{m}\right)r^2 \qquad 26.13$$

Ejemplo 26.7 Energía de un protón acelerado

Un ciclotrón que acelera protones posee un campo magnético de 1,5 T y un radio máximo de 0,5 m. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de ciclotrón? (*b*) Determinar la energía cinética con que emergen los protones.

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton ($F = ma$) con $F = |q\vec{v} \times \vec{B}|$. Utilizar $v = r\omega$, y determinar la frecuencia y velocidad.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Aplicar $F = ma$, donde F es la fuerza magnética y a es la aceleración centrípeta. Sustituir ωr por v y despejar ω:

$$F = ma$$
$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$q\omega rB = m\frac{\omega^2 r^2}{r}$$
$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}150\ \text{T})}{1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$
$$= 1{,}44 \times 10^7\ \text{rad/s}$$

2. Usar $2\pi f = mv$ para calcular la frecuencia en ciclos por segundo (hertz):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1{,}44 \times 10^7\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}}$$
$$= 2{,}29 \times 10^6\ \text{Hz} = \boxed{2{,}29\ \text{MHz}}$$

(*b*) 1. Calcular la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$
$$= \frac{1}{2}(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1{,}44 \times 10^7\ \text{rad/s})^2(0{,}500\ \text{m})^2$$
$$= 4{,}33 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

2. Las energías de los protones y otras partículas elementales se expresan habitualmente en electronvolts. Utilizar $1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J para convertir los joules en eV:

$$K = 4{,}33 \times 10^{-14}\ \text{J} \times \frac{1\ \text{eV}}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}} = \boxed{271\ \text{keV}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad de salida del protón es $v = r\omega = (0{,}500\ \text{m})(1{,}44 \times 10^7\ \text{rad/s}) = 7{,}20 \times 10^6\ \text{m/s}$. La velocidad de la luz es $3{,}00 \times 10^8$ m/s. El valor calculado de la velocidad angular es $1{,}44 \times 10^7$ rad/s, resultado válido pues la velocidad resultante es menor que el 10% de la de la luz.

26.3 MOMENTOS DE FUERZA SOBRE ESPIRAS DE CORRIENTE E IMANES

Una espira portadora de corriente no experimenta ninguna fuerza neta cuando se encuentra en un campo magnético uniforme, pero sobre ella se ejerce un par que tiende a girarla. La orientación de la espira puede describirse de forma adecuada mediante un vector unitario $\hat{n}$ que es perpendicular al plano de la espira, como se indica en la figura 26.21. Si los dedos de la mano derecha se curvan en el mismo sentido que la corriente de la espira, su dedo pulgar apunta en la dirección de $\hat{n}$.

La figura 26.22 muestra las fuerzas ejercidas por un campo magnético uniforme sobre una espira rectangular cuyo vector unitario $\hat{n}$ forma un ángulo θ con el campo magnético $\vec{B}$. La fuerza neta sobre la espira es cero. Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tienen el módulo

$$F_1 = F_2 = IaB$$

Estas fuerzas forman un par, de modo que el momento es el mismo respecto a cualquier punto. El punto P de la figura 26.22 es un punto conveniente respecto al cual calcular el momento del par. La magnitud del momento es

$$\tau = F_2 b \operatorname{sen}\theta = IaBb \operatorname{sen}\theta = IAB \operatorname{sen}\theta$$

donde $A = ab$ es el área de la espira. Si ésta posee N vueltas, el momento tiene el módulo

$$\tau = NIAB \operatorname{sen}\theta$$

Este momento tiende a girar la espira de modo que el vector $\hat{n}$ tenga la misma dirección que $\vec{B}$.

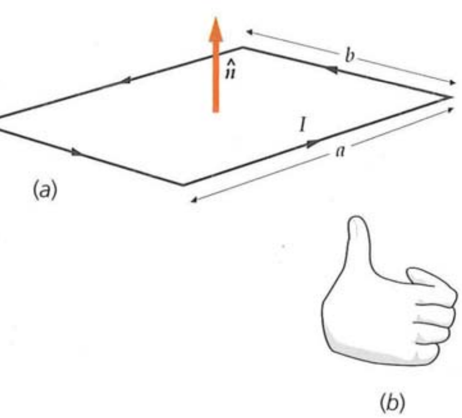


FIGURA 26.21 (*a*) La orientación de una espira de corriente viene descrita por el vector unitario $\hat{n}$ perpendicular al plano de la espira. (*b*) Regla de la mano derecha para determinar el sentido de $\hat{n}$. Cuando los dedos de la mano derecha se curvan alrededor de la espira, con los dedos apuntando en la dirección de la corriente, el dedo pulgar señala la dirección de $\hat{n}$.

FIGURA 26.22 (*a*) Espira de corriente rectangular cuyo vector unitario normal $\hat{n}$ forma un ángulo θ con el campo magnético uniforme $\vec{B}$. (*b*) Vista de una sección trasversal de la espira y del dibujo de la figura 26.22*a*. El momento sobre la espira tiene el módulo IAB sen θ y su sentido es tal que $\hat{n}$ tiende a girar hacia $\vec{B}$.

El momento puede escribirse de forma adecuada en función del **momento dipolar magnético** $\vec{\mu}$ (o simplemente **momento magnético**) de la espira de corriente, definido por

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n} \qquad 26.14$$

MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA DE CORRIENTE

La unidad del SI del momento magnético es el ampere-metro cuadrado ($A \cdot m^2$). En función del momento dipolar magnético, el momento sobre la espira de corriente viene dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad 26.15$$

MOMENTO SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE

La ecuación 26.15, deducida para una espira rectangular, es válida en general para una espira plana de cualquier forma. El momento sobre cualquier espira es igual al producto vectorial del momento magnético $\vec{\mu}$ de la espira y el campo magnético $\vec{B}$, en donde el momento magnético se define como un vector perpendicular al área de la espira (figura 26.23), cuyo módulo es igual a NIA y que tiene el mismo sentido que $\hat{n}$. Comparando la ecuación 26.15 con la ecuación 21.11 ($\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$) correspondiente al momento que actúa sobre un dipolo eléctrico, resulta que una espira de corriente situada en un campo magnético actúa del mismo modo que un dipolo eléctrico situado en un campo eléctrico.

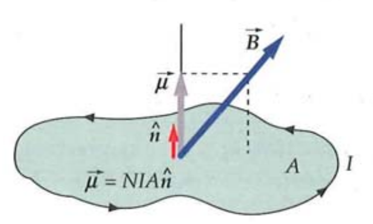


FIGURA 26.23 Una espira plana de corriente de forma arbitraria se describe por su momento magnético $\vec{\mu} = NIA\hat{n}$. En un campo magnético $\vec{B}$, experimenta un momento $\vec{\mu} \times \vec{B}$.

Ejemplo 26.8 Momento de fuerza sobre una espira de corriente

Una espira circular de 2 cm de radio con 10 vueltas de hilo conductor transporta una corriente de 3 A. El eje de la espira forma un ángulo de 30° con un campo magnético de 8000 G. Determinar el módulo del momento que actúa sobre la espira.

PLANTEAMIENTO El momento de la fuerza en la espira viene dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ (ecuación 26.15), donde $\vec{\mu} = NIA\hat{n}$ (ecuación 26.14).

SOLUCIÓN

El módulo del momento viene dado por la ecuación 26.15:

$$\tau = |\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \,\text{sen}\,\theta = NIAB \,\text{sen}\,\theta$$
$$= (10{,}0)(3{,}00\text{ A})\pi(0{,}0200\text{ m})^2(0{,}800\text{ T})\text{ sen }30{,}0°$$
$$= \boxed{1{,}51 \times 10^{-2}\text{ N}\cdot\text{m}}$$

COMPROBACIÓN Dado que $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ (ecuación 26.4) se deduce que la unidad del SI para el campo magnético (el tesla) debe tener unidades de N/(A · m). Teniendo esto en cuenta, se puede ver que las unidades de la parte derecha de la igualdad son N · m, que son unidades del sistema SI para el momento de la fuerza.

Ejemplo 26.9 Inclinando una espira de corriente

Inténtelo usted mismo

Una espira de alambre circular de radio R y masa m por la que circula una corriente I (figura 26.24) está sobre una superficie horizontal. Existe un campo magnético horizontal $\vec{B}$. ¿Qué valor mínimo debe tener la corriente I para que un borde de la espira se levante de la superficie?

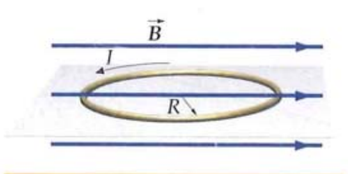


FIGURA 26.24

PLANTEAMIENTO La espira de la figura 26.25 empieza a inclinarse cuando el módulo de la suma de todos los momentos de las fuerzas ejercidas sobre ella no es nula. Para averiguar cuándo se compensa el momento de la fuerza normal gravitatoria, debemos calcular los momentos con respecto al punto de contacto de la espira con la superficie. El momento de la fuerza magnética, que viene dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ es el mismo respecto a cualquier punto, ya que el momento total de la fuerza magnética se puede obtener como resultado de la suma de los momentos magnéticos sobre los pares simétricos de elementos de corriente que forman la espira. El brazo del momento de la fuerza gravitatoria es el radio de la espira.

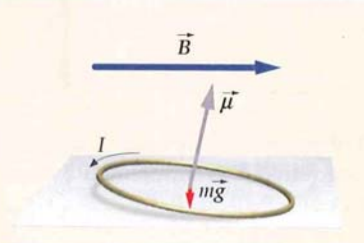


FIGURA 26.25

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Determinar el módulo del momento magnético que actúa sobre la espira.	$\tau_m = \mu B \operatorname{sen}(90°) = I\pi R^2 B$
2. Determinar el módulo del momento gravitatorio ejercido sobre la espira.	$\tau_g = mgR$
3. Igualar ambos momentos y despejar I.	$I = \boxed{\dfrac{mg}{\pi RB}}$

COMPROBACIÓN En un campo constante B, la corriente es directamente proporcional a la masa. Cuanto mayor es la masa, mayor es la corriente necesaria para iniciar el movimiento de rotación/inclinación del anillo.

ENERGÍA POTENCIAL DE UN DIPOLO MAGNÉTICO EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Cuando un momento actúa sobre un objeto y éste gira un determinado ángulo, se realiza trabajo. Cuando un dipolo gira un ángulo $d\theta$, el trabajo realizado es

$$dW = -\tau\, d\theta = -\mu B \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$. El signo menos aparece porque el momento tiende a disminuir θ. Haciendo este trabajo igual a la disminución de energía potencial, tenemos

$$dU = -dW = +\mu B \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Integrando, resulta

$$U = -\mu B \cos\theta + U_0$$

Si elegimos la energía potencial de modo que sea cero cuando $\theta = 90°$, resulta $U_0 = 0$ y la energía potencial del dipolo es

$$U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \qquad 26.16$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN DIPOLO MAGNÉTICO

La ecuación 26.16 expresa la energía potencial de un dipolo magnético que forma un ángulo θ con un campo magnético.

Ejemplo 26.10 Momento de la fuerza magnética ejercida sobre una bobina

Una bobina cuadrada de 12 vueltas, con lados de 40 cm de longitud, transporta una corriente de 3 A. Está situada en el plano xy como indica la figura 26.26, dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = 0{,}300\text{ T }\hat{i} + 0{,}400\text{ T }\hat{k}$. Determinar (*a*) el momento magnético de la bobina y (*b*) el momento ejercido sobre la bobina. (*c*) Calcular la energía potencial de la bobina.

PLANTEAMIENTO En la figura 26.26 vemos que el momento magnético de la bobina se encuentra en la dirección z positiva.

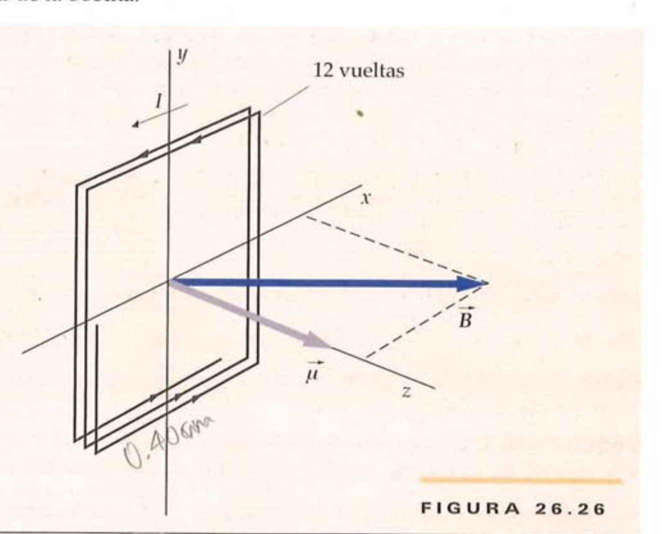


FIGURA 26.26

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular el momento magnético de la bobina:

$$\vec{\mu} = NIA\hat{k} = (12)(3{,}00\text{ A})(0{,}400\text{ m})^2\hat{k} = \boxed{5{,}76\text{ A}\cdot\text{m}^2\,\hat{k}}$$

(*b*) El momento sobre la bobina de corriente viene dado por la ecuación 26.15:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = (5{,}76\text{ A}\cdot\text{m}^2\,\hat{k})\times(0{,}300\text{ T }\hat{i} + 0{,}400\text{ T }\hat{k}) = \boxed{1{,}73\text{ N}\cdot\text{m }\hat{j}}$$

(*c*) La energía potencial es el producto escalar de $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ con signo negativo:

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -(5{,}76\text{ A}\cdot\text{m}^2\,\hat{k})\cdot(0{,}300\text{ T }\hat{i} + 0{,}400\text{ T }\hat{k}) = \boxed{-2{,}30\text{ J}}$$

COMPROBACIÓN El momento de la fuerza en el resultado de la parte (*b*) es perpendicular tanto al momento magnético como al campo magnético. Esto es así por las propiedades intrínsecas del producto vectorial.

PROBLEMA PRÁCTICO 26.3 La energía potencial de una corriente en una espira o bobina en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es igual a cero cuando el momento dipolar magnético de la espira forma un ángulo de 90° con el campo magnético. Calcular la energía potencial del sistema si la bobina se orienta de tal forma que $\vec{B}$ y $\vec{\mu}$ (*a*) tienen la misma dirección y el mismo sentido y (*b*) la misma dirección y sentidos opuestos.

Cuando un pequeño imán permanente, tal como la aguja de una brújula, se sitúa en un campo magnético $\vec{B}$, el campo ejerce un momento sobre el imán que tiende a girarle de modo que ésta se alinea con el campo. Este efecto ocurre también con limaduras de hierro no imanadas, las cuales, en presencia de un campo $\vec{B}$, se imanan. El imán en forma de barra se caracteriza por un momento magnético $\vec{\mu}$, que apunta desde el polo sur al polo norte. Un pequeño imán en forma de barra se comporta, por lo tanto, como una espira de corriente. Esto no es una coincidencia casual. El origen del momento magnético de una barra imanada reside en las corrientes circulares que resultan del movimiento de los electrones en los átomos del imán.

Ejemplo 26.11 $\vec{\mu}$ de un disco en movimiento rotatorio

Un disco no conductor de pequeño grosor de masa m y radio R posee una densidad superficial de carga uniforme σ y gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de su eje. Determinar el momento magnético del disco en rotación.

PLANTEAMIENTO Se determina el momento magnético de un elemento circular de radio r y anchura dr y luego se integra (figura 26.27). La carga del elemento es $dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi R\, dR$. Si la carga es positiva, el momento magnético tiene la misma dirección y sentido que $\vec{\omega}$, y en este caso sólo necesitamos calcular el módulo.

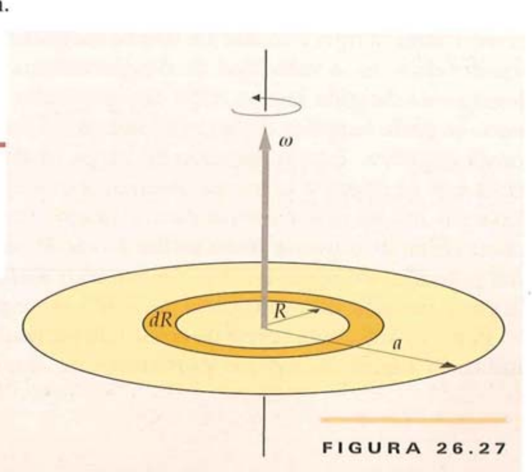


FIGURA 26.27

SOLUCIÓN

1. El momento magnético de la banda circular indicada es el producto de la corriente por el área de la espira:

$$d\mu = A\,dI = \pi R^2\,dI$$

2. La corriente en la banda es la carga total de la banda dividida por el tiempo que tarda dicha carga en sobrepasar un determinado punto. Este tiempo es el periodo, el cual es el inverso de la frecuencia de rotación $1/T = f = \omega/(2\pi)$:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}dq = \frac{\omega}{2\pi}\sigma\,dA = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi R\,dR = \sigma\omega R\,dR$$

3. Sustituir este valor de dI en el paso 1 para hallar el momento magnético de la banda $d\mu$ en función de r y dr:

$$d\mu = \pi R^2\,dI = \pi R^2\sigma\omega R\,dR = \pi\sigma\omega R^3\,dR$$

4. Integrar de $r = 0$ a $r = a$:

$$\mu = \int_0^a \pi\sigma\omega R^3\,dR = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega a^4$$

5. Usar el hecho de que $\vec{\mu}$ es paralelo a $\vec{\omega}$ si σ es positivo para escribir el momento magnético como un vector:

$$\vec{\mu} = \boxed{\tfrac{1}{4}\pi\sigma a^4\vec{\omega}}$$

COMPROBACIÓN Considerar un anillo girando con la misma carga $Q = \sigma\pi a^2$ y del mismo radio a del disco. El módulo del momento magnético viene dado por $\mu = IA = \frac{Q}{T}\pi a^2 = \frac{\sigma\pi a^2}{2\pi/\omega}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma a^4\omega$, que es dos veces el resultado del paso 5, el cual es menor que el módulo del momento magnético del anillo, como era de esperar.

OBSERVACIÓN En función de la carga total $Q = \sigma p R^2$, el momento magnético es $\vec{\mu} = \frac{1}{4}Qa^2\vec{\omega}$. El momento angular del disco es $\vec{L} = (\frac{1}{2}ma^2)\vec{\omega}$: por lo tanto, el momento magnético puede expresarse en la forma $\vec{\mu} = \frac{Q}{2m}\vec{L}$, que es un resultado general (véase el problema 57.)

26.4 EFECTO HALL

Como hemos visto, cuando las cargas se mueven en un campo magnético experimentan una fuerza perpendicular a su movimiento. Por lo tanto, si estas cargas se desplazan en un alambre conductor, serán impulsadas hacia un lado del alambre. Debido a esto se produce una separación de carga en el alambre denominada **efecto Hall**. Este fenómeno nos permite determinar el signo de la carga en un portador y el número de portadores n por unidad de volumen del conductor. El efecto Hall también nos proporciona un método adecuado para medir campos magnéticos.

La figura 26.28 muestra dos cintas conductoras cada una de las cuales transporta una corriente I hacia la derecha, pues sus extremos izquierdos están conectados al terminal positivo de una batería y sus extremos derechos al terminal negativo. Las cintas se encuentran en un campo magnético dirigido perpendicularmente hacia dentro del papel. Supongamos de momento que la corriente está formada por partículas positivamente cargadas que se mueven hacia la derecha como indica la figura 26.28*a*. La fuerza magnética sobre estas partículas es $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ (en donde $\vec{v}_d$ es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga). Esta fuerza está dirigida hacia arriba. Las partículas positivas, por lo tanto, se mueven hacia la parte superior de la cinta, dejando el fondo de la misma con un exceso de carga negativa. Esta separación de carga produce un campo electrostático en la cinta que se opone a la fuerza magnética que actúa sobre los portadores de carga. Cuando las fuerzas electrostática y magnética se equilibran, los portadores de carga dejan de moverse hacia arriba. Como el campo eléctrico apunta en el sentido del potencial decreciente, la parte superior de la cinta está a mayor potencial que la parte inferior. Esta diferencia de potencial se puede medir con un voltímetro.

Por otro lado, si la corriente consta de partículas negativamente cargadas, como indica la figura 26.28*b*, los portadores de carga se moverán hacia la izquierda

(puesto que la corriente se mueve hacia la derecha). La fuerza magnética $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ se dirige de nuevo hacia arriba, pues los signos de ambos, q y $\vec{v}_d$, se han cambiado. De nuevo, los portadores son forzados a la parte superior de la cinta, pero como ahora éstos son negativos, la carga negativa se acumula en la parte superior de la cinta y la carga positiva en la parte inferior.

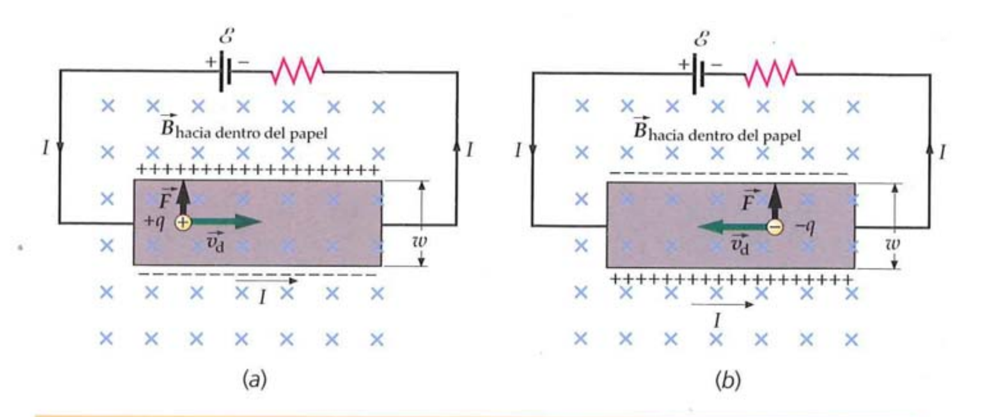


FIGURA 26.28 Efecto Hall. El campo magnético está dirigido perpendicularmente y hacia dentro del plano del papel, como indican las cruces dibujadas. La fuerza magnética sobre una partícula cargada está dirigida hacia arriba para una corriente que circula hacia la derecha tanto si la corriente es debida a (*a*) partículas positivas que se mueven hacia la derecha como si se debe a (*b*) partículas negativas que se mueven hacia la izquierda.

Una medida del signo de la diferencia de potencial entre la parte superior e inferior de la cinta nos dirá el signo de los portadores de carga. En los semiconductores, los portadores de carga pueden ser negativos (electrones) o positivos (huecos). Una medida del signo de la diferencia de potencial nos dice cuáles son los dominantes en un semiconductor particular. Para un conductor metálico normal resulta que la parte superior de la cinta de la figura 26.28 está a menor potencial que la parte inferior, lo cual significa que la parte superior es portadora de una carga negativa. Por lo tanto, la figura 26.28*b* es la ilustración correcta de la corriente en un conductor metálico normal. Éste fue el tipo de experimento que condujo al descubrimiento de que los portadores de carga en los conductores metálicos son negativos.

La diferencia de potencial entre la parte superior e inferior de la cinta se llama **voltaje Hall** y puede calcularse en función de la velocidad de desplazamiento. El módulo de la fuerza magnética sobre los portadores de carga de la cinta es qv_dB. Esta fuerza magnética es equilibrada por la fuerza electrostática de módulo qE_H, en donde E_H es el campo eléctrico debido a la separación de cargas. Así, resulta $E_H = v_dB$. Si la anchura de la cinta es w, la diferencia de potencial es E_Hw. Por lo tanto, el voltaje Hall es

$$V_H = E_Hw = v_dBw \qquad 26.17$$

PROBLEMA PRÁCTICO 26.4

Una cinta conductora de anchura $w = 2{,}0$ cm está situada en un campo magnético de 0,8 T. El voltaje Hall medido resulta ser 0,64 μV. Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones.

Como la velocidad de desplazamiento en las corrientes ordinarias es muy pequeña, la ecuación 26.17 expresa que el voltaje Hall es también muy pequeño para cintas y campos magnéticos de dimensiones ordinarias. A partir de medidas del valor del voltaje Hall para una cinta de un tamaño determinado, podemos deter-

minar el número de portadores de carga por unidad de volumen de la cinta. Según la ecuación 26.3, la intensidad de corriente es

$$|I| = |q|nv_dA$$

donde A es la sección transversal de la cinta. Para una cinta de anchura w y espesor t, el área transversal es $A = wt$. Como los portadores de carga son electrones, el valor de $|q|$ es la carga de un electrón, e. La densidad numérica de los portadores de carga n viene así dada por

$$n = \frac{|I|}{A|q|v_d} = \frac{|I|}{wtev_d} \qquad 26.18$$

Sustituyendo $v_dw = V_H/B$ en la ecuación 26.17, resulta

$$n = \frac{|I|B}{teV_H} \qquad 26.19$$

Ejemplo 26.12 Densidad de portadores de carga en la plata

Un segmento conductor de plata de espesor 1 mm y anchura 1,5 cm transporta una corriente de 2,5 A en una región donde existe un campo magnético de módulo 1,25 T perpendicular al segmento. En consecuencia, se produce un voltaje Hall de 0,334 mV. (*a*) Calcular la densidad numérica de los portadores de carga. (*b*) Comparar la respuesta de (*a*) con la densidad numérica de átomos de la plata, de densidad $\rho = 10{,}5\ \text{g/cm}^3$ y masa molecular $M = 107{,}9\ \text{g/mol}$.

PLANTEAMIENTO Se puede utilizar la ecuación 26.19 para determinar la densidad de portadores de carga. La densidad de átomos se puede obtener a partir de la densidad y la masa molar.

SOLUCIÓN

(*a*) Reemplazar por valores numéricos las variables de la ecuación 26.19 para determinar n:

$$n = \frac{|I|B}{teV_H} = \frac{(2{,}50\ \text{A})(1{,}25\ \text{T})}{(1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{m})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3{,}34 \times 10^{-7}\ \text{V})}$$

$$= \boxed{5{,}85 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3}$$

(*b*) 1. El número de átomos por unidad de volumen es $\rho N_A/M$:

$$n_a = \rho\frac{N_A}{M} = (10{,}5\ \text{g/cm}^3)\frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{107{,}9\ \text{g/mol}}$$

$$= \boxed{5{,}86 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3 = 5{,}86 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3}$$

2. Comparar el resultado del paso 1 de la parte (*b*) con el resultado de la parte (*a*):

Estos resultados indican que el número de portadores de carga en la plata es, aproximadamente, uno por átomo.

COMPROBACIÓN Debemos esperar que la densidad de portadores y el de átomos es del mismo orden de magnitud, lo cual es concordante con el resultado del problema.

El voltaje Hall proporciona un método conveniente para medir campos magnéticos. Reajustando la ecuación 26.19 podemos escribir para el voltaje Hall

$$V_H = \frac{|I|}{nte}B \qquad 26.20$$

Una cinta puede calibrarse midiendo el voltaje Hall para una determinada intensidad de corriente en un campo magnético conocido. La intensidad de un campo magnético B desconocido puede entonces medirse situando la cinta en este campo, haciendo circular una corriente conocida por la cinta y midiendo V_H.

*EFECTO HALL CUÁNTICO

Según la ecuación 26.20, el voltaje Hall debe incrementarse linealmente con el campo magnético B para una determinada corriente circulando por un segmento

dado del conductor. En 1980, mientras estudiaba el efecto Hall en semiconductores a muy bajas temperaturas y en campos magnéticos muy intensos, el físico alemán Klaus von Klitzing descubrió que la representación gráfica de V_H en función de B tenía forma escalonada, como indica la figura 26.29, en lugar de ser una línea recta. Es decir, el voltaje Hall está cuantizado. Por este descubrimiento del efecto Hall cuántico, von Klitzing recibió el Premio Nobel de Física de 1985.

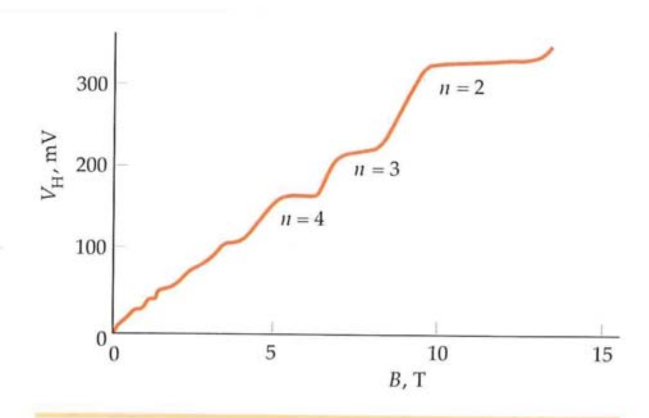


FIGURA 26.29 Un gráfico del voltaje Hall en función del campo magnético aplicado muestra tramos horizontales, indicando que el voltaje Hall está cuantizado. Estos datos se tomaron a una temperatura de 1,39 K con una intensidad de corriente I fija de 25,52 μA.

Según la teoría del efecto Hall cuántico, la resistencia Hall, definida por $R_H = V_H/I$, sólo puede tomar los valores

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{R_K}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{26.21}$$

donde n es un número entero y R_K la llamada **constante de von Klitzing**, que está relacionada con la carga electrónica fundamental e y la constante de Planck h por la expresión

$$R_K = \frac{h}{e^2} \tag{26.22}$$

Como la constante de von Klitzing puede medirse con una exactitud de una pocas partes en 10^9, el efecto Hall cuántico se utiliza actualmente para definir el patrón de resistencia. Desde enero de 1990, el **ohm** se define de modo que R_{K-90} tiene exactamente el valor* de

$$R_{K-90} = 25\,812{,}8076\ \Omega \text{ (exacto)} \tag{26.23}$$

En 1982 se observó que en ciertas condiciones especiales la resistencia Hall viene dada por la ecuación 26.22 con el número entero n reemplazado por una serie de fracciones racionales. En este caso se habla del *efecto Hall cuántico fraccionario*. Los profesores americanos Laughlin, Stormer y Tsui ganaron el Premio Nobel de Física de 1998 por el descubrimiento y la explicación de dicho fenómeno.

* Los valores de R_{K-90} y R_K solo difieren ligeramente. El valor utilizado normalmente como constante de von Klitzing es $R_K = (25\,812{,}807572 \pm 0{,}000095)\ \Omega$.

Temas de actualidad en Física

Cambios en los magnetismos de la Tierra y el Sol

El campo magnético del Sol y la Tierra se mide casi constantemente desde hace algunos años vía satélite o por los observatorios[1] de tierra adecuados para medir el campo magnético. Geólogos y físicos colaboran en el estudio del paleomagnetismo de la Tierra[2] y el Sol.[3] Las diferentes observaciones y estudios paleomagnéticos muestran que el campo magnético tanto de la Tierra como del Sol están continuamente cambiando.

El campo magnético de la Tierra se utilizó y utiliza en ayuda a la navegación desde hace al menos 900 años.[4] Los navegantes se dieron cuenta muy pronto que el norte magnético no coincide con el geográfico y que la declinación o diferencia de dirección de ambos nortes, el magnético y el geográfico, varía de un sitio a otro.[6] La medidas de esta declinación realizadas en los mismos sitios desde el siglo XVI, demostraron que la localización aparente del norte magnético variaba con el tiempo en un mismo lugar de la Tierra. Estas medidas constituyen la primera evidencia de que el campo magnético evoluciona de forma dinámica.



Los puntos solares son regiones donde la intensidad del campo magnético es muy alta. Cada uno de estos puntos es más oscuro que su región circundante porque su temperatura es inferior al área que le rodea. *(SOHO/NASA.)*

En la década de los 60, muestras tomadas en perforaciones mostraron capas con magnetismo invertido en rocas volcánicas.[7] Ello puso en evidencia que el magnetismo de la Tierra se invierte cada 200 000 años, aunque ha habido periodos de más de seis millones de años sin cambios geomagnéticos.[8] Inmediatamente, el análisis de estas capas con magnetismo reversible demostró que la intensidad del campo decrece, cambia de dirección y crece en un periodo de unos pocos millares de años. El último cambio de dirección geomagnético fue hace 700 000 años. En los últimos tiempos, la intensidad del campo magnético de la Tierra ha ido decreciendo. Desde 1840, el campo magnético decrece a un ritmo de 15 nT/año,[9] lo que representa un 3% de decrecimiento por siglo, y la reconstrucción de datos permite la conclusión de que entre 1590 y 1840 hubo un decrecimiento de 2 nT/año.

En el pasado siglo XX, G. E. Hale descubrió que las manchas solares, que habían sido observadas durante cientos de años, generaban campo magnético. Demostró que estas manchas solares tenían un ciclo de 22 años en el que el campo magnético decrecía gradualmente, se invertía y crecía volviendo a la configuración inicial.[10] Se ha comprobado que las manchas solares implican un aumento en la intensidad del campo magnético de unos 200 mT.[11] Recientes observaciones han demostrado que las manchas solares son potentes remolinos magnéticos denominados vórtices solares. Aunque la superficie del Sol tiene un campo medio aparente de 0,10 mT en regiones sin manchas solares, pequeñas áreas de esas regiones tienen intensidades magnéticas que varían entre 20 y 100 mT.[12]

El viento solar, que consiste en partículas subatómicas cargadas lanzadas por el Sol a una velocidad de 400 Km/s,[13] genera campos magnéticos. Datos de satélite muestran que el campo magnético interplanetario es complejo y dinámico.[14, 15] Cerca de la Tierra, la intensidad del campo magnético interplanetario varía desde 1 a 37 nT. Algunas veces, el Sol lanza una gran explosión de partículas cargadas. Cuando uno de estos estallidos llega a la Tierra, su campo magnético causa una tormenta magnética que puede bloquear las comunicaciones por radio causando apagones en las emisiones. La nave espacial *Voyager* estuvo a menos de 94 AU (unidades astronómicas en su denominación inglesa) del Sol cuando midió el crecimiento del campo magnético interplanetario, fijándolo en 0,03 nT.[16, 17] El viento solar transporta un campo magnético que se puede medir incluso bastante más allá de la órbita de Plutón.

1 "Geomagnetic Frequently Asked Questions." United States National Geophysical Data Center, National Oceanic and Atmospheric Administration. http://www.ngdc.noaa.gov/seg/geomag/faqgeom.shtml As of Sept., 2006.
2 Yamazaki, T., and Oda, H., "Orbital Influence on Earth's Magnetic Field: 100,000-Year Periodicity in Inclination." *Science*, Mar. 29, 2002, Vol. 294 pp. 2435–2437.
3 Solanki, S. K., et al., "11,000 Year Sunspot Number Reconstruction." *IBGP Pages/World Data Center for Paleoclimatology Data Contribution Series #2005-015*. 2005. ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/paleo/climate-forcing/solar_variability/solanki2004-ssn.txt As of Sept., 2006.
4 Hellemans, A., and Bunch, B., *The Timetables of Science*. New York: Simon and Schuster, 1988. p. 75.
5 Kono, M., "Ships' Logs and Archeomagnetism." *Science*, May 12, 2006, Vol. 312, pp. 865–66.
6 Hermanus Magnetic Observatory, "Detailed History." http://www.hmo.ac.za/detailed-history.html As of Sept., 2006.
7 Dunn, J. R., et al., "Paleomagnetic Study of a Reversal of the Earth's Magnetic Field." *Science*, May 21, 1971, Vol. 172, pp. 840–844.
8 Merrill, R. T., and McFadden, P. L., "Geomagnetic Polarity Transitions." *Reviews of Geophysics*, May 1999, Vol. 37, No. 2, pp. 201–226.
9 Gubbins, D., Jones, A. L., and Finlay, C., "Fall in Earth's Magnetic Field is Erratic." *Science*, May 12, 2006, Vol 312, pp. 900–902.
10 Abbot, C. G., "Sun-Spots and Weather." *Science*, Dec. 8, 1933, Vol. 78, pp. 518–519.
11 Liang, H. F., Zhao, H. J., and Xiang, F. Y., "Vector Magnetic Field Measurement of NOAA AR 10197." *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, Aug. 2006, Vol. 6, No. 4, pp. 470–476.
12 Lin, H., and Rimmele, T., "The Granular Magnetic Fields of the Quiet Sun." *The Astrophysical Journal*, Mar. 20, 1999, Vol. 514, Pt. 1, pp. 448–455.
13 Hathaway, D., "The Solar Wind." *Solar Physics*, Marshall Space Flight Center, NASA http://solarscience.msfc. nasa.gov/SolarWind.shtml. Jun. 1, 2006, As of Oct., 2006.
14 Smith, E. J., et al., "The Sun and Heliosphere at Solar Maximum." *Science*, Nov. 14, 2003, Vol. 302, pp. 1165–1168.
15 Arnold, N., and Lyons, A., "Granta MIST: Meeting Report." *Astronomy and Geophysics*, Aug. 2006, Vol. 46, pp. 4.18–4.21.
16 Gurnett, D. A., and Kurth, W. S., "Electron Plasma Oscillations Upstream of the Solar Wind Termination Shock." *Science*, Sept. 23, 2005, Vol. 309, pp. 2025–2027.
17 Burlaga, L. F., et al., "Crossing the Termination Shock into the Helosheath: Magnetic Fields." *Science*, Sept. 23, 2005, Vol. 309, pp. 2027–2029.

Resumen

1. El campo magnético produce un efecto sobre las cargas móviles tal que éstas experimentan una fuerza perpendicular a su velocidad.
2. La fuerza magnética forma parte de la fuerza electromagnética, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza.
3. El módulo, dirección y sentido de un campo magnético $\vec{B}$ vienen definidos por la fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, ejercida sobre las cargas móviles.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Fuerza magnética		
Sobre una carga móvil	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	26.1
Sobre un elemento de corriente	$d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$	26.5
Unidad de campo magnético	La unidad del SI de campo magnético es el tesla (T). Una unidad comúnmente utilizada es el gauss (G), relacionada con el tesla por $1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T}$	26.3
2. Movimiento de cargas puntuales	Una partícula de masa m y carga q que se mueve con velocidad v en un plano perpendicular a un campo magnético describe una órbita circular. El periodo y frecuencia de este movimiento circular son independientes del radio de la órbita y de la velocidad de la partícula.	
Segunda ley de Newton	$qvB = m\frac{v^2}{r}$	26.6
Periodo de ciclotrón	$T = \frac{2\pi m}{qB}$	26.7
Frecuencia de ciclotrón	$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$	26.8
*Selector de velocidades	Un selector de velocidades está formado por campos eléctricos y magnéticos cruzados, de tal manera que las fuerzas eléctrica y magnética se equilibran para una partícula cuya velocidad v cumple la condición $v = \frac{E}{B}$	26.9
*Medida de Thompson de q/m	La desviación de una partícula cargada en un campo eléctrico depende de la velocidad de la partícula y es proporcional a la relación q/m de la misma. J. J. Thomson utilizó campos eléctricos y magnéticos cruzados para medir la velocidad de los rayos catódicos y después midió la relación q/m para estas partículas desviándolas en un campo eléctrico. Así demostró que todos los rayos catódicos estaban formados por partículas con la misma relación carga/masa. Estas partículas se llaman ahora electrones.	
*Espectrometría de masas	La relación masa/carga de un ion de velocidad conocida puede determinarse midiendo el radio de la trayectoria circular descrita por el ion en un campo magnético conocido.	
3. Espiras de corriente		
Momento magnético	$\vec{\mu} = NIA\hat{n}$	26.14
Momento de fuerza magnética	$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$	26.15
Energía potencial	$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$	26.16
Fuerza resultante	La fuerza resultante que actúa sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es nula.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
4. Efecto Hall	Cuando una cinta conductora que transporta una corriente se sitúa dentro de un campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre los portadores de carga origina una separación de cargas que se denomina efecto Hall. Este fenómeno da lugar a un voltaje V_H, llamado voltaje Hall. El signo de los portadores de carga puede determinarse midiendo el signo de este voltaje Hall, y su número por unidad de volumen a partir del módulo de V_H.	
Voltaje Hall	$V_H = E_H w = v_d B w = \frac{\lvert I \rvert}{nte} B$	26.17, 26.20
*Efecto Hall cuántico	Las medidas a temperaturas muy bajas en campos magnéticos muy grandes indican que la resistencia Hall $R_H = V_H/I$ está cuantizada y sólo puede tomar valores dados por $R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{R_K}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	26.21
*Constante de von Klitzing (definición de ohm)	$R_{K-90} = 25\,812{,}8076\ \Omega$ (exacto)	26.23

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

26.1 La regla de la mano izquierda es una respuesta a la pregunta. La definición de $\vec{B}$ es una convención. Si la definición de la dirección de $\vec{B}$ se cambiara tal como sugiere la pregunta, la ley de la fuerza de Lorentz se escribiría $\vec{F} = q\vec{v} \otimes \vec{B}$, donde el símbolo $\otimes$ debería denotar lo mismo que el del producto vectorial $\times$, pero considerando que el símbolo $\otimes$ requeriría una definición para este producto utilizando la regla de la mano izquierda en lugar de la regla de la mano derecha. De forma alternativa, la ley de la fuerza de Lorentz debería ser sustituida por $\vec{F} = \vec{B} \times q\vec{v}$, y entonces se seguiría aplicando la regla de la mano derecha.

26.2 (*b*) Cargadas negativamente. La fuerza $\vec{F}$ y el vector $\vec{v} \times \vec{B}$ son de sentidos opuestos si la partícula tiene carga negativa. Esto es consistente con la relación $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Respuestas a los problemas prácticos

26.1 $-1{,}3 \times 10^{-12}\ \mathrm{N}\ \hat{j}$

26.2 (*a*) 667 km/s, (*b*) en la dirección $-z$.

26.3 (*a*) $-2{,}88$ J. Obsérvese que esta energía potencial es menor que la calculada en el ejemplo. (La energía potencial es mínima cuando los vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos.)
(*b*) $+2{,}88$ J

26.4 $4{,}0 \times 10^{-5}$ m/s

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*
- Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Cuando un tubo de rayos catódicos se sitúa horizontalmente en un campo magnético dirigido verticalmente hacia arriba, los electrones emitidos desde el cátodo siguen una de las líneas discontinuas de la figura 26.30 hasta incidir en la pantalla del tubo. La trayectoria correcta es (*a*) 1, (*b*) 2, (*c*) 3, (*d*) 4, (*e*) 5. SSM

2 •• La dirección y sentido del campo eléctrico quedan determinados por los de la fuerza que este campo ejerce sobre la carga positiva. ¿Por qué *no* se puede definir la dirección y el sentido del campo magnético como la dirección y el sentido de la fuerza magnética ejercida sobre la carga positiva?

3 • Una *bombilla de centelleo* es una bombilla con un filamento largo, fino y flexible que cuando está bajo la acción de un pequeño

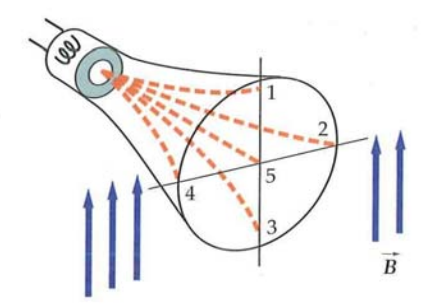


FIGURA 26.30 Problema 1

imán y se le aplica una corriente alterna de 60 Hz, el filamento sufre oscilaciones de una parte hacia la otra. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación? Explique su respuesta. SSM

4 • En un ciclotrón, la diferencia de potencial entre las *des* oscila con un periodo dado por la expresión $T = 2\pi m/(qB)$. Demostrar que la expresión a la derecha del signo igual tiene unidades de segundos dadas las unidades de B, q y m en teslas, coulombs y kilogramos, respectivamente.

5 • Un núcleo de ^{7}Li tiene una carga igual a $+3e$ y una masa igual a la de 7 protones. Se tiene un átomo de este Li más la de un protón adicional moviéndose ambos perpendicularmente a un campo uniforme $\vec{B}$. El módulo del momento del protón es igual al del núcleo. El camino recorrido por el protón tiene un radio de curvatura R_p y el del núcleo R_{Li}. La relación R_p/R_{Li} es aproximadamente de (*a*) 3/1, (*b*) 1/3, (*c*) 1/7, (*d*) 7/1, (*e*) 3/7, (*f*) 7/3.

6 • Un electrón moviéndose en la dirección $+x$ entra en una región en la que existe un campo magnético uniforme en la dirección $+y$. Cuando el electrón entra en esta región (*a*) será desviado hacia la dirección $+y$, (*b*) hacia la dirección $-y$, (*c*) hacia la dirección $+z$, (*c*) hacia la dirección $-z$, y (*e*) quedará sin desviación alguna en la dirección $+x$.

7 • En un selector de velocidades, la velocidad de la carga que no sufre desviación viene dada por la relación entre los módulos de los campos eléctrico y magnético. Demostrar que E/B en el SI tiene unidades de m/s si E y B se dan en volts/m y teslas, respectivamente. SSM

8 • ¿Cuáles son las propiedades de las líneas de campo magnético comparadas con las del campo eléctrico? Explicar similitudes y diferencias.

9 • Verdadero o falso:

(*a*) El momento del campo magnético de una barra magnética tiene la dirección que va desde su polo norte al sur.
(*b*) Dentro del material de la citada barra, el campo magnético tiene la dirección que va desde el polo sur al norte.
(*c*) Si en una espira simultáneamente se dobla la corriente y su área se divide por dos, su momento magnético queda invariable.
(*d*) El máximo momento de una fuerza ejercida sobre una espira colocada en un campo magnético se produce cuando la espira es perpendicular a la dirección del campo magnético.

10 •• Demostrar que la constante de von Klitzing, h/e^2, en el SI tiene unidades de resistencia (ohms) teniendo en cuenta que h y e tienen unidades de joules × segundo y coulombs, respectivamente.

11 ••• La teoría de la relatividad enuncia que ninguna ley de la Física puede depender de la velocidad absoluta de un objeto, la cual es imposible de definir. Por el contrario, el comportamiento de los objetos físicos, solamente puede depender de la velocidad relativa entre éstos. Nuevas perspectivas sobre la física se pudieron desarrollar partiendo de esta idea. Por ejemplo, en la figura 26.31, un imán se está moviendo con gran velocidad y un electrón que se encuentra por encima está en reposo con respecto a un observador en el laboratorio. Explique por qué existe una fuerza que actúa sobre el electrón. ¿En qué dirección apuntará la fuerza cuando el polo norte del imán pase directamente por debajo del electrón? Explique el fenómeno.

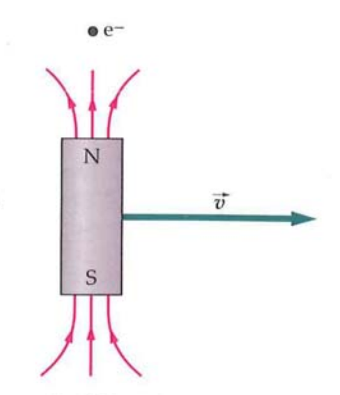


FIGURA 26.31 Problema 11

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

12 • Estimar la máxima fuerza magnética por unidad de longitud que podría ejercer el campo magnético terrestre sobre una corriente que circula por un hilo eléctrico doméstico.

13 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** ¿Cuál debería ser la mínima corriente necesaria para poder suspender un hilo eléctrico justo por encima de la superficie de la Tierra en un lugar de ella donde el campo magnético fuera horizontal? Asumir que el hilo tiene una densidad lineal de masa de 10 g/m. ¿Cómo se debería proceder para conseguirlo?

FUERZA EJERCIDA POR UN CAMPO MAGNÉTICO

14 • Hallar la fuerza magnética que actúa sobre un protón que se mueve con velocidad 4,46 Mm/s en el sentido positivo de las x en el interior de un campo magnético de 1,75 T dirigido en el sentido positivo de las z.

15 • Una carga $q = -3{,}64$ nC se mueve con velocidad de $2{,}75 \times 10^3$ m/s $\hat{i}$. Hallar la fuerza que actúa sobre la carga si el campo magnético es (*a*) 0,38 T $\hat{j}$, (*b*) 0,75 T $\hat{i}$ + 0,75 T $\hat{j}$, (*c*) 0,65 T $\hat{i}$, y (*d*) 0,75 T $\hat{i}$ + 0,75 T $\hat{k}$.

16 • Un campo magnético uniforme de valor 1,48 T $\hat{k}$ está dirigido en la dirección y sentido positivo del eje de las z. Hallar la fuerza que actúa sobre un protón si su velocidad es (*a*) 2,7 km/s $\hat{i}$, (*b*) 3,7 km/s $\hat{j}$, (*c*) 6,8 km/s $\hat{k}$, y (*d*) 4,0 km/s $\hat{i}$ + 3,0 km/s $\hat{j}$.

17 • Un segmento de conductor recto de 2 m de largo forma un ángulo de 30° con un campo magnético uniforme de 0,37 T. Hallar la fuerza que actúa sobre el conductor si por él circula una corriente de 2 A.

18 • Un segmento de un hilo recto I = (2,7 A) y $\vec{L}$ = 3,0 cm $\hat{i}$ + 4,0 cm $\hat{j}$ se encuentra en un campo B = 1,3 T $\hat{i}$. Determinar la fuerza que actúa sobre el hilo.

19 • ¿Cuál es la fuerza (módulo, dirección y sentido) de un electrón con velocidad $v = (2i - 3j) \times 10^6$ m/s en un campo magnético B = 0,80 T $\hat{i}$ + 0,60 T $\hat{j}$ − 0,40 T $\hat{k}$?

20 •• El segmento conductor de la figura 26.32 transporta una corriente de 1,8 A de a hasta b y se encuentra en el interior de un campo magnético $B = 1{,}2\text{ T }\hat{k}$. Determinar la fuerza total que actúa sobre el conductor y demostrar que es la misma que actuaría si se tratara de un segmento recto de a a b.

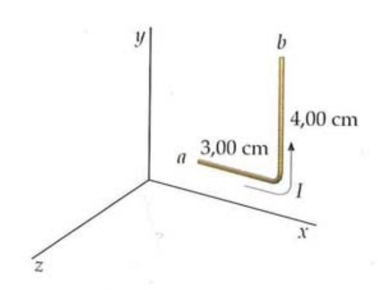


FIGURA 26.32 Problema 20

21 •• Un conductor recto, rígido y horizontal, de longitud 25 cm y masa 50 g está conectado a una fuente de fem por conductores flexibles. Un campo magnético de 1,33 T es horizontal y perpendicular al conductor. Hallar la corriente necesaria para hacer flotar el conductor, es decir, de modo que la fuerza magnética equilibre el peso del alambre.

22 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un simple magnetómetro (*gausímetro*) para la medida de campos magnéticos horizontales consiste en un alambre rígido de 50 cm que cuelga de un pivote conductor de modo que su extremo libre hace contacto con una cubeta de mercurio (figura 26.33). El mercurio proporciona un contacto eléctrico sin restringir el movimiento del alambre. El alambre posee una masa de 5 g y conduce una corriente hacia abajo. (*a*) ¿Cuál es el desplazamiento angular de equilibrio del alambre respecto a la posición vertical si el campo magnético horizontal es 0,040 T y la corriente 0,20 A? (*b*) ¿Cuál es la sensibilidad de este gausímetro? Es decir, ¿cuál es la relación entre la entrada y la salida en radianes por tesla?



FIGURA 26.33 Problema 22

23 •• Sea un hilo recto de 10 cm paralelo al eje x por el que circula una corriente de 2,0 A en la dirección $+x$. La fuerza sobre el hilo debido a un campo $\vec{B}$ es $3{,}0\text{ N }\hat{j} + 2{,}0\text{ N }\hat{k}$. Si el hilo gira de forma que queda paralelo al eje y con la corriente circulando en la dirección $+y$, la fuerza sobre el hilo viene a ser $-3{,}0\text{ N }\hat{j} - 2{,}0\text{ N }\hat{k}$. Determinar el campo $\vec{B}$. SSM

24 •• Sea un hilo recto de 10 cm paralelo al eje z por el que circula una corriente de 4,0 A en la dirección $+z$. La fuerza sobre el hilo debido a un campo $\vec{B}$ es $-0{,}20\text{ N }\hat{i} + 0{,}20\text{ N }\hat{j}$. Si el hilo gira de forma que queda paralelo al eje x con la corriente circulando en la dirección $+x$, la fuerza sobre el hilo viene a ser $0{,}20\ \hat{k}$ N. Determinar el campo $\vec{B}$.

25 •• Un cable conductor por el que circula una corriente I tiene la forma de una espira semicircular de radio R situada sobre el plano xy. El hilo está inmerso en un campo magnético cuya dirección es $+z$ (figura 26.34). Demostrar que la fuerza que actúa sobre la espira es cero. SSM

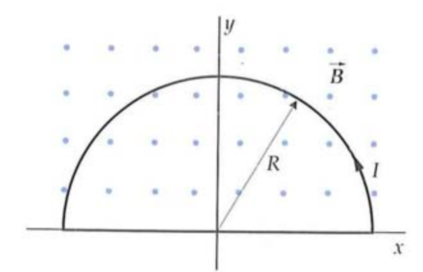


FIGURA 26.34 Problema 25

26 ••• Un cable cerrado según una forma arbitraria transporta una corriente I dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Demostrar explícitamente que la fuerza total que actúa sobre la parte del alambre desde un punto a hasta otro punto b es $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$, donde $\vec{L}$ es el vector de a a b. En otras palabras, demostrar que la fuerza sobre una sector arbitrario del hilo curvado es igual que la que se ejerce sobre un segmento de un hilo recto por el que circula la misma corriente y al que se le conectan los dos extremos del sector arbitrario.

MOVIMIENTO DE UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO MAGNÉTICO

27 • Un protón se mueve en una órbita circular de radio 65 cm perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 0,75 T. (*a*) ¿Cuál es el periodo correspondiente a este movimiento? (*b*) Hallar el módulo de la velocidad del protón. (*c*) Hallar la energía cinética del protón. SSM

28 • Un electrón de energía cinética 45 keV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético de 0,325 T. (*a*) Hallar el radio de la órbita. (*b*) Hallar la frecuencia y el periodo del movimiento.

29 •• Los protones, deutrones (ambos con carga $+e$) y las partículas alfa, cuya carga es $+2e$, en una región en la que existe un campo magnético describen trayectorias circulares que tienen el mismo radio. Considerando que $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$. Comparar (*a*) sus velocidades, (*b*) sus energías cinéticas, y (*c*) los módulos de sus momentos angulares alrededor de sus órbitas.

30 •• Una partícula de carga q y masa m tiene una cantidad de movimiento $p = mv$ y una energía cinética K. Si se mueve en una órbita circular de radio R perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$ demostrar que (*a*) $p = BqR$ y (*b*) $K = \frac{1}{2}B^2q^2R^2/m$.

31 •• Un haz de partículas entra con velocidad $\vec{v}$ en una región de campo magnético uniforme $\vec{B}$ que forma un pequeño ángulo θ con $\vec{v}$. Demostrar que después de que una partícula se mueve una distancia $2\pi(m/qB)v\cos\theta$, medida a lo largo de la dirección de $\vec{B}$, la velocidad de la partícula tiene la misma dirección y sentido que cuando entra en el campo. SSM

32 •• Un protón de velocidad 10^6 m/s entra en una región de campo magnético uniforme $B = 0{,}800$ T, dirigido hacia dentro de la página como muestra la figura 26.35. El ángulo θ es 60°. Determinar el ángulo ϕ y la distancia d.

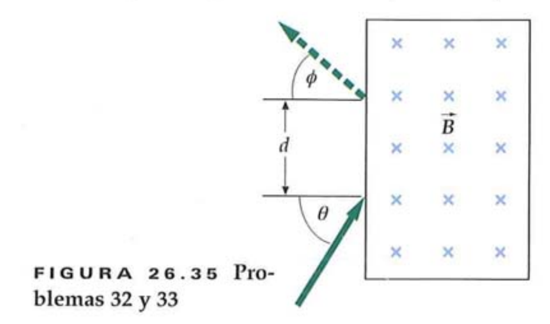


FIGURA 26.35 Problemas 32 y 33

33 •• Supongamos que en la figura 26.35, $B = 0{,}6$ T, $d = 0{,}4$ m y $\theta = 24°$. Determinar la velocidad v y el ángulo ϕ si las partículas son (*a*) protones y (*b*) deuterones. Asumir que $m_d = 2m_p$. SSM

34 •• Supongamos que el campo magnético de la galaxia en alguna zona interestelar es de 10^{-9} T. Una partícula de polvo interestelar tiene masa 10 μg y carga 0,300 nC. ¿Cuántos años necesita para completar una órbita circular en el campo magnético?

APLICACIONES DE LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE PARTÍCULAS CARGADAS

35 • Un selector de velocidad tiene un campo magnético de valor 0,28 T que es perpendicular a un campo eléctrico de valor 0,46 MV/m. (*a*) ¿Cuál deberá ser la velocidad de una partícula para pasar a través de dicho selector sin ser desviada? ¿Qué energía deberían tener (*b*) los protones y (*c*) los electrones para pasar a través del mismo sin ser desviados? SSM

36 •• Un haz de protones se mueve a lo largo del eje x en su sentido positivo con una velocidad de 12,4 km/s a través de una región de campos cruzados equilibrados con desviación nula. (*a*) Si existe un campo magnético de valor 0,85 T en el sentido positivo de las y, hallar el módulo y dirección del campo eléctrico. (*b*) ¿Serán desviados los electrones de la misma velocidad que los protones por estos campos? Si es así, ¿en qué dirección y sentido?

37 •• Las placas de un aparato Thomson q/m son de 6,0 cm de largo y están separadas por 1,2 cm. El extremo de las placas está a 30,0 cm de la pantalla del tubo. La energía cinética de los electrones es de 2,8 keV. (*a*) Si se aplica un potencial de 25 V a través de las placas de desviación, ¿en cuánto se desviará el haz? (*b*) Hallar el valor de un campo cruzado que permita al haz pasar sin ser desviado.

38 •• El cloro tiene dos isótopos estables, ^{35}Cl y ^{37}Cl, cuyas abundancias naturales son, respectivamente, 76% y 24% (aproximadamente). El gas cloro ionizado con una sola carga ha de separarse en sus componentes isotópicos mediante un espectrómetro de masas. El campo magnético del espectrómetro es 1,2 T. ¿Cuál es el valor mínimo del potencial a través del cual deben acelerarse estos iones para que la separación entre ellos sea de 1,4 cm?

39 •• Un ion ^{24}Mg simplemente ionizado (masa $3{,}983 \times 10^{-26}$ kg) se acelera a través de un potencial de 2,5 kV y se desvía en un campo magnético de 557 G que existe en un espectrómetro de masas. (*a*) Hallar el radio de curvatura de la órbita del ion. (*b*) ¿Cuál es la diferencia de los radios para los iones ^{26}Mg y ^{24}Mg? (Suponer que su relación de masas es 26:24.) SSM

40 •• Un haz de iones ^{6}Li y ^{7}Li, ionizados con una carga unidad, circula a través de un selector de velocidades con velocidad perpendicular a un campo magnético uniforme. Si el diámetro de la órbita de los iones ^{6}Li es de 15 cm, ¿cuál es el diámetro de la correspondiente a los iones ^{7}Li?

41 •• En el ejemplo 26.6, determinar el tiempo requerido para que un ion ^{58}Ni y un ion ^{60}Ni completen la trayectoria semicircular.

42 •• Antes de entrar en un espectrómetro de masas, unos iones pasan por un selector de velocidades constituido por placas paralelas separadas entre sí 2,0 mm y entre las que existe una diferencia de potencial de 160 V. El campo magnético entre las placas es de 0,42 T. El campo magnético en el espectrómetro de masas es de 1,2 T. Calcular (*a*) la velocidad con la que se introducen los iones en el espectrómetro y (*b*) la diferencia en los diámetros de las órbitas del ^{238}U y ^{235}U simplemente ionizados. (La masa de un ion ^{235}U es $3{,}903 \times 10^{-25}$ kg.)

43 •• Un ciclotrón para acelerar protones tiene un campo magnético de 1,4 T y un radio de 0,7 m. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de ciclotrón? (*b*) Hallar la energía máxima de los protones cuando salen del mismo. (*c*) ¿En qué variará la respuesta a este problema si se utilizan deuterones, que tienen la misma carga pero doble masa, en lugar de protones? SSM

44 •• Un determinado ciclotrón tiene un campo magnético de 1,8 T y está proyectado para acelerar protones hasta 25 MeV. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de ciclotrón? (*b*) ¿Cuál deberá ser el radio mínimo del imán para obtener una energía de salida de 25 MeV? (*c*) Si se aplica un potencial alterno a las des con un valor máximo de 50 kV, ¿cuántas vueltas orbitales deberán realizar los protones antes de emerger con la energía de 25 MeV?

45 •• Demostrar que la frecuencia de ciclotrón es la misma para deuterones que para partículas alfa y que es la mitad de la correspondiente a un protón en el interior del mismo campo magnético. El deuterón tiene la carga del protón y la partícula alfa el doble y además se debe asumir que $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$.

46 ••• Demostrar que el radio de la órbita de una partícula cargada en un ciclotrón es proporcional a la raíz cuadrada del número de órbitas recorridas.

MOMENTOS DE FUERZA SOBRE ESPIRAS, IMANES Y MOMENTOS MAGNÉTICOS

47 • Una bobina circular pequeña de 20 vueltas de alambre está en un campo magnético uniforme de 0,5 T de modo que la normal al plano de la bobina forma un ángulo de 60° con la dirección de B. El radio de la bobina es 4,0 cm y por ella circula una corriente de 3,0 A. (*a*) ¿Cuál es el valor del momento magnético de la bobina? (*b*) ¿Cuál es momento que se ejerce sobre la bobina? SSM

48 • ¿Cuál es el momento del par máximo que actúa sobre una bobina circular de 400 vueltas de radio 0,75 cm que transporta una corriente de 1,6 mA y está situada en un campo magnético uniforme de 0,25 T?

49 • Un cable conductor se dobla en forma de un cuadrado de lado $L = 6$ cm y se sitúa en el plano xy. El cable transporta una corriente $I = 2{,}5$ A. ¿Cuál es el módulo del momento que actúa sobre el conductor si existe un campo magnético de 0,3 T (*a*) en la dirección z, (*b*) en la dirección x? SSM

50 • Un hilo por el que circula una corriente de 2,5 A tiene la forma de un triángulo equilátero de lado 8,0 cm. El triángulo está en el plano $z = 0$ ¿Cuál es el módulo del momento del par de torsión sobre este hilo si en esta región del espacio existe un campo magnético cuyo módulo es 0,30 T y cuya dirección es (*a*) la del eje $+z$ (dirección positiva del eje z) y (*b*) la del eje $+x$?

51 •• Una espira circular rígida de radio R y masa m transporta una corriente I y yace en el plano xy sobre una mesa plana rugosa. Existe un campo magnético horizontal de módulo B. ¿Cuál es el valor mínimo de B para que un borde de la espira se levante sobre la mesa?

52 •• Una bobina rectangular de 50 vueltas tiene lados de 5,00 y 8,00 cm y transporta una corriente de 1,75 A. Está orientada como indica la figura 26.36 y pivota alrededor del eje z. (*a*) Si el cable situado en el plano xy forma un ángulo $\theta = 37°$ con el eje y como se indica, ¿qué ángulo forma el vector unitario normal con el eje x? (*b*) Expresar $\hat{n}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$. (*c*) ¿Cuál es el momento magnético de la bobina? (*d*) Determinar el momento que actúa sobre la bobina cuando se sitúa en un campo magnético uniforme $\vec{B} = 1{,}5\text{ T}\,\hat{j}$. (*e*) Determinar la energía potencial de la bobina en este campo (La energía potencial es cero cuando $\theta = 0$.)

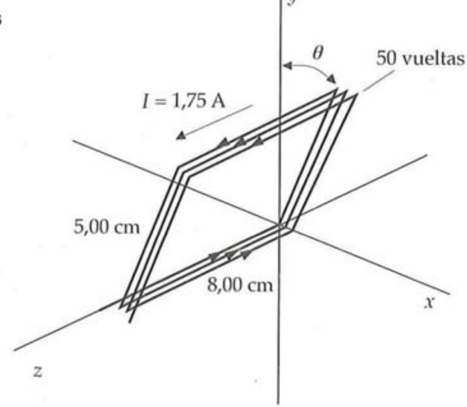


FIGURA 26.36
Problemas 52 y 53

53 •• En la bobina del problema 52, el campo magnético uniforme es ahora $\vec{B} = 2{,}0\text{ T}\,\hat{j}$. Determinar el momento cuando el vector unitario normal es (*a*) $\hat{i}$, (*b*) $\hat{j}$, (*c*) $-\hat{j}$, y (*d*) $(\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$. SSM

54 •• Un pequeño imán de longitud 6,8 cm se coloca formando un ángulo de 60° respecto a la dirección de un campo magnético uniforme de valor 0,04 T. El momento observado tiene el valor 0,10 N · m. (*a*) Hallar el momento magnético del imán. (*b*) Determinar la energía cinética del imán.

55 •• Una espira de alambre está formada por dos semicírculos conectados por dos segmentos rectos (figura 26.37). Los radios interior y exterior son 0,3 y 0,5 m, respectivamente. Por el circuito fluye una corriente de 1,5 A, de tal forma que en el semicírculo exterior circula en sentido horario. ¿Cuál es el momento magnético de esta espira de corriente?

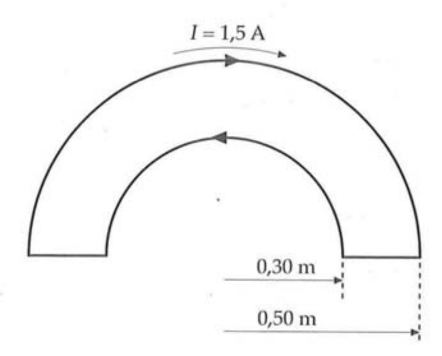


FIGURA 26.37
Problema 55

56 •• Un alambre de longitud L se enrolla formando una bobina circular de N espiras. Demostrar que cuando esta bobina transporta una corriente I, su momento magnético tiene módulo $IL^2/(4\pi N)$.

57 •• Una partícula de carga q y masa m se mueve en una circunferencia de radio R con una velocidad angular w. (*a*) Demostrar que la corriente media creada por el movimiento de la partícula es $\omega q/(2\pi)$ y que el módulo del momento magnético de la órbita es $\frac{1}{2}q\omega r^2$. (*b*) Demostrar que el movimiento angular de esta partícula tiene el valor $\vec{L} = mR^2w$ y que los vectores de momento magnético y momento angular están relacionados por $\vec{\mu} = \frac{1}{2}(q/m)\,\vec{L}$. SSM

58 ••• Un cilindro hueco de longitud L posee los radios R_i interior y R_e exterior (figura 26.38). El cilindro tiene una densidad de carga uniforme ρ. Deducir una expresión para el momento magnético en función de la velocidad angular de rotación ω del cilindro alrededor de su eje.

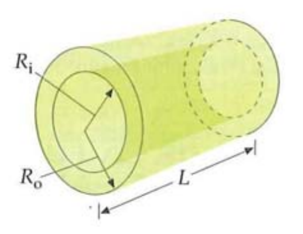


FIGURA 26.38 **Problema 58**

59 ••• Una varilla no conductora de masa m y longitud L tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ y se hace girar con velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa a través de uno de sus extremos y es perpendicular a la varilla. (*a*) Considerar un pequeño segmento de longitud dx y carga $dq = \lambda\, dx$ a una distancia x del eje de giro (figura 26.39). Demostrar que la corriente media creada por el movimiento de esta varilla es $\omega\, dq/(2\pi)$ y demostrar que el movimiento magnético de la varilla es $\frac{1}{2}\lambda\omega r^2\, dx$. (*b*) Integrar el resultado para demostrar que el momento magnético total de la varilla es $\frac{1}{6}\lambda\omega L^3$. (*c*) Demostrar que el momento magnético $\vec{\mu}$ y el momento angular $\vec{L}$ están relacionados por $\vec{\mu} = \frac{1}{2}(Q/m)\vec{L}$, siendo Q la carga total sobre la varilla. SSM

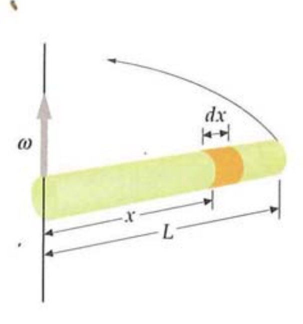


FIGURA 26.39
Problema 59

60 ••• Un disco no uniforme, no conductor de masa m, radio R y carga total Q posee una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 r/R$ y una masa por unidad de área $\sigma_m = (m/Q)\,\sigma$. El disco gira con velocidad angular w respecto a su eje. (*a*) Demostrar que el momento magnético del disco tiene módulo $\frac{3}{10}\omega Q R^2$. (*b*) Demostrar que el momento magnético $\vec{\mu}$ y el momento angular $\vec{L}$ están relacionados por la expresión $\vec{\mu} = \frac{1}{2}(Q/m)\vec{L}$.

61 ••• Una corteza esférica de radio R posee una densidad superficial de carga σ. La esfera gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω. Determinar el momento magnético de esta esfera giratoria. SSM

62 ••• Una esfera sólida de radio R posee una densidad de carga uniforme ρ. La esfera gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω. Determinar el momento magnético de la esfera giratoria.

63 ••• Un disco uniforme de masa m, radio R y densidad superficial de carga σ gira alrededor de su centro con velocidad angular ω, tal como se muestra en la figura 26.40. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ atraviesa el disco formando un ángulo θ con el eje de rotación. Calcúlese (*a*) el momento neto de la fuerza que actúa sobre el disco y (*b*) la frecuencia de precesión del disco debida al campo magnético.

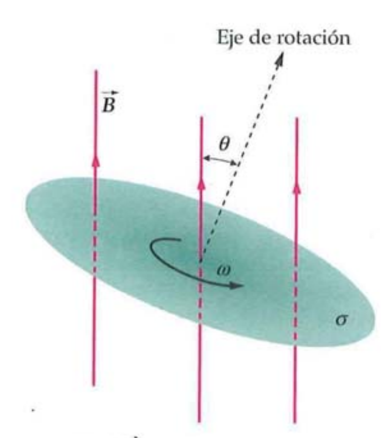


FIGURA 26.40 Problema 63

EFECTO HALL

64 • Una cinta de metal de 2,00 cm de ancho y 0,100 cm de espesor lleva una corriente de 20,0 A y está situada en el interior de un campo magnético de 2,00 T, según se ve en la figura 26.41. El voltaje Hall se mide y resulta ser de 4,27 μV. (*a*) Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones en la cinta. (*b*) Hallar la densidad numérica de los portadores de carga de la cinta. (*c*) ¿Cuál de los puntos *a* o *b* se encuentra a mayor potencial?

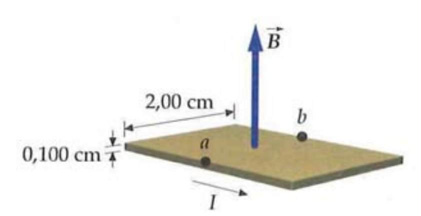


FIGURA 26.41 Problemas 64 y 65

65 •• La densidad de electrones libres en el cobre es de 8,47 $\times 10^{22}$ electrones por centímetro cúbico. Si la cinta de metal de la figura 26.41 es de cobre y la corriente es 10,0 A, hallar (*a*) la velocidad de desplazamiento v_d y (*b*) el voltaje Hall. (Considerar que el campo magnético es 2,00 T.) SSM

66 •• APLICACIÓN A LA INGENIERÍA Se utiliza una cinta de cobre ($n = 8,47 \times 10^{22}$ electrones por centímetro cúbico) de 2,00 cm y 0,100 cm de espesor para medir los valores de campos magnéticos desconocidos que son perpendiculares a la cinta. Hallar el valor de B cuando $I =$ 20,0 A y el voltaje Hall es (*a*) 2,00 μV, (*b*) 5,25 μV y (*c*) 8,00 μV.

67 •• APLICACIÓN BIOLÓGICA La sangre contiene iones cargados de modo que al moverse produce un voltaje Hall a través del diámetro de una arteria. Una arteria gruesa con un diámetro de 0,85 cm tiene una velocidad de flujo de 0,60 m/s. Si una sección de esta arteria se encuentra en un campo magnético de 0,20 T, ¿cuál es la diferencia de potencial a través del diámetro de la arteria?

68 •• El coeficiente Hall R viene definido por $R = E_y/J_xB_z$, en donde J_x es la corriente por unidad de área en la dirección x del conductor, B_z es el campo magnético en la dirección z, y E_y es el campo Hall en la dirección y. Demostrar que el coeficiente Hall es $1/(nq)$, en donde q es la carga de los portadores, $-1,6 \times 10^{-19}$ C si se trata de electrones. (Los coeficientes Hall de los metales monovalentes, tales como el cobre, la plata y el sodio, son, por lo tanto, negativos.)

69 •• El aluminio tiene una densidad de $2,7 \times 10^3$ kg/m^3 y una masa molar de 27 g/mol. El coeficiente Hall del aluminio es $R = -0,30 \times 10^{-10}$ m^3/C. (Véase el problema 68 para la definición de R.) Determinar el número de electrones de conducción por átomo de aluminio. SSM

PROBLEMAS GENERALES

70 • Un conductor largo paralelo al eje x lleva una corriente de 6,50 A en el sentido positivo de x. Existe un campo magnético uniforme de valor $\vec{B} = 1,35$ T $\hat{j}$. Hallar la fuerza por unidad de longitud del conductor.

71 • Una partícula alfa (carga + $2e$) se mueve en una trayectoria circular de radio 0,50 m en el interior de un campo magnético de 0,10 T. Hallar (*a*) el periodo, (*b*) el módulo de la velocidad y (*c*) la energía cinética (en electronvolts) de la partícula alfa. Tomar $m = 6,65 \times 10^{-27}$ kg como masa de la partícula alfa.

72 •• La intensidad de polo q_m de un imán en forma de barra se define por $\vec{\mu} = q_m\vec{\ell}$, en donde $\vec{\mu}$ es la longitud del imán. Demostrar que el momento ejercido por un campo magnético uniforme $\vec{B}$ sobre este imán es el mismo que si una fuerza $+q_m\vec{B}$ se ejerciera sobre el polo norte y una fuerza $-q_m\vec{B}$ se ejerciera sobre el polo sur.

73 •• Una partícula de masa m y carga q entra en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a lo largo del eje x. La velocidad inicial de la partícula es $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$, de modo que la partícula se mueve en una trayectoria helicoidal. (*a*) Demostrar que el radio de la hélice es $r = mv_{0y}/qB$. (*b*) Demostrar que la partícula tarda un tiempo $\Delta t = 2\pi m/qB$ en completar una órbita alrededor de la hélice. SSM

74 •• Una barra metálica de masa m está apoyada sobre un par de raíles conductores horizontales separados una distancia L y unidas a un dispositivo que suministra una corriente constante I al circuito, según se ve en la figura 26.42. Se establece un campo magnético uniforme $\vec{B}$ del modo indicado. Si no hay un rozamiento y la barra parte del reposo en $t = 0$, (*a*) ¿en qué dirección se moverá la barra? (*b*) Demostrar que en el tiempo t, la barra tendrá una velocidad $(BIL/m)t$.

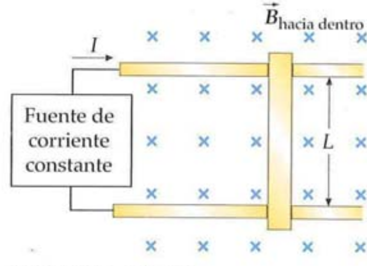


FIGURA 26.42 Problemas 74 y 75

75 •• En la figura 26.42 suponer que los raíles carecen de rozamiento pero están inclinados hacia arriba de modo que forman un ángulo θ con la horizontal. (*a*) ¿Qué campo magnético vertical B se necesita para que la barra no se deslice hacia abajo por los raíles? (*b*) ¿Cuál es la aceleración de la barra si B es el doble que el valor hallado en (*a*)? SSM

76 •• Una barra magnética larga y estrecha que posee un momento magnético $\vec{\mu}$ paralelo a su eje longitudinal está suspendida de su centro como la aguja de una brújula sin rozamiento. Situada en un campo magnético $\vec{B}$, la aguja se alinea con el campo. Si se desplaza un pequeño ángulo θ, demostrar que la aguja oscilará alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu B}{I}}$, donde I es el momento de inercia respecto al punto de suspensión.

77 •• Un hilo conductor es paralelo al eje y. Se mueve en la dirección x positiva con una velocidad de 20 m/s en un campo magnético $B = 0{,}50\ \mathrm{T}\ \hat{k}$. (*a*) Determinar el módulo, dirección y sentido de la fuerza magnética que actúa sobre un electrón del conductor. (*b*) Debido a esta fuerza magnética, los electrones se mueven a un extremo del conductor dejando el otro extremo positivamente cargado, hasta que el campo eléctrico debido a esta separación de carga ejerce una fuerza sobre los electrones que equilibra la fuerza magnética. Determinar el módulo, dirección y sentido de este campo eléctrico en estado estacionario. (*c*) Supongamos que el cable móvil tiene 2 metros de longitud. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus dos extremos debido a este campo eléctrico?

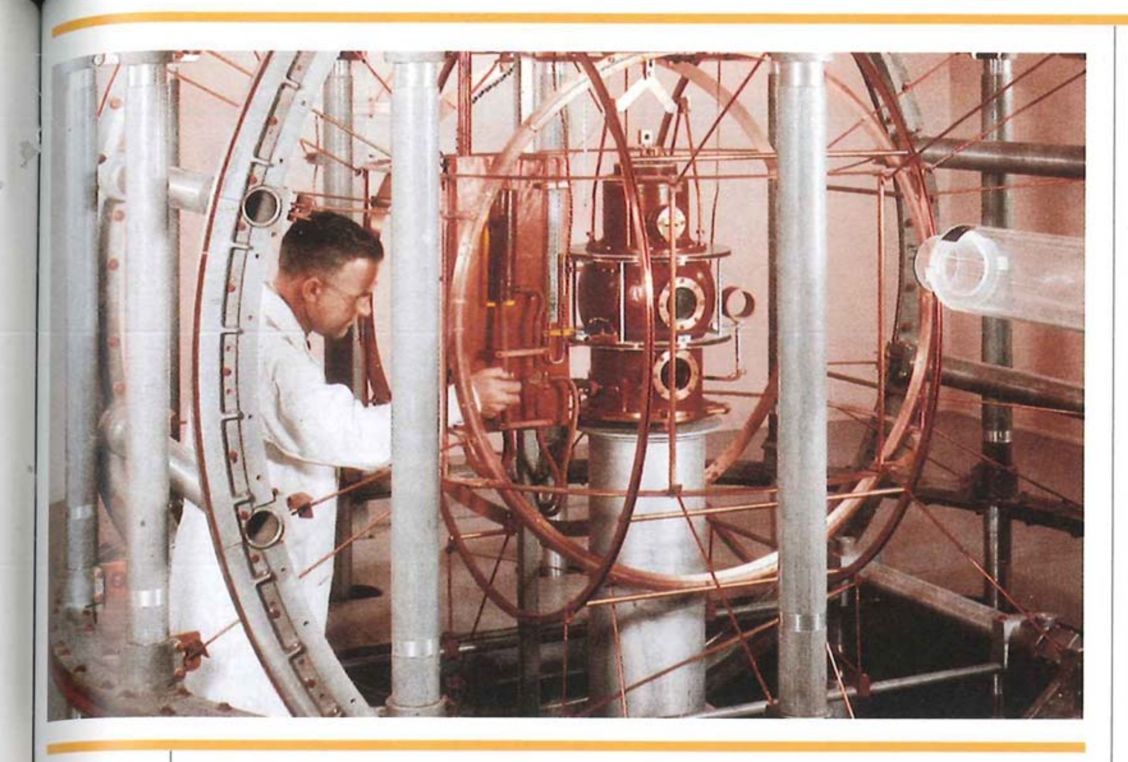
78 ••• Una espira circular de alambre de masa m transporta una corriente I en un campo magnético uniforme. Inicialmente está en equilibrio con su vector momento magnético alineado con el campo magnético. Se da a la espira un pequeño giro alrededor de un diámetro y luego se deja en libertad. ¿Cuál es el periodo del movimiento? (Suponer que el único momento ejercido sobre la espira se debe al campo magnético.)

79 ••• Un pequeño imán en forma de barra posee un momento magnético $\vec{\mu}$ que forma un ángulo θ con el eje x, y que se encuentra en un campo magnético no uniforme dado por $\vec{B} = B_x(x)\hat{i} + B_y(y)\hat{j}$. Utilizar $F_x = -\partial U/\partial x$, $F_y = -\partial U/\partial y$, y $F_z = -\partial U/\partial z$, para demostrar que sobre el imán actúa una fuerza neta que viene dada, aproximadamente, por

$$\vec{F} = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x}\hat{i} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y}\hat{j}$$

80 •• Un protón, un deuterón y una partícula alpha se mueven en un campo magnético perpendicular a sus velocidades con la misma energía cinética. Sean R_p, R_d y R_α los radios de sus órbitas respectivas. El deuterón y el protón tienen la misma carga, que es la mitad de la carga de la partícula α, y sus masas son $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$, respectivamente. Determinar las relaciones de sus radios R_d/R_p y R_α/R_p.

81 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un espectrómetro de masas utiliza un campo magnético uniforme cuyo módulo es 0,75 T. Para calibrar el aparato, se miden las masas de varios iones de isótopos de carbono con una carga positiva haciendo el promedio de la posición de los impactos de los iones que han entrado en el espectrómetro con una energía de 25 KeV. Un dispositivo con sensibilidad para la medida de posición de 0,50 mm forma parte del dispositivo. ¿Cuál será el límite en la resolución de medida de este espectrómetro de masas (dada en kg), para iones de este rango de masas, es decir, considerando aquellos iones cuya masa es del orden de los átomos de carbono?





ESTAS BOBINAS DEL KETTERING MAGNETICS LABORATORY DE LA UNIVERSIDAD DE OAKLAND (EE.UU.) SE DENOMINAN BOBINAS DE HELMHOLTZ. SE UTILIZAN PARA NEUTRALIZAR EL CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE Y PROPORCIONAR UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EN UNA PEQUEÑA REGIÓN DEL ESPACIO CON EL FIN DE ESTUDIAR LAS PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA. *(Bob Williamson, Oakland University, Rochester, Michigan.)*

Fuentes del campo magnético

27.1 Campo magnético creado por cargas puntuales en movimiento
27.2 Campo magnético creado por corrientes eléctricas: ley de Biot y Savart
27.3 Ley de Gauss para el magnetismo
27.4 Ley de Ampère
27.5 El magnetismo en la materia

? ¿Tiene idea de cuál es el campo magnético de una bobina por la que pasa una corriente eléctrica? (Véase el ejemplo 27.2.)

Las primeras fuentes conocidas del magnetismo fueron los imanes permanentes. Un mes después de que Oersted anunciase su descubrimiento acerca de la desviación de la aguja de una brújula por la acción de una corriente eléctrica, Jean Baptiste Biot y Felix Savart describieron los resultados de sus medidas del momento de fuerza que actúa sobre un imán próximo a un conductor largo por el que circula corriente y analizaron estos resultados en función del campo magnético producido por cada elemento de la corriente. André Marie Ampère amplió estos experimentos y demostró que los propios elementos de corriente experimentan una fuerza en presencia de un campo magnético; en particular, demostró que dos corrientes se ejercen fuerzas entre sí.

En este capítulo, comenzaremos por considerar el campo magnético producido por una sola carga móvil y por las cargas en movimiento de un elemento de corriente. A continuación, calcularemos los campos magnéticos producidos por algunas configuraciones de corriente comunes, tales como un segmento de alambre recto, un alambre largo y recto, una espira de corriente y un solenoide. Posteriormente, abordaremos la ley de Ampère, que relaciona la integral de línea del campo magnético alrededor de una espira cerrada con la corriente total que atraviesa la espira. Finalmente, consideraremos las propiedades magnéticas de la materia.

27.1 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR CARGAS PUNTUALES EN MOVIMIENTO

Cuando una carga puntual q se mueve con velocidad $\vec{v}$, se produce un campo magnético $\vec{B}$ en el espacio dado por*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \qquad 27.1$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL MÓVIL

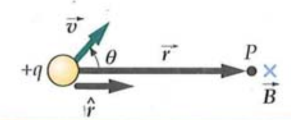


FIGURA 27.1 Una carga puntual q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ produce un campo magnético $\vec{B}$ en un punto P en la dirección $\vec{v} \times \hat{r}$, siendo $\vec{v}$ el vector unitario dirigido desde la carga al punto P. El campo varía en razón inversa al cuadrado de la distancia desde la carga al punto considerado y es proporcional al seno del ángulo que forman $\vec{v}$ y $\hat{r}$. (La cruz azul en el punto P indica que la dirección del campo es perpendicular al papel y hacia dentro.)

en donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta desde la carga q, que se mueve con velocidad $\vec{v}$, al punto del campo P (de observación del campo) (figura 27.1) y μ_0 es una constante de proporcionalidad llamada **permeabilidad del espacio libre,**† de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A} = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2} \qquad 27.2$$

Las unidades de μ_0 son tales que B debe darse en teslas cuando q se exprese en coulombs, n en metros por segundo y r en metros. La unidad $\mathrm{N/A^2}$ procede del hecho de que $1\,T = 1\,\mathrm{N/A \cdot m}$. La constante $1/(4\pi)$ se incluye arbitrariamente en la ecuación 27.1 a fin de que el factor 4p no aparezca en la ley de Ampère (ecuación 27.15), que estudiaremos en la sección 27.4.

Ejemplo 27.1 Campo magnético creado por una carga puntual en movimiento

Una carga puntual de módulo $q = 4{,}5$ nC se mueve con velocidad $\vec{v} = 3{,}0$ m/s $\hat{i}$ paralelamente al eje x a lo largo de la recta $y = 3$ m. Determinar el campo magnético producido en el origen por esta carga cuando se encuentra en el punto $x = -4$ m, $y = 3$ m, como indica la figura 27.2.

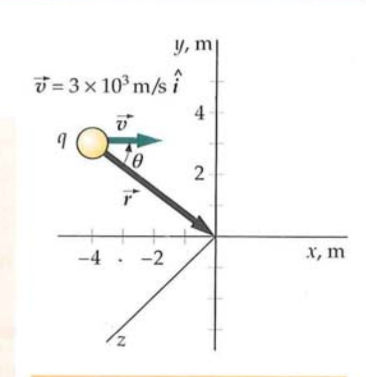


FIGURA 27.2

PLANTEAMIENTO El campo magnético producido por una partícula cargada en movimiento viene dado por la ecuación 27.1.

SOLUCIÓN

1. El campo magnético viene dado por la ecuación 27.1: $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad$ con $\quad \vec{v} = v\hat{i}$

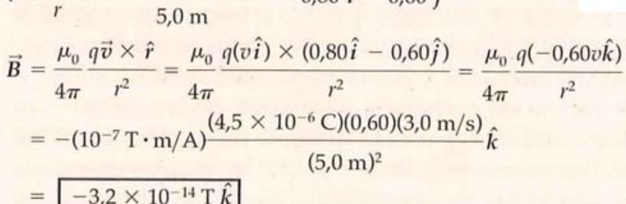
2. Determinar $\hat{r}$ y r de la figura 27.2 y escribir $\hat{r}$ en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$:

$$\vec{r} = 4{,}0\,\mathrm{m}\,\hat{i} - 3{,}0\,\mathrm{m}\,\hat{j}$$

$$r = \sqrt{4{,}0^2 + 3{,}0^2}\,\mathrm{m} = 5{,}0\,\mathrm{m}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{4{,}0\,\mathrm{m}\,\hat{i} - 3{,}0\,\mathrm{m}\,\hat{j}}{5{,}0\,\mathrm{m}} = 0{,}80\,\hat{i} - 0{,}60\,\hat{j}$$

3. Aplicar los resultados anteriores en la ecuación 27.1:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{i}) \times (0{,}80\hat{i} - 0{,}60\hat{j})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(-0{,}60v\hat{k})}{r^2}$$

$$= -(10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A})\frac{(4{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C})(0{,}60)(3{,}0\,\mathrm{m/s})}{(5{,}0\,\mathrm{m})^2}\hat{k}$$

$$= \boxed{-3{,}2 \times 10^{-14}\,\mathrm{T}\,\hat{k}}$$

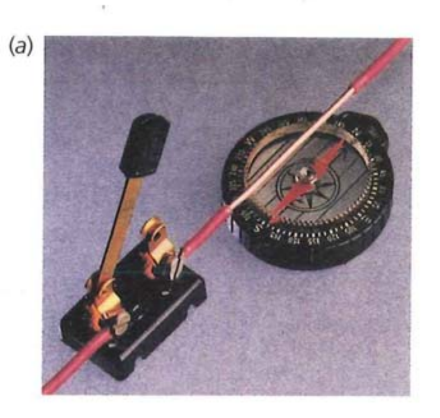
COMPROBACIÓN También es posible determinar el campo magnético $\vec{B}$ sin determinar explícitamente el vector unitario $\hat{r}$. Como puede verse en la figura, el producto vectorial $\vec{v} \times \hat{r}$ tiene la dirección z negativa. Dado que el módulo de $\vec{v} \times \hat{r}$ es v sen θ, en donde sen $\theta = (3\,\mathrm{m})/(5\,\mathrm{m}) = 0{,}6$, resulta $\vec{v} \times \hat{r} = v\,\mathrm{sen}\,\theta(-\hat{k}) = -v(0{,}60)\hat{k}$, lo que coincide con el resultado obtenido en la línea 1 del paso 3.

PROBLEMA PRÁCTICO 27.1 Determinar el campo magnético sobre el eje y en $y = 3{,}0$ m y en $y = 6{,}0$ m.

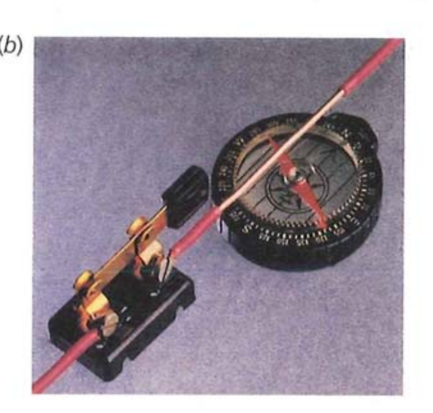
* Esta expresión es válida para velocidades mucho menores que la de la luz.

† Adviértase que no debemos confundir μ_0 con el módulo del momento magnético $\vec{\mu}$.

(a)



(b)



Experimento de Oersted. (*a*) Si por el alambre no pasa corriente, la aguja de la brújula apunta al norte. (*b*) Al pasar corriente por el alambre, la aguja se desvía en la dirección del campo magnético resultante. La corriente en el alambre está dirigida hacia arriba, de izquierda a derecha. Para mejorar el contraste de la fotografía, se ha quitado el aislante que recubre el alambre. *(© 1990 Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

27.2 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR CORRIENTES ELÉCTRICAS: LEY DE BIOT Y SAVART

En el capítulo anterior extendimos nuestra exposición de las fuerzas que actúan sobre cargas puntuales a las fuerzas que actúan sobre elementos de corriente reemplazando $q\vec{v}$ por el elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$. Lo mismo podemos hacer para deducir el campo magnético producido por un elemento de corriente. El campo magnético $d\vec{B}$ producido por un elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$ viene dado por la ecuación 27.1 sustituyendo $q\vec{v}$ por $I\,d\vec{\ell}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \qquad 27.3$$

LEY DE BIOT Y SAVART

La ecuación 27.3, conocida como **ley de Biot y Savart**, fue también deducida por Ampère. Esta ley y la ecuación 27.1 son análogas a la ley de Coulomb correspondiente al campo eléctrico creado por una carga puntual. La fuente del campo magnético es una carga móvil $q\vec{v}$ o un elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$, del mismo modo que la carga q es la fuente del campo electrostático. El campo magnético decrece con el cuadrado de la distancia a la carga móvil o elemento de corriente, de igual modo que el campo eléctrico decrece con el cuadrado de la distancia a una carga puntual. Sin embargo, los aspectos direccionales de los campos eléctrico y magnético son completamente distintos. Mientras que el campo eléctrico apunta en la dirección radial desde la carga puntual al punto donde observamos el campo (para una carga positiva), el campo magnético es perpendicular a $\hat{r}$ y $\vec{v}$, en el caso de las cargas puntuales $\hat{r}$ o $d\vec{\ell}$ en el caso de un elemento corriente. En un punto situado a lo largo de la línea de un elemento de corriente, tal como el punto P_2 de la figura 27.3, el campo magnético debido a dicho elemento es cero. (La ecuación 27.3 da $d\vec{B} = 0$ si $d\vec{\ell}$ y $\hat{r}$ son paralelos o antiparalelos.)

El campo magnético debido a la corriente total que circula por un circuito puede calcularse utilizando la ley de Biot y Savart para calcular el campo debido a cada elemento de corriente y después sumando (integrando) para todos los elementos de corriente del circuito. Este cálculo es difícil excepto en los casos de circuitos de geometría simple.

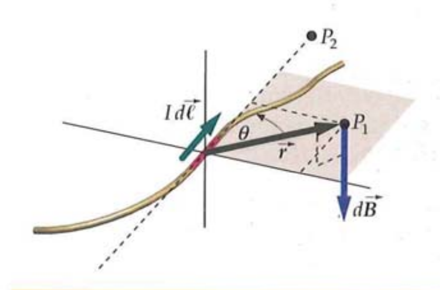


FIGURA 27.3 El elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$ produce un campo magnético $d\vec{B}$ en el punto P_1 que es perpendicular tanto a $Id\vec{\ell}$ como a $\hat{r}$. Este elemento no produce campo magnético en el punto P_2, que está en la misma línea de $Id\vec{\ell}$.

$\vec{B}$ DEBIDO A UNA ESPIRA DE CORRIENTE

La figura 27.4 muestra un elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$ de una espira de corriente de radio R y el vector unitario $\hat{r}$ dirigido desde el elemento al centro de la espira. El campo magnético en el centro de la espira debido a este elemento está dirigido a lo largo del eje de la misma y su módulo viene dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\ell\,\text{sen}\,\theta}{R^2} \qquad 27.4$$

donde θ es el ángulo que forman $d\vec{\ell}$ y $\hat{r}$, que vale 90° para cada elemento de corriente, de modo que sen $\theta = 1$. El campo magnético debido a la corriente total se

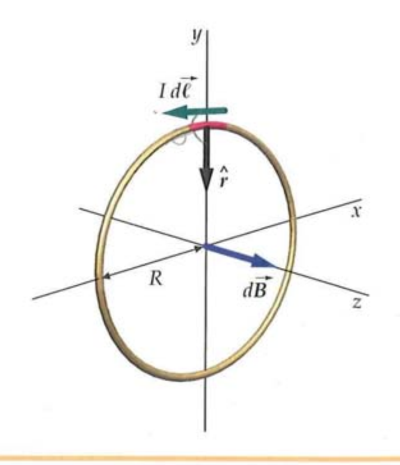


FIGURA 27.4 Elemento de corriente para el cálculo del campo magnético en el centro de una espira de corriente circular. Cada elemento produce un campo magnético dirigido a lo largo del eje de la espira.

obtiene integrando para todos los elementos de corriente de la espira. Como R es constante para todos los elementos, se obtiene

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\oint d\ell$$

La integral de $d\ell$ alrededor de la espira completa es la longitud total $2\pi R$ o circunferencia de la espira. El campo magnético causado por la espira completa es, por lo tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad 27.5$$

B EN EL CENTRO DE UNA ESPIRA DE CORRIENTE

PROBLEMA PRÁCTICO 27.2

Hallar la corriente de una espira circular de 8,0 cm de radio que pueda crear un campo magnético de 0,2 mT en el centro de la espira.

La figura 27.5 muestra la geometría para calcular el campo magnético en un punto del eje de una espira circular de corriente a la distancia x de su centro. Consideremos en primer lugar el elemento de corriente situado en la parte superior de la espira. Aquí, como en todos los puntos de la espira, $I\,d\vec{\ell}$ es tangente a la misma y perpendicular al vector $\hat{r}$ dirigido desde el elemento de corriente al punto del campo P. El campo magnético $d\vec{B}$ debido a este elemento se encuentra en la dirección mostrada en la figura, perpendicular a $\hat{r}$ y también perpendicular a $I\,d\vec{\ell}$. El módulo de $d\vec{B}$ es

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I|d\hat{\ell}\times\hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\ell}{(z^2+R^2)}$$

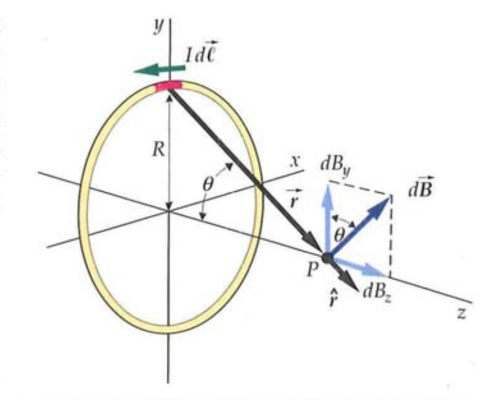


FIGURA 27.5 Geometría para el cálculo del campo magnético en un punto del eje de una espira de corriente circular.

donde se ha tenido en cuenta que $r^2 = x^2 + R^2$ y que $d\vec{\ell}$ y $\hat{r}$ son perpendiculares, de modo que $|d\vec{\ell}\times\hat{r}| = d\ell$.

Cuando sumamos para todos los elementos de corriente de la espira, las componentes de $d\vec{B}$ perpendiculares al eje de la espira, tal como dB_y en la figura 27.5, suman cero, quedando sólo las componentes dB_x que son paralelas al eje. Por lo tanto, debemos calcular sólo la componente x del campo. Según la figura 27.5, tenemos

$$dB_z = dB\,\mathrm{sen}\,\theta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\ell}{(z^2+R^2)}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,d\ell}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Para determinar el campo debido a la espira completa, integraremos dB_x alrededor de la espira:

$$B_z = \oint dB_z = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}d\ell$$

Como x y R no varían al sumar para todos los elementos de la espira, podemos sacar estas magnitudes de la integral, obteniendo

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}\oint d\ell$$

La integral de $d\ell$ alrededor de la espira es $2\pi R$. Por lo tanto,

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(z^2+R^2)^{3/2}} \qquad 27.6$$

B EN EL EJE DE UNA ESPIRA DE CORRIENTE

PROBLEMA PRÁCTICO 27.3
Demostrar que la ecuación 27.6 se reduce a $B_z = \frac{1}{2}\mu_0 I/R$ (ecuación 27.6) en el centro de la espira.

A grandes distancias de la espira, $|z|$ es mucho mayor que R, de modo que $(z^2 + R^2)^{3/2} \approx (z^2)^{3/2} = |z|^3$. Por lo tanto,

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I\pi R^2}{|z|^3}$$

o sea

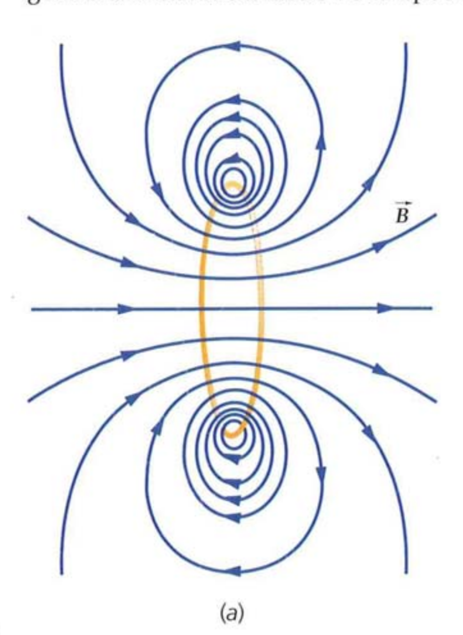
$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{|z|^3} \qquad 27.7$$

CAMPO DE UN DIPOLO MAGNÉTICO EN EL EJE DEL DIPOLO

donde $\mu = I\pi R^2$ es el módulo del momento magnético de la espira. Obsérvese la semejanza de esta expresión con la ecuación 21.10 correspondiente al campo eléctrico en el eje de un dipolo eléctrico de momento p:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{|z|^3}$$

Aunque no lo hemos demostrado, nuestro resultado de que una espira de corriente produce un campo dipolar magnético lejos de ésta, es válido en general para cualquier punto que esté en el eje o fuera del eje. Así, una espira de corriente se comporta como un dipolo magnético, ya que experimenta un momento $\vec{\mu} \times \vec{B}$ cuando se sitúa en un campo magnético externo (como vimos en el capítulo 26) y también produce un campo dipolar magnético a gran distancia de la espira. La figura 27.6 muestra las líneas de campo magnético de una espira de corriente.



(a)

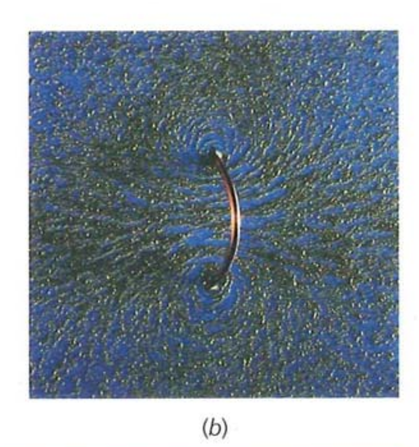

(b)

FIGURA 27.6 (*a*) Líneas de campo magnético de una espira de corriente circular. (*b*) Líneas de campo magnético de una espira de corriente circular visualizadas mediante limaduras de hierro. *(© 1990 Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

Ejemplo 27.2 Campo $\vec{B}$ en el eje de una bobina

Una bobina circular de radio 5,00 cm tiene 12 vueltas y se encuentra en el plano $z = 0$, centrada en el origen. Por ella circula una corriente de 4,00 A en un sentido tal que el momento magnético de la espira está dirigido a lo largo del eje z. Determinar el campo magnético sobre el eje x en (*a*) $z = 0$, (*b*) $z = 15{,}0$ cm y (*c*) $z = 3$ m. (*d*) Utilizando la ecuación 27.7, determinar el campo magnético en el eje z en $z = 3{,}00$ m.

PLANTEAMIENTO El campo magnético debido a una bobina de N vueltas es N veces mayor que el debido a una sola vuelta. (*a*) En $z = 0$ (centro de la espira) $B = \frac{1}{2}\mu_0 N/R$ según la ecuación 27.4. La ecuación 27.6 expresa el valor del campo magnético sobre el eje debido a la corriente en una sola vuelta. Lejos de la bobina, como en el caso (*c*), el campo puede determinarse utilizando la ecuación 27.7. En este caso, como tenemos N espiras, el momento magnético es $\mu = NIA$, donde $A = \pi R^2$.

SOLUCIÓN

(*a*) B_z en el centro es N veces el dado por la ecuación 27.5 para una sola espira:

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2R} = (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})\frac{(12)(4{,}00\ \mathrm{A})}{2(0{,}0500\ \mathrm{m})} = \boxed{6{,}03 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}}$$

(*b*) B_z sobre el eje es N veces el dado por la ecuación 27.6:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 NI}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = (10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})\frac{2\pi(0{,}0500\ \mathrm{m})^2(12)(4{,}00\ \mathrm{A})}{\left[(0{,}1500\ \mathrm{m})^2 + (0{,}0500\ \mathrm{m})^2\right]^{3/2}} = \boxed{1{,}91 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}}$$

(*c*) Usando nuevamente la ecuación 27.6, obtenemos:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 NI}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = (10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})\frac{2\pi(0{,}0500\ \mathrm{m})^2(12)(4{,}00\ \mathrm{A})}{\left[(3{,}00\ \mathrm{m})^2 + (0{,}0500\ \mathrm{m})^2\right]^{3/2}} = \boxed{2{,}79 \times 10^{-9}\ \mathrm{T}}$$

(*d*) 1. Como 3,00 m es mucho mayor que el radio $R = 0{,}0500$ m, podemos utilizar la ecuación 27.7 para el campo magnético lejos de la bobina:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{|z|^3}$$

2. El módulo del momento magnético de la bobina es N/A:

$$\mu = NI\pi R^2 = (12)(4{,}00\ \mathrm{A})\pi(0{,}0500\ \mathrm{m})^2 = 0{,}377\ \mathrm{A \cdot m^2}$$

3. Sustituir $\mu = 0{,}377\ \mathrm{A \cdot m^2}$ y $z = 3{,}00$ m en la expresión para B_z en el paso 1.

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{|z|^3} = (10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})\frac{2(0{,}377\ \mathrm{A \cdot m^2})}{(3{,}00\ \mathrm{m})^3} = \boxed{2{,}79 \times 10^{-9}\ \mathrm{T}}$$

COMPROBACIÓN En el apartado (*d*), $z = 60\ R$; por lo tanto, podemos usar la aproximación $z >> R$. El resultado obtenido difiere del exacto, calculado en (*c*), en menos del 0,1%.

Ejemplo 27.3 Cantidad de carga que circula

En la bobina del ejemplo 27.2 la corriente es 4 A. Suponiendo que la velocidad de desplazamiento (o de deriva) es $1{,}4 \times 10^{-4}$ m/s, determinar el número de coulombs de la carga en movimiento del hilo. (Cuando la corriente en un hilo es de 1 A, del ejemplo 25.1 se deduce que la velocidad de desplazamiento es de $3{,}5 \times 10^{-5}$ m/s.)

PLANTEAMIENTO La cantidad de carga Q que se mueve en el hilo es el producto de la cantidad de carga que entra por un extremo del hilo en una unidad de tiempo por el tiempo que tarda la carga en recorrer la longitud del hilo. La relación entre la cantidad de carga que entra por un extremo del hilo en una unidad de tiempo es la intensidad de corriente I, y el tiempo que tarda esta carga en recorrer la longitud L es L/v_d, donde v_d es la velocidad de deriva.

SOLUCIÓN

1. La cantidad de carga que se mueve en el hilo es el producto de la intensidad de corriente y el tiempo que tarda la carga en recorrer la longitud del hilo:

$$Q = I\,\Delta t$$

2. La velocidad de deriva es la longitud L dividida por el tiempo:

$$v_d = \frac{L}{\Delta t}$$

3. La longitud L es el número de vueltas o espiras por la longitud de una de ellas. Usando el resultado del paso 2, podemos calcular el tiempo:

$$L = N2\pi R = (12)2\pi(0{,}0500\ \text{m}) = 3{,}77\ \text{m}$$

y

$$\Delta t = \frac{L}{v_d} = \frac{3{,}77\ \text{m}}{1{,}40 \times 10^{-4}\ \text{m/s}} = 2{,}69 \times 10^4\ \text{s}$$

4. Utilizando la expresión del paso 1, podemos obtener la cantidad de carga móvil del hilo:

$$Q = I\,\Delta t = (4{,}00\ \text{A})(2{,}69 \times 10^4\ \text{s})$$

$$= \boxed{1{,}08 \times 10^5\ \text{C}}$$

COMPROBACIÓN En un metal hay aproximadamente un electrón de conducción por cada átomo. Si el hilo es de cobre, cuyo peso molecular es de 63,5 g/mol, 3,77 m de hilo tienen una masa aproximada de 63,5 g. Entonces, podemos estimar que tenemos en esa longitud de hilo un mol de cobre. Esto significa que el número de electrones de conducción en este hilo es, aproximadamente, el número de Avogadro. La carga total de estos electrones es igual a la carga del electrón multiplicada por el número de electrones. Esto es, $Q = -N_A e = -(6{,}02 \times 10^{23})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -0{,}965 \times 10^5\ \text{C}$. El resultado es similar al del paso 4 del problema.

OBSERVACIÓN La intensidad de corriente equivale a una cantidad de carga de 10^5 C moviéndose a una velocidad v_d en la longitud del hilo L. Esta cantidad de carga es enorme comparada con la que queda almacenada en un condensador normal.

Ejemplo 27.4 Momento de una barra magnética

Inténtelo usted mismo

Una pequeña barra magnética de momento magnético $\mu = 0{,}03\ \text{A} \cdot \text{m}^2$ se sitúa en el centro de la bobina del ejemplo 27.2 de modo que su momento magnético se encuentra en el plano xy, y forma un ángulo de 30° con el eje x. Despreciando cualquier variación de $\vec{B}$ en la región ocupada por el imán, determinar el momento ejercido sobre el imán.

PLANTEAMIENTO El momento ejercido sobre un momento magnético viene dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Como $\vec{B}$ se encuentra en la dirección x positiva, podemos ver en la figura 27.7 que $\vec{\mu} \times \vec{B}$ posee la dirección z negativa.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Calcular el módulo del momento a partir de $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.	$\tau = 9{,}04 \times 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m}$
2. Indicar la dirección y el sentido con un vector unitario.	$\vec{\tau} = \boxed{(9{,}04 \times 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m})\hat{i}}$

COMPROBACIÓN El momento de la fuerza tiende a alinear el momento magnético con el campo magnético. Entonces, el correspondiente vector momento está en la dirección $+x$, como era de esperar.

FIGURA 27.7

CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ DEBIDO A UNA CORRIENTE EN UN SOLENOIDE

Un **solenoide** es un alambre enrollado en forma de una hélice con espiras muy próximas entre sí (figura 27.8). El solenoide se usa para producir un campo magnético intenso y uniforme en la región rodeada por sus espiras. Desempeña en magnetismo un papel análogo al de un condensador de placas paralelas que proporciona un campo electrostático uniforme e intenso entre sus placas. El campo magnético de

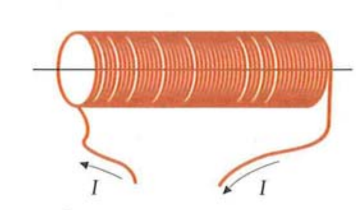


FIGURA 27.8 Un solenoide estrechamente enrollado puede considerarse como una serie de espiras de corriente circulares situadas paralelamente que transportan la misma corriente. En su interior se produce un campo magnético uniforme.

un solenoide es esencialmente el de una serie de N espiras idénticas situadas unas junto a otras. En la figura 27.9, se muestran las líneas de campo magnético para dos espiras.

La figura 27.10*a* muestra las líneas de campo correspondientes a un solenoide largo y enrollado de forma compacta. Dentro del solenoide, las líneas son, aproximadamente, paralelas al eje y están espaciadas estrecha y uniformemente, indicando la existencia de un campo uniforme e intenso. Fuera del solenoide, las líneas son mucho menos densas. Divergen de un extremo y convergen en el otro. Comparando esta figura con la figura 27.70*b* vemos que las líneas de campo de un solenoide, tanto en el interior como en el exterior, coinciden con las de una barra imanada de igual forma que el solenoide. En la figura 27.10*c*, las limaduras de hierro se alinean con el campo generado por la corriente que circula por el solenoide.

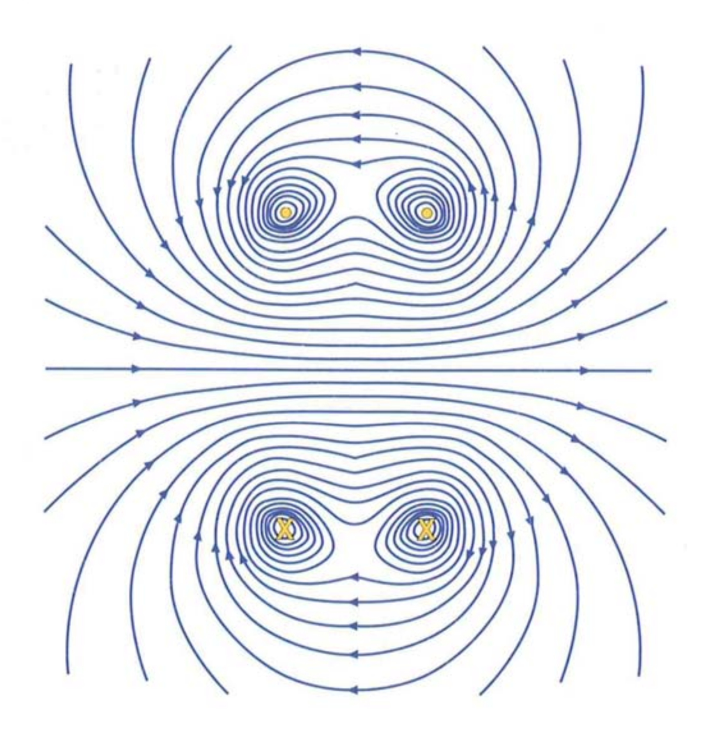
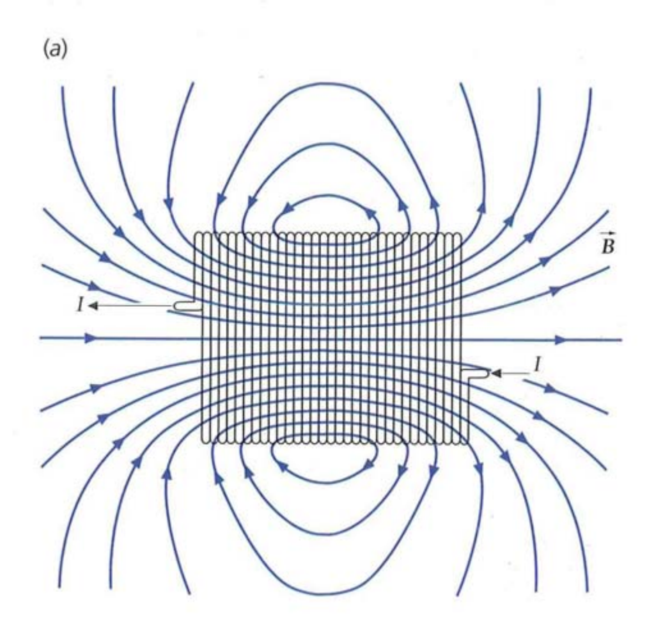


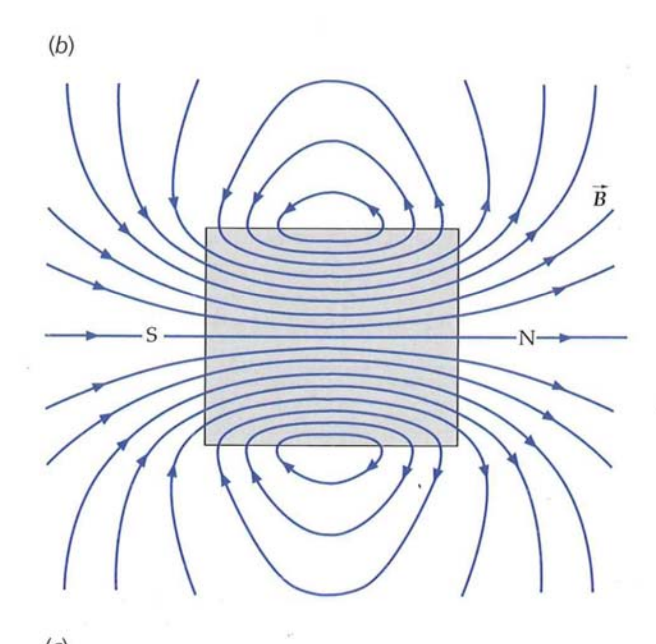
FIGURA 27.9 Líneas de campo magnético debidas a dos espiras que transportan la misma corriente en el mismo sentido. Los puntos donde las espiras cortan el plano de la página están marcados por una × cuando la corriente se dirige hacia dentro y por un punto cuando la corriente emerge. En la región comprendida entre las espiras, los campos magnéticos de las espiras individuales se suman, de modo que el campo resultante es intenso, mientras que en las regiones alejadas de las espiras, el campo resultante es débil.

FIGURA 27.10 (*a*) Líneas de campo magnético de un solenoide. Las líneas son idénticas a las de una barra imanada de igual forma, como la de la figura 27.10 (*b*). (*c*) Líneas de campo magnético de un solenoide indicadas por limaduras de hierro. *(© 1990 Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

(*a*)



(*b*)



(*c*)



Ejemplo 27.5 El campo de un solenoide muy largo y compacto — *Conceptual*

En el párrafo anterior se demuestra que el campo magnético dentro de un solenoide muy largo, muy compacto (con gran densidad de vueltas por unidad de longitud), en puntos lejanos de sus extremos y por el que circula una corriente, es uniforme, paralelo al eje y, y que además es cero fuera de él. Podemos ratificar esta afirmación representando el solenoide mediante un conjunto de espiras, empaquetadas de forma muy compacta y utilizando el esquema de líneas de campo de una espira simple por la que circula una corriente (ver figura 27.11).

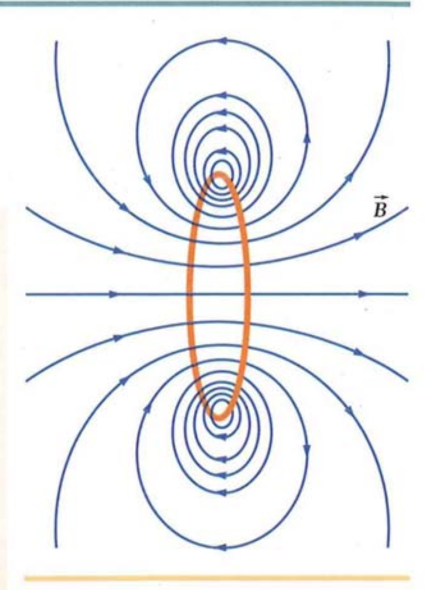


FIGURA 27.11

PLANTEAMIENTO La figura 27.12 muestra tres anillos iguales e igualmente espaciados con los que representamos 3 espiras del solenoide. En cada uno de los puntos marcados en el anillo del centro, A, B y C, dibujamos el campo magnético debido a los tres anillos: el punto A justo en el interior de la superficie encerrada por el anillo, el B en su centro y el C justo fuera de él. Usamos el campo creado por una espira por la que circula corriente (ver figura 27.11) para obtener las direcciones y estimaciones relativas de cada una de los anillos en los tres puntos seleccionados. Observando el dibujo, presentamos argumentos por los que los campos resultantes en A y B son prácticamente iguales y paralelos al eje del solenoide y prácticamente cero en C.

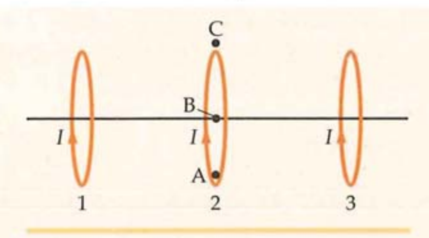


FIGURA 27.12

SOLUCIÓN

1. En el punto A, dibujamos los campos $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ y $\vec{B}_3$ correspondientes a las espiras 1, 2 y 3, respectivamente (ver figura 27.13). Utilizar la figura 27.11 como guía.

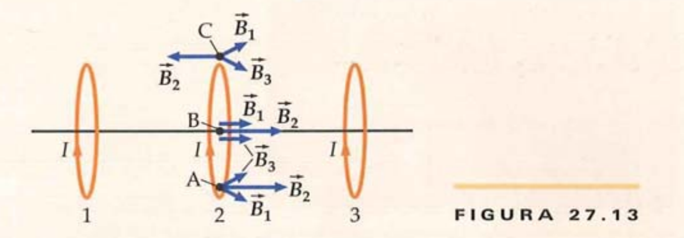


FIGURA 27.13

2. El módulo del campo es mayor donde las líneas de campo son más cerradas. Una observación de las líneas de campo en 27.11 revela que el módulo del campo $\vec{B}_2$ (debido a la espira 2) en el punto A es mayor que en el punto B:

El módulo del campo $\vec{B}_2$ es mayor en el punto A que en el $\vec{B}_2$. Sin embargo, como $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ y $\vec{B}_3$ tienen la misma dirección, es plausible decir que el campo resultante ($\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$) en el punto B del campo tiene el mismo módulo que en A.

3. Observando la líneas de campo en la figura 27.11 podemos deducir que, en el plano de la espira, el campo en los puntos del exterior de la espira tiene dirección opuesta a la del campo en puntos del interior:

En el punto C, la dirección de $\vec{B}_2$ está dirigida a la izquierda de la figura y el $\vec{B}_1 + \vec{B}_3$ a la derecha. Además, las espiras adicionales, que son muchas y que están cerca de las 1 y 3, producen campos en C cuyo vector suma está dirigido a la derecha. En consecuencia, es razonable suponer que el campo magnético en C es cero.

OBSERVACIÓN Los argumentos presentados en este ejemplo sólo se cumplen para aquellas secciones transversales del solenoide que están muy lejos de sus límites. Suponer que la espira 2 en la figura 27.13 no está cerca del centro longitudinal del solenoide, sino que la última espira está cerca del final de su derecha. Entonces, la espira 3 estaría ausente del dibujo y los tres vectores con subíndice 3 estarían, por consiguiente, ausentes.

Consideremos un solenoide de longitud L formado por N vueltas de cable conductor que transporta una corriente de intensidad I. Elegimos el eje del solenoide como eje z, con el extremo izquierdo en $z = z_1$ y el extremo derecho en $z = z_2$, como indica la figura 27.14. Calculemos el campo magnético en el origen. La figura muestra un elemento del solenoide de longitud dz' a una distancia z' del origen. Si n =

FIGURA 27.14 Geometría para el cálculo del campo magnético dentro de un solenoide, sobre el eje. El número de vueltas en el elemento dz' es $n\,dz$, en donde $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud. El elemento dz se trata como una espira de corriente que transporta una corriente $di = nI\,dz'$.

N/L es el número de vueltas por unidad de longitud, en este elemento existen $n\,dz$ vueltas de alambre, cada una de las cuales transporta una corriente I. Por lo tanto, el elemento es equivalente a una simple espira que transporta una corriente $di = nI\,dz'$. El campo magnético en un punto sobre el eje z causado por una espira situada en el origen que transporta una corriente $nI\,dz'$ viene dado por la ecuación 27.6 reemplazando I por $di = nI\,dz$:

$$dB_z = \tfrac{1}{2}\mu_0 \frac{R^2\,di}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

donde z es la distancia entre la espira y el punto donde se calcula el campo. Para una espira en $z = z'$, la corriente $di = nI\,dz'$, la distancia entre la espira y el punto campo es $z - z'$; de esta forma tenemos que

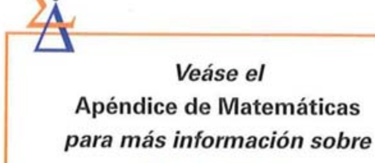
$$dB_z = \tfrac{1}{2}\mu_0 \frac{R^2 nI\,dz'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

Determinaremos el campo magnético debido al solenoide completo integrando esta expresión desde $z' = z_1$ a $z' = z_2$:

$$B_z = \tfrac{1}{2}\mu_0 nIR^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}} \qquad 27.8$$

La integral de la ecuación 27.8 puede determinarse realizando el cambio de variable $z - z' = R\,\mathrm{tg}\,\theta$ o también sirviéndonos de una tabla estándar. Su valor es:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}}\right)$$



Sustituyendo este valor en la ecuación 27.8, resulta

$$B_z(z) = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}}\right) \qquad 27.9$$

B_z EN EL EJE DEL SOLENOIDE

Un solenoide se considera largo (infinito) si su longitud L es mucho mayor que su radio R. Dentro del solenoide y lejos de los extremos de un solenoide largo, la fracción de la izquierda en el paréntesis se aproxima a 1 y la de la derecha a -1. Esto significa que la expresión del paréntesis tiende a $+2$. Entonces, en la región dentro del solenoide y lejos de los extremos el campo magnético viene dado por

$$B_z = \mu_0 nI \qquad 27.10$$

CAMPO MAGNÉTICO B_z EN EL INTERIOR DE UN SOLENOIDE LARGO

Para calcular B_z en el extremo derecho del solenoide, se utiliza la ecuación 27.9 con $z = z_2$. Esto da $B_z(z_2) = \frac{1}{2}\mu_0 nI\, L/\sqrt{L^2 + R^2}$, donde $L = z_2 - z_1$. Entonces, $L \gg R$, el cociente $L/\sqrt{L^2 + R^2}$ se aproxima mucho a uno, de modo que $B_z(z_2) \approx \frac{1}{2}\mu_0 nI$. Por lo tanto, B_z en cualquiera de los extremos de un solenoide largo es igual a la mitad que en los puntos interiores del solenoide que están lejos de los extremos. La figura 27.15 es la representación del campo magnético en el eje de un solenoide en función de la posición (con el origen en el centro del solenoide). La aproximación de que el campo es constante, independientemente de la posición a lo largo del eje, es muy buena excepto en los puntos muy próximos a los extremos.

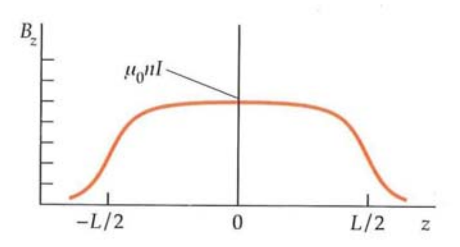


FIGURA 27.15 Gráfico del campo magnético sobre el eje interior de un solenoide en función de la posición x sobre dicho eje. El campo interior al solenoide es casi constante excepto cerca de los extremos. La longitud L del solenoide es diez veces más larga que su radio.

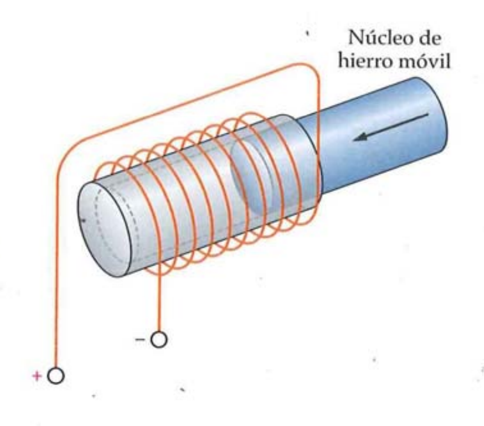


FIGURA 27.16 Un solenoide de un motor de arranque de automóvil. Cuando se suministra energía al solenoide, el campo magnético que genera atrae a la pieza de hierro. Esto sirve para encajar las marchas que conectan el motor de arranque con las transmisiones de las ruedas de la máquina. Cuando la corriente del solenoide se interrumpe, un resorte desencaja las marchas y empuja al núcleo de hierro hacia la derecha.

Ejemplo 27.6 $\vec{B}$ en el centro del solenoide

Determinar el campo magnético en el centro de un solenoide de 20,0 cm de longitud, 1,40 cm de radio y 600 vueltas, por el que circula una corriente de intensidad 4,00 A.

PLANTEAMIENTO Para determinar B en el eje del solenoide se puede aplicar la ecuación 27.9 con el origen en el centro del solenoide.

SOLUCIÓN

1. Calcularemos exactamente el campo mediante la ecuación 27.9:

$$B_z(z) = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}}\right)$$

2. Para hallar el campo magnético en el centro del solenoide, se elige ese punto como origen. Entonces se toma $z = 0$, $z_1 = -\frac{1}{2}L$, y $z_2 = \frac{1}{2}L$:

$$B_z(0) = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{0 - \left(-\frac{1}{2}L\right)}{\sqrt{\left[0 - \left(-\frac{1}{2}L\right)\right]^2 + R^2}} - \frac{0 - \left(\frac{1}{2}L\right)}{\sqrt{\left[\left(0 - \left(\frac{1}{2}L\right)\right)^2\right] + R^2}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\frac{L}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + R^2}} = \mu_0 nI\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

3. Sustituyendo estos resultados en B_z, paso 1:

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} = \frac{20{,}0\ \text{cm}}{\sqrt{(20{,}0\ \text{cm})^2 + 4(1{,}40\ \text{cm})^2}} = 0{,}990$$

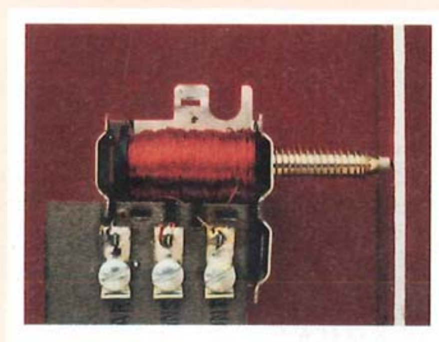
$$B_z(0) = 0{,}990\,\mu_0 nI$$

$$= 0{,}990(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\frac{600}{0{,}200\ \text{m}}(4{,}00\ \text{A})$$

$$= \boxed{1{,}50 \times 10^{-2}\ \text{T}}$$

COMPROBACIÓN La aproximación obtenida usando la ecuación 27.10 supone reemplazar 0,990 por 1,00, es decir, una diferencia del 1%. Obsérvese también que el módulo del campo magnético dentro del solenoide es bastante grande —unas 250 veces el campo magnético terrestre.

PROBLEMA PRÁCTICO 27.4 Calcular B_z utilizando la aproximación del solenoide de gran longitud.



Sección transversal del timbre de una puerta. Cuando pasa corriente por el solenoide exterior, su campo magnético hace que el émbolo interior choque con la campana del timbre, haciéndola sonar (no se muestra). El muelle devuelve el émbolo a su posición normal. (© *Bruce Iverson.*)

CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ DEBIDO A UNA CORRIENTE EN UN CONDUCTOR RECTILÍNEO

La figura 27.17 muestra la geometría para el cálculo del campo magnético $\vec{B}$ en un punto P debido a la corriente que circula por el segmento de alambre recto que se indica. El segmento está sobre el eje x, la distancia del punto P al eje x trazada sobre la perpendicular es R y el origen, $x = 0$, es la proyección de P sobre x.

En la figura se indica un elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}$ situado a una distancia x del origen. El vector $\vec{r}$ se traza desde el elemento hasta el punto del campo P. La dirección del campo magnético en P debido a este elemento está dirigida hacia el lector según queda determinada por la dirección del producto $I\,d\vec{\ell} \times \hat{r}$. Obsérvese que todos los elementos de corriente del conductor dan contribuciones en esta misma dirección

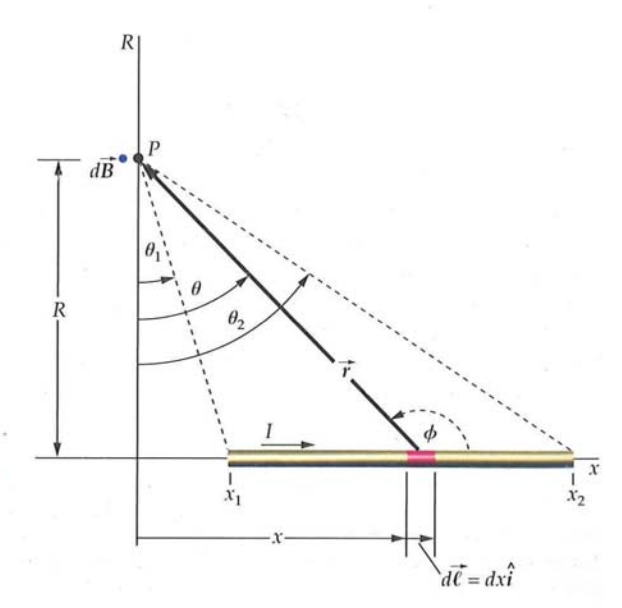


FIGURA 27.17 Geometría para el cálculo del campo magnético en el punto P causado por un segmento rectilíneo de corriente. Cada elemento del segmento contribuye al campo magnético total en el punto P, que está dirigido hacia fuera del papel. El resultado se expresa en función de los ángulos θ_1 y θ_2.

y sentido, y así sólo necesitamos calcular el módulo del campo. El campo debido al elemento de corriente indicado tiene el valor (ecuación 27.3):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}\operatorname{sen}\phi$$

Es preferible escribir esta expresión en función de θ que en función de ϕ:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx}{r^2}\cos\theta \qquad 27.11$$

Para sumar los campos elementales de todos los elementos de corriente necesitamos relacionar las variables θ, r y x. Lo más sencillo es expresar x y r en función de θ. Así tenemos:

$$x = R\,\operatorname{tg}\theta$$

Diferenciando ambos miembros de la ecuación teniendo en cuenta que R es constante, se obtiene

$$dx = R\sec^2\theta\,d\theta = R\frac{r^2}{R^2}d\theta = \frac{r^2}{R}d\theta$$

en donde hemos utilizado $\sec\theta = r/R$. Sustituyendo dx por esta expresión en la ecuación 27.11, resulta

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{r^2\,d\theta}{R}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cos\theta\,d\theta$$

Sumamos las contribuciones de campo magnético debido a todos los elementos infinitesimales del segmento, integrando desde $\theta = \theta_1$ hasta $\theta = \theta_2$, donde θ_1 y θ_2 se muestran en la figura 27.17. De esta forma, obtenemos

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cos\theta\,d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta$$

Haciendo la integral, obtenemos

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) \qquad 27.12$$

B DEBIDO A UN SEGMENTO DE CONDUCTOR RECTILÍNEO

Este resultado expresa el campo magnético producido por un segmento de conductor en función de la distancia R perpendicular, y los ángulos θ_1 y θ_2 subtendidos en el punto del campo por los extremos del conductor. Si la longitud del conductor tiende a infinito por ambos sentidos, θ_2 tiende a $+90°$ y θ_1 a $-90°$. El resultado correspondiente a un conductor muy largo se obtiene de la ecuación 27.12 haciendo $\theta_1 = -90°$ y $\theta_2 = +90°$:

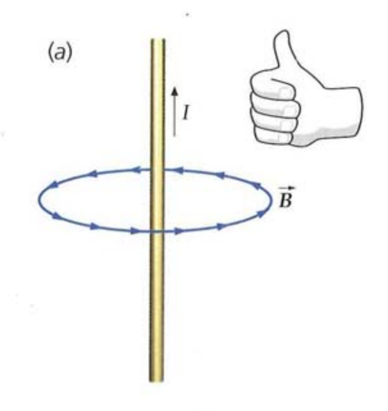
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R} \qquad 27.13$$

B DEBIDO A UN CONDUCTOR LARGO RECTILÍNEO

En cualquier punto del espacio, las líneas de campo magnético creado por un conductor largo rectilíneo que transporta una corriente, son tangentes a un círculo de radio R que rodea el conductor, siendo R la distancia perpendicular desde el conductor al punto del campo. El sentido de $\vec{B}$ puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha como se indica en la figura 27.18*a*. Las líneas de campo magnético rodean el conductor como se indica en la figura 27.18*b*.

El resultado expresado por la ecuación 27.13 fue determinado experimentalmente por Biot y Savart en 1820. Mediante su análisis determinaron la expresión del campo magnético debido a un elemento de corriente, dada por la ecuación 27.3.

(a)



(b)

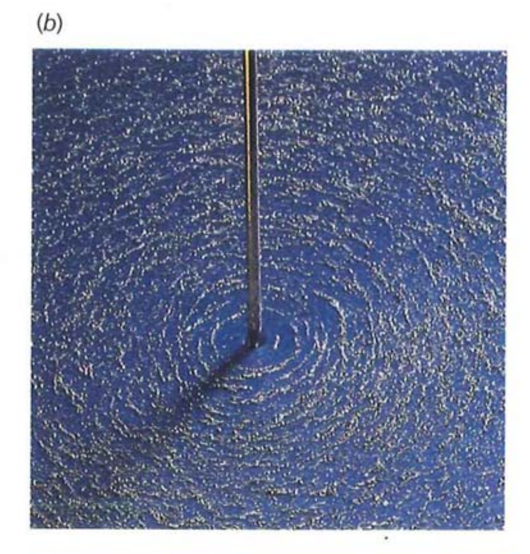


FIGURA 27.18 (*a*) Regla de la mano derecha para determinar el sentido del campo magnético debido a un conductor largo y recto, portador de corriente. Las líneas de campo magnético rodean el conductor en el sentido de los dedos de la mano derecha cuando el dedo pulgar apunta en la dirección de la corriente. (*b*) Líneas de campo magnético debidas a un conductor largo visualizadas por limaduras de hierro. *(© 1990 Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

Ejemplo 27.7 $\vec{B}$ en el centro de una espira cuadrada

Determinar el campo magnético en el centro de una espira de corriente cuadrada, de 50 cm de lado, por la cual circula una corriente de intensidad 1,5 A.

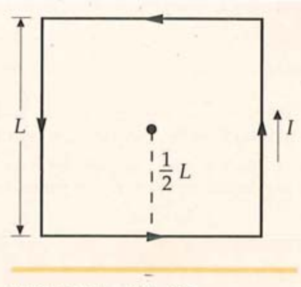


FIGURA 27.19

PLANTEAMIENTO El campo magnético en el centro de la espira es la suma de las contribuciones debidas a cada uno de los cuatro lados del cuadrado. En la figura 27.19 podemos ver que cada lado produce un campo de igual módulo apuntando hacia fuera de la página. Por lo tanto, usaremos la ecuación 27.12 para un lado determinado y multiplicaremos por 4 para el campo total.

SOLUCIÓN

1. El campo total es 4 veces mayor que el campo B_s producido por uno de los lados:

$$B = 4B_s$$

2. Calcular el campo magnético B_s debido a un lado determinado de la espira. Obsérvese en la figura que $R = \frac{1}{2}L$ y $\theta_1 = -45°$ y $\theta_2 = +45°$:

$$B_s = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\frac{1}{2}L}[\operatorname{sen}(+45°) - \operatorname{sen}(-45°)]$$

$$= (10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})\frac{1{,}5\,\mathrm{A}}{0{,}25\,\mathrm{m}}2\operatorname{sen}45° = 8{,}5\times 10^{-7}\,\mathrm{T}$$

3. Multiplicar este valor por 4 para determinar el campo total:

$$B = 4B_s = 4(8{,}5\times 10^{-7}\,\mathrm{T}) = \boxed{3{,}4\times 10^{-6}\,\mathrm{T}}$$

COMPROBACIÓN El problema 27.5 sirve de aclaración.

PROBLEMA PRÁCTICO 27.5 Comparar el campo magnético en el centro de una espira de corriente circular de radio R con el campo creado en el centro de una espira de corriente cuadrada de lado $L = 2R$. ¿Cuál es mayor?



Pistola de corriente para medir la intensidad de la corriente eléctrica. Las mordazas de la pistola rodean el conductor sin tocarlo. El campo magnético producido por el conductor al paso de la corriente se mide con un dispositivo basado en el efecto Hall que está montado sobre la pistola. Este dispositivo detecta un voltaje proporcional al campo magnético, el cual a su vez es proporcional a la corriente que circula por el conductor. *(Gentileza de F. W. Bell.)*

PROBLEMA PRÁCTICO 27.6 Hallar la distancia desde un hilo largo y recto que transporta una corriente de 12 A para la cual el campo magnético debido a la corriente del hilo es igual a 0,6 μT.

Ejemplo 27.8 $\vec{B}$ debido a dos hilos paralelos

Un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente de intensidad de 1,7 A en la dirección z positiva, se encuentra a lo largo de la línea $x = -3$ cm, $y = 0$. Un conductor semejante que transporta una corriente de 1,7 A en la dirección z positiva está situado sobre la línea $x = +3$ cm, $y = 0$, como indica la figura 27.20. Determinar el campo magnético en un punto del eje y en $y = 6$ cm.

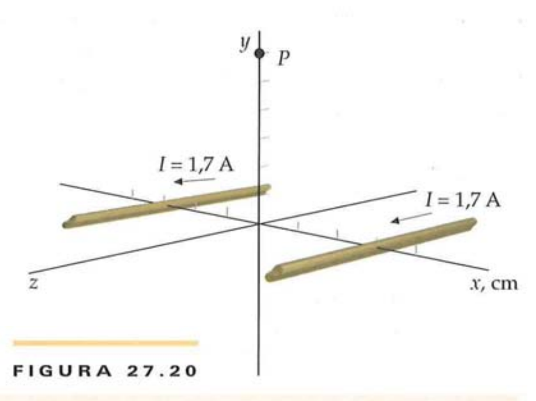


FIGURA 27.20

PLANTEAMIENTO El campo magnético en el punto P es el vector suma del campo $\vec{B}_I$ debido al alambre situado a la izquierda en la figura 27.21 y el campo $\vec{B}_D$ debido al de la derecha. Como ambos alambres transportan la misma corriente y se encuentran a igual distancia de P, los módulos $\vec{B}_I$ y $\vec{B}_D$ son iguales. $\vec{B}_I$ es perpendicular a la recta R que une el alambre izquierdo con el punto P y $\vec{B}_D$ es perpendicular a la recta que une el alambre derecho con el punto P.

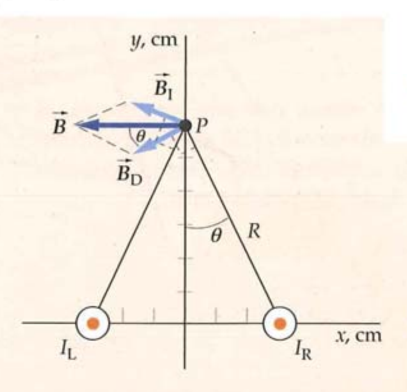


FIGURA 27.21

SOLUCIÓN

1. El campo en P es el vector suma de los campos $\vec{B}_I$ y $\vec{B}_D$: $\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_D$
2. En la figura 27.21 puede verse que el campo magnético resultante se encuentra en la dirección x negativa y tiene módulo $2B_I \cos\theta$: $\vec{B} = -2B_I \cos\theta\, \hat{i}$
3. Los módulos de $\vec{B}_I$ y $\vec{B}_D$ vienen dados por la ecuación 27.12: $B_I = B_D = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2I}{R}$
4. R es la distancia de cada alambre al punto P. Su valor puede determinarse a partir de la figura y se sustituye en las expresiones de B_I y B_D: $R = \sqrt{(3{,}0\text{ cm})^2 + (6{,}0\text{ cm})^2} = 6{,}7\text{ cm}$
   así tenemos
   $B_I = B_D = (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\dfrac{2(1{,}7\text{ A})}{0{,}067\text{ m}} = 5{,}07 \times 10^{-6}\,\text{T}$
5. De la figura se obtiene $\cos\theta$: $\cos\theta = \dfrac{6{,}0\text{ cm}}{R} = \dfrac{6{,}0\text{ cm}}{6{,}7\text{ cm}} = 0{,}894$
6. Sustituir los valores de $\cos\theta$ y B_I en la ecuación obtenida en el paso 2 para $\vec{B}$: $\vec{B} = -2(5{,}07 \times 10^{-6}\,\text{T})(0{,}894)\hat{i} = \boxed{-9{,}1 \times 10^{-6}\,\text{T}\,\hat{i}}$

COMPROBACIÓN El módulo del campo del resultado del páso 6 es menor que el doble que el del paso 4, tal como era de esperar, ya que los vectores que se suman no son paralelos.

PROBLEMA PRÁCTICO 27-7 Determinar $\vec{B}$ en el origen.

PROBLEMA PRÁCTICO 27-8 Determinar $\vec{B}$ en el origen asumiendo que la dirección de la corriente se invierte en el hilo que está a lo largo de la línea $x = 3{,}0$ cm, $y = 0$.

FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

Podemos utilizar la ecuación 27.13 correspondiente al campo magnético producido por un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente, y la ecuación 26.5 $d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$ correspondiente a la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un segmento de conductor portador de corriente, para determinar la fuerza ejercida por una corriente larga y rectilínea sobre otra. La figura 27.22 muestra dos conductores paralelos, largos y rectilíneos que transportan corriente en la misma dirección. Consideremos la fuerza que actúa sobre un segmento $d\vec{\ell}_2$ por el que circula la corriente I_2, tal como se indica en la figura. El campo magnético $\vec{B}_1$ en este segmento debido a la corriente I_1 es perpendicular al segmento $d\vec{\ell}_2$, como se muestra en la figura. Esto es cierto para todos los elementos de corriente a lo largo del conductor. La fuerza magnética sobre el segmento de corriente $I_2\,d\vec{\ell}_2$ está dirigida hacia la corriente I_1, ya que $d\vec{F}_{12} = I_2\,d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1$. De igual modo, un segmento de corriente $I_1\,d\vec{\ell}_1$ experimentará una fuerza magnética dirigida hacia la corriente I_2 debida al campo magnético procedente de ésta. Así pues, dos corrientes paralelas se atraen una a la otra. Si una de las corrientes se invierte, la fuerza se invertirá, es decir, dos corrientes antiparalelas se repelerán. La atracción o repulsión de corrientes paralelas o antiparalelas fue descubierta experimentalmente por Ampère una semana después de conocer el descubrimiento de Oersted del efecto de una corriente sobre la aguja imanada de una brújula.

El módulo de la fuerza magnética sobre el elemento diferencial de corriente $I_2\,d\vec{\ell}_2$ es

$$dF_{12} = |I_2\,d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1|$$

Como el campo magnético en el elemento de corriente $I_2\,d\vec{\ell}_2$ es perpendicular a éste, tenemos

$$dF_{12} = I_2\,d\ell_2 B_1$$

Si la distancia R entre los conductores es mucho menor que sus longitudes, el campo en $I_2\,d\vec{\ell}_2$ debido a la corriente I_1 es aproximadamente igual al campo debido a un conductor infinitamente largo, portador de corriente, dado por la ecuación 27.13. El módulo de la fuerza sobre el segmento $I_2\,d\vec{\ell}_2$ es, por lo tanto,

$$dF_{12} = I_2\,d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{dF_{12}}{d\ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R} \qquad 27.14$$

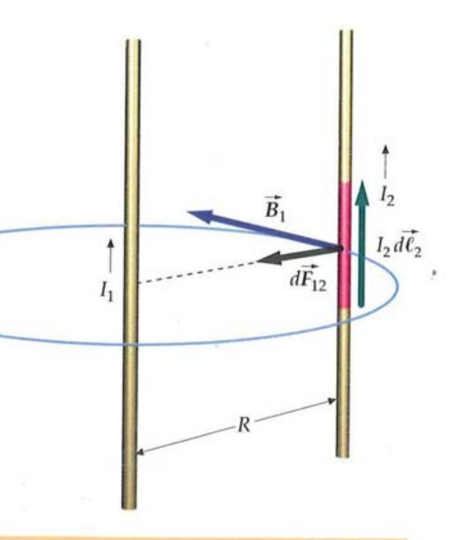


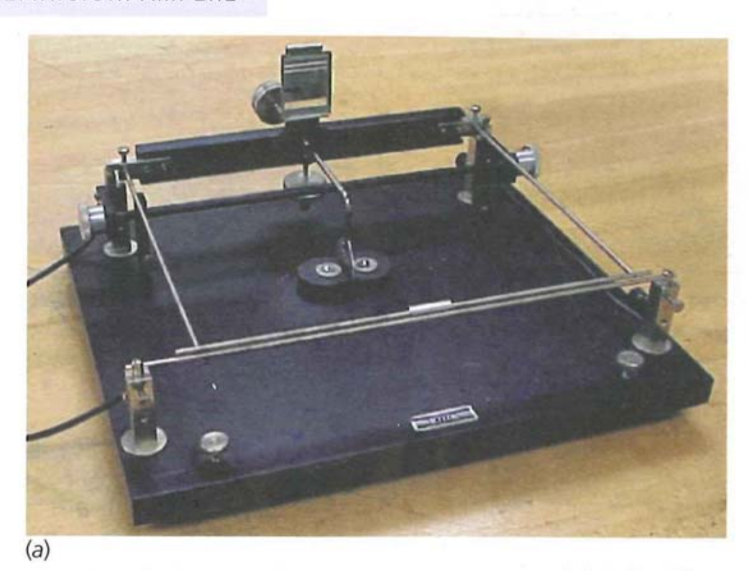
FIGURA 27.22 Dos conductores rectilíneos y largos, portadores de corrientes paralelas. El campo magnético $\vec{B}_1$ debido a la corriente I_1 es perpendicular a la corriente I_2. La fuerza que actúa sobre la corriente I_2 está dirigida hacia la corriente I_1. Existe una fuerza igual y opuesta ejercida por la corriente I_2 sobre I_1. Las corrientes, por lo tanto, se atraen mutuamente.

En el capítulo 21, el coulomb fue definido en función del ampere, pero la definición del ampere fue aplazada. Ahora podemos definir el ampere del modo siguiente:

> El ampere es aquella corriente constante que si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, situados en el vacío con una separación de un metro, produce entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.
>
> DEFINICIÓN: AMPERE

La definición de ampere permite determinar la unidad de corriente y, por lo tanto, también la de carga, por medio de medidas mecánicas. En la práctica, se utilizan corrientes mucho más próximas que 1 m, lo cual permite medir la fuerza mucho más exactamente.

La figura 27.23 muestra una **balanza de corriente** que puede utilizarse para calibrar un amperímetro a partir de la definición del ampere. El conductor superior, situado directamente sobre el conductor inferior, está libre para poder girar alrededor de unos bordes en forma de cuchilla y equilibrado de modo que los conductores están separados a una distancia corta. Los conductores se conectan en serie para que circule la misma corriente pero en sentidos opuestos, de modo que se repelen en lugar de atraerse. Después se colocan pesos sobre el conductor superior hasta que se consigue de nuevo el equilibrio en la separación original. La fuerza de repulsión se determina midiendo el peso total que se necesita para equilibrar el conductor superior.



(*a*)

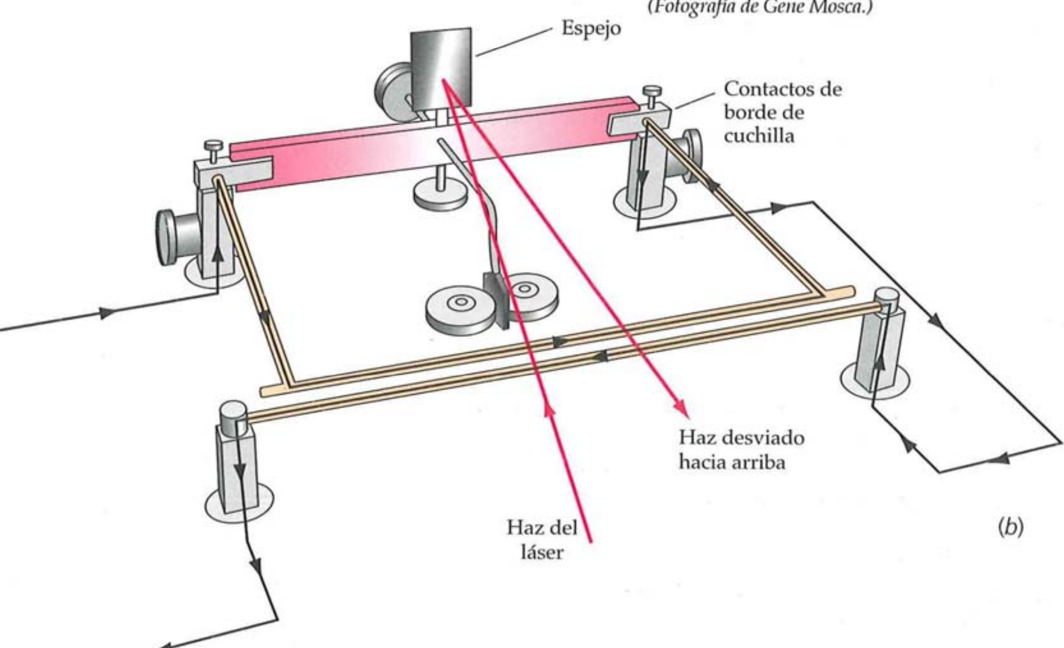


FIGURA 27.23 (*a*) Balanza de corriente utilizada en un laboratorio de física general para calibrar un amperímetro. (*b*) Diagrama esquemático de la balanza de corriente. Las dos barras paralelas transportan corrientes iguales, y de sentido opuesto y, por lo tanto, se repelen entre sí. La fuerza de repulsión está equilibrada por pesos situados sobre la barra superior, que forma parte de un rectángulo equilibrado sobre las aristas de unas cuchillas. El espejo de la parte superior del aparato se utiliza para reflejar un haz de láser a fin de determinar exactamente la posición de la barra superior. *(Fotografía de Gene Mosca.)*

Ejemplo 27.9 Balanza de fuerza magnética — *Inténtelo usted mismo*

Dos barras rectilíneas de 50 cm de longitud y separadas 1,5 mm en una balanza de corriente transportan corrientes de 15 A de intensidad en direcciones opuestas. ¿Qué masa debe situarse en la barra superior para equilibrar la fuerza magnética de repulsión?

PLANTEAMIENTO La ecuación 27.14 expresa el módulo de la fuerza magnética por unidad de longitud ejercida por la barra inferior sobre la superior. Determinar esta fuerza para una barra de longitud L e igualarla con el peso mg.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Igualar el peso mg con la fuerza magnética de repulsión de las barras.	$mg = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R}L$
2. Despejar la masa m.	$m = 1{,}53 \times 10^{-3}\ \text{kg} = \boxed{1{,}53\ \text{g}}$

OBSERVACIÓN Sólo son necesarios 1,53 g para equilibrar el sistema. La fuerza magnética ejercida entre dos cables portadores de corriente es relativamente pequeña, incluso para corrientes tan grandes como 15,0 A separadas sólo por 1,50 mm.

27.3 LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

Las líneas del campo magnético indicadas en las figuras 27.6, 27.9 y 27.10 difieren de las líneas del campo eléctrico en que las líneas de $\vec{B}$ son curvas cerradas, mientras que las líneas de $\vec{E}$ comienzan y terminan sobre las cargas eléctricas. El equivalente magnético de una carga eléctrica es un polo magnético como los que parecen existir en los extremos de un imán en forma de barra. Parece que las líneas del campo magnético divergen del extremo de la barra correspondiente al polo norte (figura 27.10*b*) y convergen en el extremo correspondiente al polo sur. Sin embargo, dentro del imán, las líneas del campo magnético ni divergen de un punto situado cerca del polo norte ni convergen en un punto situado cerca del polo sur. En lugar de esto, las líneas del campo magnético atraviesan el imán de sur a norte del modo que indica la figura 27.10*b*. Si un extremo de una barra magnética está incluido en una superficie gausiana, el número de líneas del campo magnético que se alejan de la superficie es exactamente igual al número de las que entran en ella. Es decir, el flujo neto $\phi_{\text{m neto}}$ del campo a través de cualquier superficie cerrada S es siempre cero:*

$$\phi_{\text{m neto}} = \oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = \oint_S B_n\,dA = 0 \qquad 27.15$$

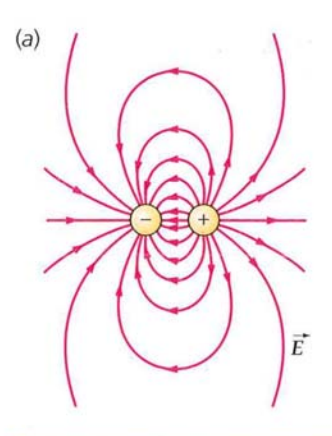
LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

siendo B_n la componente de $\vec{B}$ normal a la superficie S en el elemento de área dA. La definición del flujo magnético ϕ_m es exactamente análoga a la del flujo eléctrico con $\vec{E}$ reemplazado por $\vec{B}$. Este resultado es la ley de Gauss del magnetismo. Es la afirmación matemática de que no existen puntos en el espacio a partir de los cuales las líneas de campo divergen, o puntos en los cuales las líneas convergen. Es decir, los polos magnéticos aislados no existen.† La unidad fundamental del mag-

* Recuérdese que el flujo neto del campo eléctrico es una medida del número neto de líneas que salen de una superficie cerrada y es igual a $Q_{\text{interior}}/\epsilon_0$.

† La existencia de monopolos magnéticos constituye objeto de discusión, y su búsqueda permanece activa. Sin embargo, hasta la fecha no se ha descubierto ninguno.

netismo es el dipolo magnético. La figura 27.24 compara las líneas de $\vec{B}$ de un dipolo magnético con las líneas de $\vec{E}$ de un dipolo eléctrico. Obsérvese que lejos de los dipolos, las líneas son idénticas. Sin embargo, dentro del dipolo, las líneas de $\vec{E}$ son de sentido opuesto a las de $\vec{B}$. Las líneas de $\vec{E}$ salen de la carga positiva y convergen sobre la negativa, mientras que las líneas de $\vec{B}$ son bucles cerrados continuos.



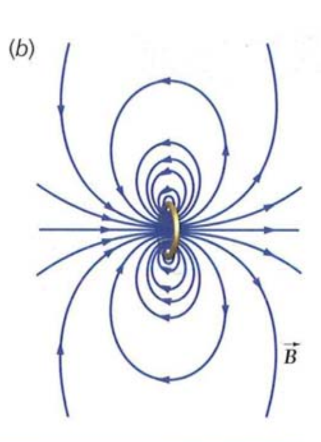


FIGURA 27.24 (*a*) Líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico. (*b*) Líneas del campo magnético de un dipolo magnético. Lejos de los dipolos, las líneas del campo son idénticas. En la región entre las cargas en (*a*), el campo eléctrico es de signo opuesto al momento del dipolo, mientras que dentro de la espira en (*b*), el campo magnético es paralelo al momento del dipolo.

27.4 LEY DE AMPÈRE

En el capítulo 22 vimos que en distribuciones de carga altamente simétricas podíamos calcular el campo eléctrico más fácilmente si se utilizaba la ley de Gauss en lugar de la ley de Coulomb. Una situación semejante se presenta en magnetismo. La ley de Ampère, relaciona la integral de línea de la componente tangencial B_t alrededor de una curva cerrada C con la corriente I_C que atraviesa la superficie limitada por dicha curva. Esta relación puede utilizarse para obtener una expresión del campo magnético en situaciones con un alto grado de simetría. En forma matemática, la **ley de Ampère** es:

$$\oint_C B_t\, d\ell = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C \quad \text{C es cualquier curva cerrada} \qquad 27.16$$

LEY DE AMPÈRE

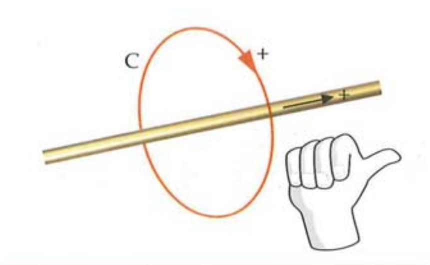


FIGURA 27.25 El sentido positivo para la curva cerrada C a la que se aplica la ley de Ampère integral es aquel que queda fijado por la regla de la mano derecha con el dedo pulgar indicando el sentido de la corriente que atraviesa la superficie encerrada por dicha curva.

donde I_C es la corriente neta que penetra en el área *S* limitada por la curva C. El sentido positivo para el camino de integración viene dado por la dirección de la corriente I_C de acuerdo con la regla de la mano derecha mostrada en la figura 27.25. La ley de Ampère se cumple para cualquier curva siempre y cuando las corrientes sean estacionarias y continuas. Esto significa que la corriente no varía con el tiempo y que no hay acumulación espacial de carga. La ley de Ampère es muy útil para calcular campos $\vec{B}$ en situaciones de simetría tales que $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ pueda ser igual a $B\oint_C d\ell$ (el producto de *B* por una distancia). La integral $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ se denomina circulación. Más concretamente, $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ se denomina circulación del campo $\vec{B}$ a lo largo de la curva C. La ley de Ampère y la ley de Gauss son ambas de considerable importancia teórica e igualmente válidas haya o no simetría; no obstante, si no hay simetría, no son útiles para el cálculo de campos magnéticos o eléctricos.

! La ley de Ampère se cumple para corrientes estacionarias y continuas.

La aplicación más simple de la ley de Ampère es la determinación del campo magnético creado por un conductor infinitamente largo y rectilíneo portador de una corriente. La figura 27.26 muestra una curva circular alrededor de un punto situado sobre un alambre largo que pasa por el centro de la misma. Según la ley de Biot y Savart, la dirección del campo magnético debido a cada elemento diferencial de corriente es tangente a esta circunferencia; por lo tanto, tiene la misma dirección que $d\vec{\ell}$, siendo su módulo constante en todo punto de la circunferencia. Consecuentemente, la aplicación de la ley de Ampère ($\oint_C B_t\, d\ell = \mu_0 I_C$) nos da lo siguiente:

$$B\oint_C d\ell = \mu_0 I_C$$

en donde se ha tenido en cuenta que *B* tiene el mismo valor en todos los puntos de la circunferencia. La integral de $d\ell$ alrededor del círculo es igual a $2\pi r$ y la intensidad I_C es la que corresponde al alambre. Así, se obtiene $B2\pi R = \mu_0 I$, o

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

que es la ecuación 27.13.

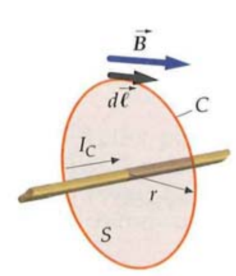


FIGURA 27.26 Geometría para el cálculo del campo magnético de un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente, mediante la ley de Ampère. Sobre una circunferencia que rodea al conductor, el campo magnético es constante y tangente a la misma.

Ejemplo 27.10 La dirección del campo magnético — Conceptual

Demostrar que la dirección del campo magnético que genera una corteza cilíndrica, de gran longitud por la que circula corriente, es tangente a un círculo contenido en un plano perpendicular al eje y centrado en él (figura 27.27).

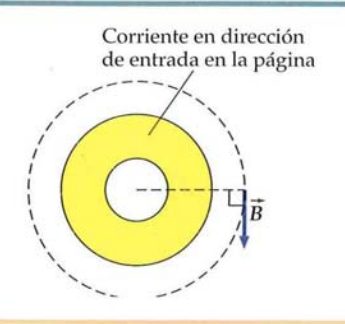


FIGURA 27.27

PLANTEAMIENTO Consideraremos el cilindro como un conjunto de hilos delgados paralelos, pegados unos a otros, por los que circula una fracción pequeña de corriente y que la suma de las corrientes del conjunto es igual a la corriente de la corteza. Elegimos un punto P arbitrario. Se divide la sección transversal de la corteza por la mitad mediante un plano que contenga al punto P y al eje. Usando la regla de la mano derecha (figura 27.25), determinar la dirección del campo magnético en P debido a la corriente de uno de los hilos. Se identifica el hilo simétrico en la otra mitad de la sección transversal y se encuentra la dirección del campo magnético de este hilo simétrico con argumento similar. La dirección del campo magnético suma de los campos magnéticos generados por los dos hilos en P está en la posición intermedia entre las direcciones de los campos correspondientes a los dos hilos.

SOLUCIÓN

1. Se elige el punto arbitrario P. Se utiliza la regla de la mano derecha (figura 27.25) para encontrar las direcciones del campo magnético en P debido a la corriente de un hilo y el de su simétrico. Se dibujan los respectivos campos magnéticos de ambos hilos en el punto P (figura 27.28). Se dibuja también el vector resultante suma de los dos campos magnéticos:

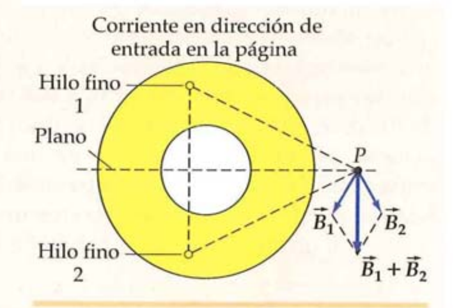


FIGURA 27.28

2. El campo magnético resultante en P es la suma de los campos creados por todos los hilos que componen la corteza:

El campo magnético resultante en P está en la misma dirección que la suma $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Esto es así porque la suma de los campos magnéticos debidos a las corrientes de cada uno de los hilos y sus respectivos simétricos apuntan en la misma dirección de $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

3. Si el punto P elegido está dentro de la corteza, el campo magnético en P debido a las corrientes de los hilos a la derecha de P (figura 27.29) tendrá dirección opuesta al generado por los hilos que están a la izquierda de P (figura 27.28):

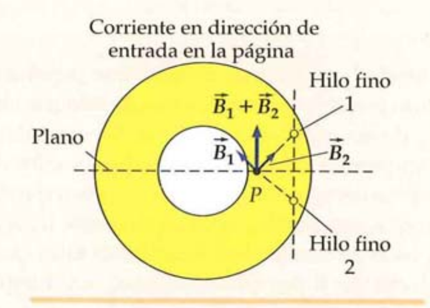


FIGURA 27.29

Ejemplo 27.11 $\vec{B}$ en el interior y exterior de un alambre

Un alambre largo y recto de radio R transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda el área transversal del conductor. Determinar el campo magnético dentro y fuera del alambre.

PLANTEAMIENTO Utilizaremos la ley de Ampère para calcular $\vec{B}$ en virtud del alto grado de simetría. A una distancia r (figura 27.30) sabemos que $\vec{B}$ es tangente a la circunferencia de radio r que rodea el conductor y constante en módulo en todos los puntos de la misma. La corriente que atraviesa la superficie S limitada por C depende de que r sea menor o mayor que el radio del alambre R.

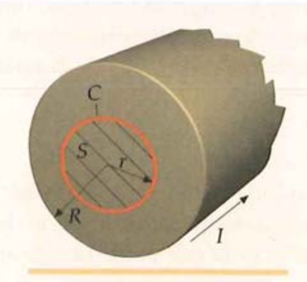
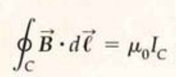


FIGURA 27.30

SOLUCIÓN

1. La ley de Ampère relaciona la circulación del campo magnético $\vec{B}$ alrededor de la curva C con la corriente que atraviesa la superficie encerrada por dicha curva:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C$$

2. Evaluar la circulación de $\vec{B}$ alrededor de la circunferencia de radio r, coaxial con el hilo:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint_C d\ell = B2\pi r$$

3. Sustituir el resultado en la ley de Ampère y obtener B:

$B2\pi r = \mu_0 I_C$

así tenemos que

$$B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r}$$

4. Fuera del hilo, $r > R$, y toda la corriente atraviesa la superficie encerrada por la curva C:

$I_C = I$

o

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \qquad r \geq R}$$

5. Dentro del hilo, $r < R$. Considerando una distribución uniforme para I_C, obtener B:

$$\frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$

o bien

$$\left(I_C = \frac{r^2}{R^2} I\right)$$

así tenemos que

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_C}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{(r^2/R^2)I}{r} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \leq R}$$

COMPROBACIÓN Los resultados de los pasos 4 y 5 dan la misma expresión de B para $r = R$, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN Dentro del alambre, el campo crece con la distancia desde el centro del conductor. La figura 27.31 muestra el gráfico de B en función de r para este ejemplo.

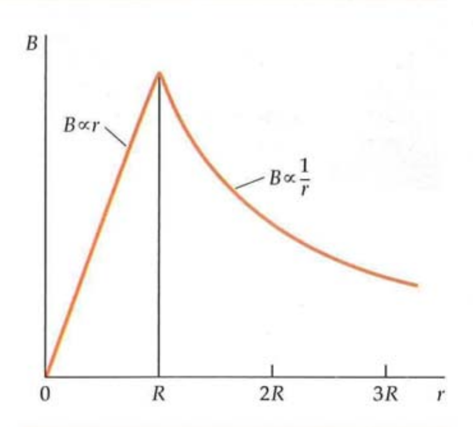


FIGURA 27.31

Vemos en el ejemplo 27.11 que el campo magnético debido a una corriente uniformemente distribuida sobre un alambre de radio R viene dado por

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r & r \leq R \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r} & r \geq R \end{cases} \qquad 27.17$$

B PARA UN HILO RECTO LARGO (INFINITO)

En nuestra siguiente aplicación de la ley de Ampère calcularemos el campo magnético de un **toroide**, formado por espiras de conductor enrolladas alrededor de una figura en forma de donut como indica la figura 27.32. Tenemos N vueltas de conductor, cada una transportando una corriente I. Para calcular B, determinaremos la integral de línea $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ alrededor de una circunferencia de radio r centrada en el centro del toroide. Por simetría, $\vec{B}$ es tangente a este círculo y constante en módulo en todos los puntos de la circunferencia. Por lo tanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B2\pi r = \mu_0 I_C$$

Sean a y b los radios interior y exterior del toroide, respectivamente. La corriente total a través de la superficie S limitada por el círculo de radio r para $a < r < b$ es NI. La ley de Ampère nos da

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C \qquad \text{o} \qquad (B2\pi r = \mu_0 NI)$$

o sea,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad a < r < b \qquad 27.18$$

B EN EL INTERIOR DE UN TOROIDE ESTRECHAMENTE ENROLLADO

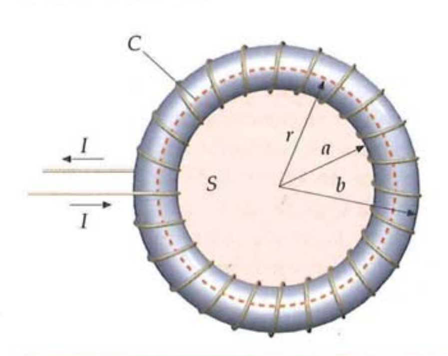


FIGURA 27.32 Un toroide está formado por espiras de alambre enrolladas alrededor de una figura en forma de neumático. El campo magnético a cualquier distancia r puede determinarse aplicando la ley de Ampère al círculo de radio r. S es la superficie limitada por la curva C. Los hilos que forman el arrollamiento penetran en la superficie S una vez cada vuelta.

Si r es menor que a, no existe corriente a través de la superficie S. Si r es mayor que b, la corriente total a través de S es cero, pues por cada corriente I hacia dentro de la página de la figura 27.27 en la superficie interna del toroide, existe una corriente igual I hacia fuera de la página en la superficie exterior. Así, el campo magnético es cero, tanto para $r < a$ como para $r > b$.

$$B = 0, \qquad r < a \text{ o } r > b$$

El campo magnético interior al toroide no es uniforme, sino que decrece al incrementarse r. Sin embargo, si el radio de las espiras del toroide, $(b - a)$, es mucho menor que el radio medio $(a + b)$ del toroide, la variación de r desde $r = a$ a $r = b$ es pequeña y B es, aproximadamente, uniforme, como en un solenoide.

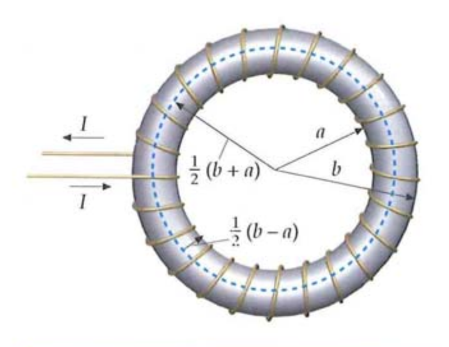
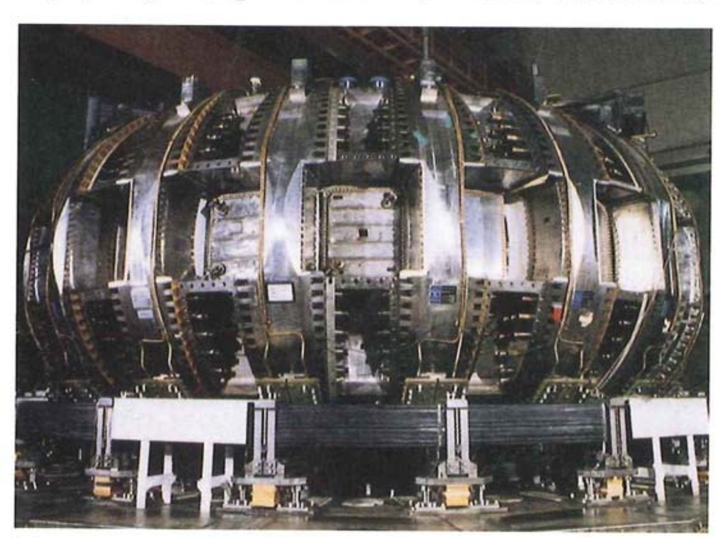
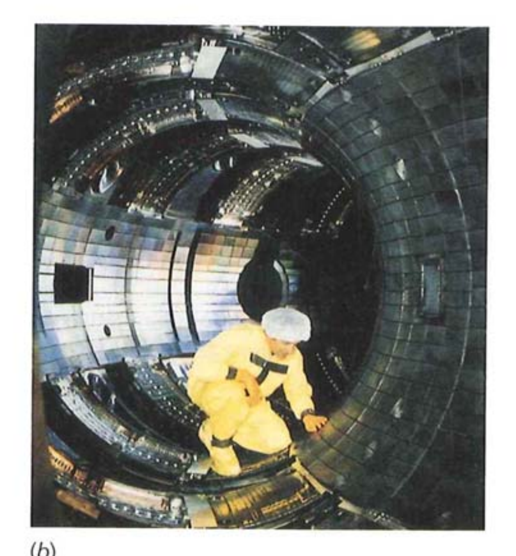


FIGURA 27.33 El toroide tiene como radio medio $r = \frac{1}{2}(b + a)$, donde a y b son el radio interno y externo del toroide. Cada vuelta de conductor es una circunferencia de radio $\frac{1}{2}(b - a)$.



(a)



(b)

(a) El reactor de ensayo de fusión Tokamak es un gran toroide que produce un campo magnético para confinar partículas cargadas. Las bobinas, que contienen unos 10 km de alambre de cobre, refrigerado por agua, transportan una corriente pulsante con un valor pico de 73000 A que produce un campo magnético de 5,2 T durante 3 s. (b) Inspección del ensamblaje del Tokamak desde el interior del toroide. *(Gentileza de Princeton University Plasma Physics Laboratory.)*

LIMITACIONES DE LA LEY DE AMPÈRE

La ley de Ampère es útil para calcular el campo magnético sólo cuando se trata de una corriente estacionaria y existe un alto grado de simetría. Consideremos la espira de corriente indicada en la figura 27.34. De acuerdo con la ley de Ampère, la integral de línea $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B_t \, d\ell$ alrededor de una curva tal como la C de la figura es igual a μ_0 multiplicado por la corriente I de la espira. Aunque la ley de Ampère es cierta para esta curva, la componente tangencial del campo magnético B_t no es constante a lo largo de una curva cualquiera que rodea la corriente. Así pues, no hay simetría suficiente en este caso para permitirnos calcular la integral $\oint_C B_t \, d\ell$ y despejar B_t.

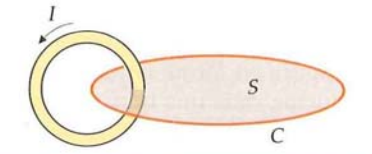


FIGURA 27.34 La ley de Ampère es válida para la curva C que envuelve a la corriente de la espira circular, pero no es útil para hallar B_t debido a que no podemos sacar B_t fuera de la integral.

La figura 27.35 muestra un segmento de corriente finita de longitud ℓ. Deseamos determinar el campo magnético en el punto P, el cual equidista de los extremos del segmento y está a una distancia r desde el centro de éste. Una aplicación directa de la ley de Ampère nos da de nuevo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Este resultado es el mismo que en el caso de un conductor infinitamente largo, puesto que podemos hacer los mismos razonamientos de simetría. El resultado no concuerda con el obtenido a partir de la ley de Biot-Savart. Esta ley da

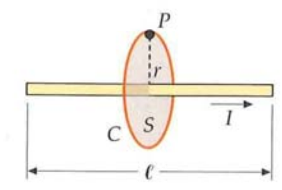


FIGURA 27.35 La aplicación de la ley de Ampère para hallar el campo magnético en la mediatriz de un segmento de corriente finita da un resultado incorrecto.

un resultado menor que depende de la longitud del segmento de corriente y concuerda con la experiencia. Si el segmento de corriente es sólo una parte de un circuito continuo que transporta una corriente, como se indica en la figura 27.36, la ley de Ampère es válida para la curva C, pero no puede utilizarse para determinar el campo magnético en el punto P porque no hay simetría.

En la figura 27.37, la corriente en el segmento surge de un pequeño conductor esférico con una carga inicial $+Q$ a la izquierda del segmento y otra $-Q$ a la derecha. Cuando se conectan ambas cargas, durante un corto tiempo se produce en el segmento una corriente $I = -dQ/dt$ hasta que las esferas se descargan. En este caso, tenemos la simetría necesaria para suponer que $\vec{B}$ es tangente a la curva y constante en magnitud a lo largo de la misma. En una situación como ésta, en la cual la corriente es discontinua en el espacio, la ley de Ampère no es válida. En el capítulo 30 veremos como Maxwell fue capaz de modificar la ley de Ampère, de modo que fuera válida para todas las corrientes. Cuando la forma generalizada de Maxwell para la ley de Ampère se utiliza para calcular el campo magnético correspondiente a un segmento de corriente, como el indicado en la figura 27.37, el resultado concuerda con el obtenido mediante la ley de Biot y Savart.

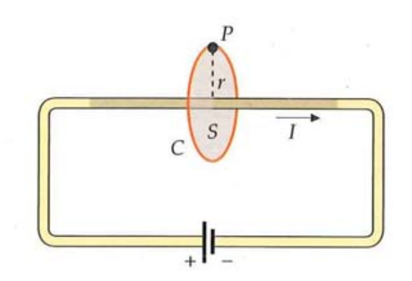


FIGURA 27.36 Si el segmento de corriente de la figura 27.34 es una parte de un circuito completo, la ley de Ampère para la curva C es correcta, pero no existe la simetría suficiente para utilizarla con objeto de hallar el campo magnético en el punto P.

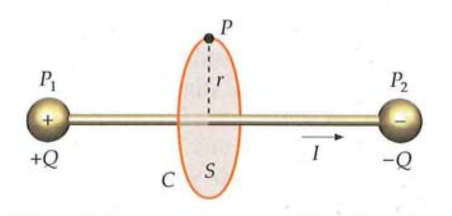


FIGURA 27.37 Si el segmento de corriente de la figura 27.35 es debido a un flujo momentáneo de carga desde un pequeño conductor situado a la izquierda hasta otro situado a la derecha, hay suficiente simetría para utilizar la ley de Ampère y calcular el campo magnético en P, pero la ley de Ampère no es válida porque la corriente no es continua en el espacio.

27.5 EL MAGNETISMO EN LA MATERIA

Los átomos tienen momentos dipolares magnéticos debido al movimiento de sus electrones y al momento dipolar magnético intrínseco asociado al espín de los electrones. A diferencia de los dipolos eléctricos, la alineación de los dipolos magnéticos paralelos a un campo magnético externo tiende a *incrementar* el campo. Podemos analizar esta diferencia comparando las líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico con las líneas del campo magnético de un dipolo magnético, tal como una pequeña espira de corriente, como muestra la figura 27.24. Lejos de los dipolos, las líneas de campo son idénticas. Sin embargo, entre las cargas del dipolo eléctrico, las líneas de campo se oponen al sentido del momento dipolar, mientras que dentro de la espira de corriente, las líneas de campo magnético son paralelas al momento dipolar magnético. Así, pues, en un material magnéticamente polarizado, los dipolos magnéticos crean un campo magnético paralelo a los vectores del momento-dipolar-magnético.

Podemos clasificar los materiales en tres categorías, **paramagnéticos**, **diamagnéticos** y **ferromagnéticos**, de acuerdo con el comportamiento de sus momentos magnéticos en un campo magnético externo. El paramagnetismo surge por el alineamiento parcial de los espines electrónicos (en los metales) o de los momentos magnéticos atómicos o moleculares en presencia de un campo magnético externo en la dirección y sentido del campo. En los materiales paramagnéticos, los dipolos magnéticos no interaccionan fuertemente entre sí y normalmente están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo, los dipolos se alinean parcialmente en la dirección y sentido del campo, produciendo así un incremento del mismo. Sin embargo, a temperaturas ordinarias y con campos externos normales, sólo una fracción muy pequeña de las moléculas se ven alineadas debido a que el movimiento térmico tiende a desordenar su orientación. El aumento del campo magnético total es, por consiguiente, muy pequeño. El ferromagnetismo es mucho más complicado. Debido a una fuerte interacción entre los dipolos magnéticos vecinos, puede conseguirse un alto grado de alineación incluso con campos magnéticos externos débiles, originando así un incremento muy grande del campo total. Incluso en el caso de que no exista ningún campo magnético externo, los materiales ferromagnéticos pueden tener sus dipolos magnéticos alineados, como sucede en el caso de los imanes permanentes. El diamagnetismo surge de los momentos dipolares magnéticos orbitales inducidos por un campo magnético externo. Estos momentos magnéticos son opuestos al sentido del campo magnético aplicado y, por lo tanto, debilitan el campo magnético total B. Este efecto realmente ocurre en todos los materiales, pero como los momentos magnéticos inducidos son muy pequeños comparados con los momentos magnéticos permanentes, el diamagnetismo viene enmascarado por los efectos paramagnéticos o ferromagnéticos. El diamagnetismo, por lo tanto, sólo se observa en materiales que no poseen momentos magnéticos permanentes.

IMANACIÓN Y SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA

Cuando un material se sitúa en un campo magnético intenso, como el de un solenoide, el campo magnético de éste tiende a alinear los momentos dipolares magnéticos (permanentes o inducidos) dentro del material, el cual se imana. Un material que experimenta este proceso se describe por su **imanación $\vec{M}$**, que se define por el momento dipolar magnético neto por unidad de volumen del material:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \qquad 27.19$$

Mucho antes de conocerse la estructura atómica o molecular, Ampère propuso un modelo de magnetismo en el cual la imanación de los materiales era debida a corrientes circulares microscópicas dentro del material imanado. Actualmente, se sabe que estas corrientes circulares constituyen un modelo clásico para el movimiento orbital y el espín de los electrones. Consideremos un cilindro de material imanado. La figura 27.38 muestra las corrientes atómicas circulares en el cilindro con sus momentos magnéticos alineados a lo largo del eje del cilindro. Debido a la cancelación de las corrientes circulares vecinas, la corriente neta en cualquier punto interior del material es cero y el único resultado es una corriente neta sobre la superficie del mismo. Esta corriente superficial (figura 27.39), llamada **corriente amperiana** (o corriente de imanación), es semejante a la corriente real de los arrollamientos del solenoide.

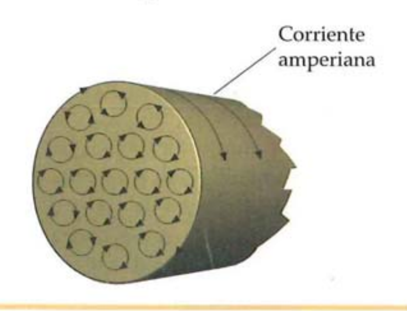


FIGURA 27.38 Modelo de espiras de corriente atómicas en el que todos los dipolos atómicos son paralelos al eje del cilindro. La corriente neta en cualquier punto dentro del material es cero debido a la cancelación de los átomos vecinos. El resultado es una corriente superficial semejante a la de un solenoide.

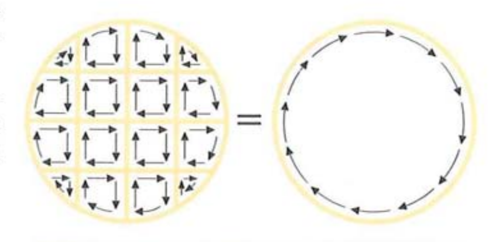


FIGURA 27.39 Las corrientes en las espiras adyacentes en el interior de un material uniformemente imanado se cancelan permaneciendo sólo una corriente superficial. Esta cancelación tiene lugar en todo punto interior, cualquiera que sea la forma de las espiras.

La figura 27.40 muestra una pequeña sección en forma de disco de área transversal A, longitud $d\ell$ y volumen $dV = A\,d\ell$. Sea di la corriente de imanación sobre la superficie del disco. El módulo del momento dipolar magnético del disco es el mismo que el de una corriente circular de área A que transporta una corriente di:

$$d\mu = A\,di$$

El módulo de la imanación M del disco es el momento magnético por unidad de volumen:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A\,di}{A\,d\ell} = \frac{di}{d\ell} \qquad 27.20$$

Así, el módulo del vector imanación es la corriente amperiana por unidad de longitud a lo largo de la superficie del material imanado. De este resultado se deduce que las unidades de M son amperes por metro.

Sea un cilindro de imanación uniforme $\vec{M}$ paralelo a su eje. Como hemos visto, el efecto de la imanación es el mismo que si el cilindro transportara una corriente superficial por unidad de longitud de módulo M. Esta corriente es semejante a la transportada por un solenoide enrollado compactadamente. Para un solenoide, la corriente por unidad de longitud es nI, siendo n el número de vueltas por unidad de longitud e I la corriente de cada vuelta. El módulo del campo magnético B_m dentro del cilindro y lejos de sus extremos viene dado por la ecuación 27.10 para un solenoide reemplazando nI por M:

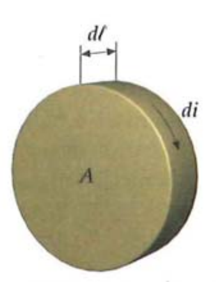


FIGURA 27.40 Disco elemental para el estudio de la relación entre la imanación M y la corriente superficial por unidad de longitud.

$$B_m = \mu_0 M \qquad 27.21$$

Situemos un cilindro de material magnético dentro de un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud que transporta una corriente I. El campo aplicado del solenoide $\vec{B}_{ap}$ ($B_{ap} = \mu_0 nI$) imana el material, de modo que éste adquiere una imanación $\vec{M}$. El campo magnético resultante en un punto interior al solenoide y lejos de sus extremos debido a la corriente en el solenoide más el material imanado es

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0\vec{M} \qquad 27.22$$

En los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos, $\vec{M}$ posee la misma dirección y sentido que $\vec{B}_{ap}$; en los materiales diamagnéticos, $\vec{M}$ se opone a $\vec{B}_{ap}$. En los materiales paramagnéticos y diamagnéticos, la imanación resulta proporcional al campo magnético aplicado que produce el alineamiento de los dipolos magnéticos del material. Así, podemos escribir

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_{ap}}{\mu_0} \qquad 27.23$$

en donde χ_m es un número sin dimensiones llamado **susceptibilidad magnética**. La ecuación 27.21 se convierte en

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0\vec{M} = \vec{B}_{ap}(1 + \chi_m) = K_m\vec{B}_{ap} \qquad 27.24$$

donde

$$K_m = 1 + \chi_m \qquad 27.25$$

se denomina **permeabilidad relativa** del material. Para los materiales paramagnéticos, χ_m es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. Para los materiales diamagnéticos (a excepción de los superconductores) es un número negativo pequeño independiente de la temperatura. La tabla 27.1 expone la susceptibilidad magnética de diversos materiales paramagnéticos y diamagnéticos. Como puede verse, en los sólidos reseñados esta magnitud es del orden de 10^{-5} y $K_m \approx 1$.

La imanación de los materiales ferromagnéticos que estudiaremos posteriormente es mucho más complicada. La permeabilidad relativa K_m definida como el cociente B/B_{ap} no es constante y sus valores máximos varían entre 5000 y 100 000. En el caso de los imanes permanentes, K_m no puede definirse, ya que estos materiales exhiben imanación incluso en ausencia de un campo aplicado.

Tabla 27.1 Susceptibilidad magnética de diversos materiales a 20 °C

Material	χ_m
Aluminio	$2{,}3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1{,}66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0{,}98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2{,}2 \times 10^{-5}$
Oro	$-3{,}6 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1{,}2 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-3{,}2 \times 10^{-5}$
Plata	$-2{,}6 \times 10^{-5}$
Sodio	$-0{,}24 \times 10^{-5}$
Titanio	$7{,}06 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$6{,}8 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (1 atm)	$-9{,}9 \times 10^{-9}$
Dióxido de carbono (1 atm)	$-2{,}3 \times 10^{-9}$
Nitrógeno (1 atm)	$-5{,}0 \times 10^{-9}$
Oxígeno (1 atm)	2090×10^{-9}

MOMENTOS MAGNÉTICOS ATÓMICOS

La imanación de un material paramagnético o ferromagnético puede relacionarse con los momentos magnéticos permanentes de los átomos individuales o electrones del material. El momento magnético orbital de un electrón atómico puede deducirse de forma semiclásica aunque sea de origen mecánico-cuántico. En efecto, consideremos una partícula de masa m y carga q que se mueve con velocidad v en un círculo de radio r, como muestra la figura 27.41. El módulo del momento angular de la partícula es

$$L = mvr \qquad 27.26$$

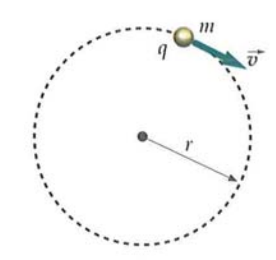


FIGURA 27.41 Partícula de carga q y masa m moviéndose en un círculo de radio r. El momento angular está dirigido hacia el papel y su magnitud es mvr; el momento magnético está dirigido hacia el papel (si q es positivo) y su magnitud es $\frac{1}{2}qvr$.

El módulo del momento magnético es el producto de la corriente por el área del círculo:

$$\mu = IA = I\pi r^2$$

Si T es el tiempo durante el cual la carga completa una revolución, la intensidad de la corriente (carga que pasa por un punto en la unidad de tiempo) es q/T. Como el periodo T es igual a la distancia $2\pi r$ dividida por la velocidad v, la intensidad es

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

El momento magnético es, por lo tanto,

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}qvr \qquad 27.27$$

Teniendo en cuenta que $vr = L/m$ (ecuación 27.26), resulta para el momento magnético

$$\mu = \frac{q}{2m}L$$

Si la carga q es positiva, el momento angular y el momento magnético tienen igual sentido. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L} \qquad 27.28$$

RELACIÓN CLÁSICA ENTRE EL MOMENTO MAGNÉTICO Y EL MOMENTO ANGULAR

La ecuación 27.28 es la relación general clásica entre el momento magnético y el momento angular. Se cumple también en la teoría cuántica del átomo para el momento angular orbital, pero no para el momento angular de espín intrínseco del electrón. Para el espín electrónico, el momento magnético es el doble que el previsto por esta ecuación.* El factor extra 2 es un resultado de la teoría cuántica que no tiene analogía en la mecánica clásica.

Como el momento angular está cuantizado, el momento magnético de un átomo también lo está. El cuanto del momento angular es $\hbar = h/(2\pi)$, en donde h es la constante de Planck. Por lo tanto, podemos expresar el momento magnético en función de $\vec{L}/\hbar$:

$$\vec{\mu} = \frac{q\hbar}{2m}\frac{\vec{L}}{\hbar}$$

Para un electrón, $m = m_e$ y $q = -e$, de modo que el momento magnético del electrón debido a su movimiento orbital es

$$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\vec{L}}{\hbar} = -\mu_B\frac{\vec{L}}{\hbar} \qquad 27.29$$

MOMENTO MAGNÉTICO DEBIDO AL MOVIMIENTO ORBITAL DE UN ELECTRÓN

donde

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2} = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T}$$
$$= 5{,}79 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/T} \qquad 27.30$$

MAGNETÓN DE BOHR

es la unidad cuántica del momento magnético llamada **magnetón de Bohr**. El momento magnético de un electrón debido a su momento angular de espín intrínseco $\vec{S}$ es

$$\vec{\mu}_s = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\vec{S}}{\hbar} = -2\mu_B\frac{\vec{S}}{\hbar} \qquad 27.31$$

MOMENTO MAGNÉTICO DEBIDO AL ESPÍN ELECTRÓNICO

Aunque el cálculo del momento magnético de un átomo es un problema complicado en teoría cuántica, el resultado para todos los electrones, de acuerdo con los resultados teóricos y medidas experimentales, es que el momento magnético es del orden de unos pocos magnetones de Bohr. Para los átomos de momento angular neto nulo, el momento magnético neto es cero. (La estructura cortical de los átomos se trata en el capítulo 36.)

Si todos los átomos o moléculas de un material poseen alineados sus momentos magnéticos, el momento magnético por unidad de volumen del material es el producto del número de moléculas por unidad de volumen n y el momento magnético μ de cada molécula. En este caso límite, la **imanación de saturación** M_s es

$$M_s = n\mu \qquad 27.32$$

El número de moléculas por unidad de volumen puede determinarse a partir de la masa molecular M, la densidad del material ρ y el número de Avogadro N_A:

$$n = \frac{N_A\,(\text{átomos/mol})}{M\,(\text{kg/mol})}\rho(\text{kg/m}^3) \qquad 27.33$$

* Este resultado, y el fenómeno del propio espín del electrón, fue previsto en 1927 por P. Dirac, quien combinó la relatividad especial y la mecánica cuántica en una ecuación de onda relativista llamada ecuación de Dirac. Las medidas de precisión indican que el momento magnético del electrón debido a su espín es 2,00232 veces mayor que el previsto por la ecuación 27.28. El hecho de que el momento magnético intrínseco del electrón sea, aproximadamente, el doble del valor esperado pone en evidencia que el modelo simple del electrón como una esfera que gira no debe tomarse al pie de la letra.

Ejemplo 27.12 Imanación de saturación para el hierro

Determinar la imanación de saturación y el campo magnético que se produce en el hierro, suponiendo que cada átomo de este metal tiene un momento magnético de 1 magnetón de Bohr.

PLANTEAMIENTO Determinar el número de moléculas por unidad de volumen a partir de la densidad del hierro $\rho = 7{,}9 \times 103\ \mathrm{kg/m^3}$ y su masa molecular $M = 55{,}8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$.

SOLUCIÓN

1. La imanación de saturación es el producto del número de moléculas por unidad de volumen y el momento magnético de cada molécula:

$$M_s = n\mu$$

2. Calcular el número de moléculas por unidad de volumen a partir del número de Avogadro, la masa molecular y la densidad:

$$n = \frac{N_A}{M}\rho = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{55{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}}(7{,}87 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3})$$
$$= 8{,}49 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3$$

3. Considerar este resultado y $\mu = 1$ magnetón de Bohr para calcular la imanación de saturación:

$$M_s = n\mu$$
$$= (8{,}49 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3)(9{,}27 \times 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2})$$
$$= \boxed{7{,}88 \times 10^5\ \mathrm{A/m}}$$

4. El campo magnético sobre el eje de un cilindro largo de hierro resultante de esta imanación máxima viene dado por $B = \mu_0 M_s$:

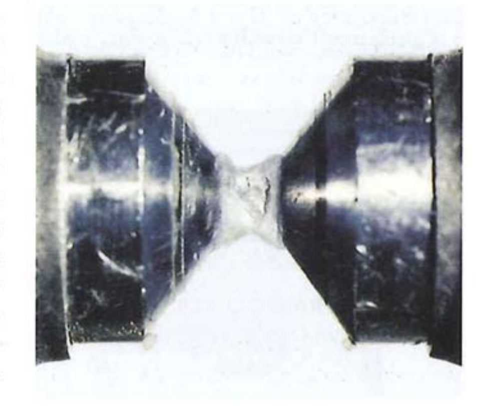
$$B = \mu_0 M_s$$
$$= (4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot A})(7{,}86 \times 10^5\ \mathrm{A/m})$$
$$= \boxed{0{,}990\ \mathrm{T} \approx 1\ \mathrm{T}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 4, $B \approx 1$ T, es un campo magnético muy intenso. Este resultado es tan alto debido al campo de saturación dentro del material ferromagnético.

OBSERVACIÓN El campo magnético de saturación medido en el hierro recocido es aproximadamente 2,16 T, lo que indica que el momento magnético de un átomo de hierro es algo superior a 2 magnetones de Bohr. Este momento magnético es debido, principalmente, a los espines de dos electrones no apareados en el átomo de hierro.

*PARAMAGNETISMO

El paramagnetismo se presenta en materiales cuyos átomos tienen momentos magnéticos permanentes que interactúan entre sí sólo muy débilmente, dando lugar a una susceptibilidad magnética χ_m positiva y muy pequeña. Cuando no existe ningún campo magnético externo, estos momentos magnéticos están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo tienden a alinearse paralelamente al campo, pero esta alineación está contrarrestada por la tendencia que tienen los momentos magnéticos a orientarse aleatoriamente debido a la agitación térmica. La fracción de los momentos que se alinean con el campo depende de la intensidad de éste y de la temperatura. Esta fracción es normalmente pequeña, pues la energía de un momento magnético en un campo magnético externo es típicamente mucho menor que la energía interna de un átomo del material, la cual es del orden de kT, siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta.



El oxígeno líquido, paramagnético, es atraído por el campo magnético de un imán permanente. Como el campo magnético no es uniforme en los dipolos magnéticos, se ejerce una fuerza neta. *(J. F. Allen, St. Andrews University, Scotland.)*

La energía potencial de un dipolo magnético de momento $\vec{\mu}$ en un campo magnético externo $\vec{B}$ viene dada por la ecuación 26.16:

$$U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

La energía potencial cuando el momento es paralelo al campo ($\theta = 0$) es, por lo tanto, menor que cuando es antiparalelo ($\theta = 180°$) en la cantidad $2\,\mu B$. Para un momento magnético típico de 1 magnetón de Bohr y un campo magnético intenso de 1 T, la diferencia de energía potencial es

$$\Delta U = 2\mu_B B = 2(5{,}79 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/T})(1\,\mathrm{T}) = 1{,}16 \times 10^{-4}\ \mathrm{eV}$$

A una temperatura normal de $T = 300$ K, la energía térmica típica kT es

$$kT = (8{,}62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 2{,}59 \times 10^{-2}\ \text{eV}$$

la cual es unas 200 veces mayor que $2\mu_B B$. Así, incluso en un campo magnético intenso de 1 T, la mayor parte de los momentos magnéticos estarán orientados aleatoriamente a causa de los movimientos térmicos, a menos que la temperatura sea muy baja.

La figura 27.42 muestra un gráfico de la imanación M en función de un campo magnético externo aplicado B_{ap} a una determinada temperatura. En campos muy intensos, casi todos los momentos magnéticos están alineados con el campo y $M \approx M_s$. (Para los campos magnéticos alcanzables en un laboratorio, esto sólo puede ocurrir a temperaturas muy bajas.) Cuando $B_{ap} = 0$, $M = 0$, lo que indica que la orientación de los momentos es completamente aleatoria. En campos débiles, la imanación es aproximadamente proporcional al campo aplicado, lo que viene indicado por la línea naranja de trazos de la figura. En esta región, la imanación viene dada por

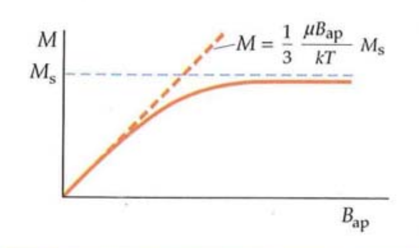


FIGURA 27.42 Representación gráfica de la imanación M en función del campo aplicado B_{ap}. En campos muy intensos, la imanación se aproxima al valor de saturación M_s. Este valor se alcanza sólo a muy bajas temperaturas. En campos débiles, la imanación es aproximadamente proporcional a B_{ap}, resultado conocido como ley de Curie.

$$M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s \qquad 27.34$$

LEY DE CURIE

Obsérvese que $\mu B_{ap}/(kT)$ es el cociente entre la energía máxima de un dipolo situado en el campo magnético y la energía térmica característica. El hecho de que la imanación varía en razón inversa con la temperatura absoluta fue descubierto experimentalmente por Pierre Curie y se conoce con el nombre de **ley de Curie**.

Ejemplo 27.13 Aplicación de la ley de Curie

Si $\mu = \mu_B$, ¿a qué temperatura la imanación será igual al 1% de la imanación de saturación en un campo magnético aplicado de 1 T?

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ecuación 27.34 y resolvemos para una temperatura a la que M/M_s sea igual a 0,01000.

SOLUCIÓN

1. La ley de Curie relaciona M, T, M_s y B_{ap}:

$$M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s$$

2. Calculamos T considerando $\mu = \mu_B$ y $M/M_s = 0{,}01$:

$$T = \frac{\mu_B B_{ap}}{3k}\frac{M_s}{M} = \frac{(5{,}79 \times 10^{-5}\ \text{eV/T})(1{,}00\ \text{T})}{3(8{,}62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})}100$$

$$= \boxed{22{,}4\ \text{K}}$$

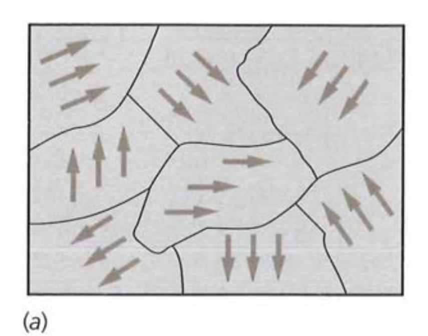
COMPROBACIÓN El resultado del paso 2, tal como era de esperar, es una temperatura superior al cero absoluto.

OBSERVACIÓN Vemos en este ejemplo que incluso para un campo magnético intenso de 1 T, a temperaturas por encima de 22,4 K la imanación es inferior al 1% de saturación.

PROBLEMA PRÁCTICO 27.9 Si $\mu = \mu_B$, ¿qué fracción de la imanación de saturación es M a 300 K para un campo magnético externo de 1,5 T?

*FERROMAGNETISMO

El ferromagnetismo se presenta en el hierro puro, cobalto y níquel y en aleaciones de estos metales entre sí. También tiene lugar en el gadolinio, disprosio y en unos pocos compuestos. El ferromagnetismo es debido a una interacción intensa entre los electrones de una banda parcialmente llena del metal o entre los electrones localizados que forman momentos magnéticos en moléculas o átomos vecinos. Esta interacción, llamada **interacción de intercambio** (o canje), disminuye la energía de un par de electrones con espines paralelos.


(a)


(b)

FIGURA 27.43 (*a*) Ilustración esquemática de los dominios ferromagnéticos. Dentro de un dominio, los dipolos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineamiento varía de un dominio a otro, de modo que el momento magnético neto es nulo. Un pequeño campo magnético externo puede causar el ensanchamiento de aquellos dominios que se alinean paralelamente al campo, o producir la rotación de la dirección de alineamiento dentro de un dominio. En cualquier caso, el resultado es un momento magnético neto paralelo al campo. (*b*) Dominios magnéticos sobre la superficie de un cristal de 97% Fe - 3% Si, observado mediante un microscopio electrónico de barrido con análisis de polarización. Los cuatro colores indican cuatro posibles orientaciones de los dominios. *(Robert J. Celotta, National Institute of Standards and Technology.)*



Una moneda canadiense es atraída por un imán. Las monedas canadienses contienen cantidades significativas de níquel, metal ferromagnético. *(Fotografía de Gene Mosca.)*

Los materiales ferromagnéticos tienen valores positivos muy grandes de susceptibilidad magnética χ_m (medidos en las condiciones descritas posteriormente). En estas sustancias un campo magnético externo pequeño puede producir un grado muy alto de alineación de los momentos dipolares magnéticos atómicos que, en algunos casos, puede persistir incluso aunque no exista campo imanante externo. Esto es así debido a que los momentos dipolares magnéticos de los átomos de estas sustancias ejercen fuerzas intensas sobre sus vecinos, de modo que en una pequeña región del espacio los momentos están alineados unos con otros aun cuando no existe un campo externo. Esta pequeña región se llama **dominio magnético**. El tamaño de un dominio es normalmente microscópico. Dentro del dominio, todos los momentos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineación varía de un dominio a otro de modo que el momento magnético neto de un trozo macroscópico de material es cero en su estado normal. La figura 27.43 ilustra esta situación. La mecánica cuántica predice la existencia de fuerzas dipolares en estas sustancias que no pueden ser explicadas mediante la física clásica. A temperaturas por encima de una temperatura crítica, denominada **temperatura de Curie**, la agitación térmica es suficiente para destruir esta alineación y los materiales ferromagnéticos se transforman en paramagnéticos.

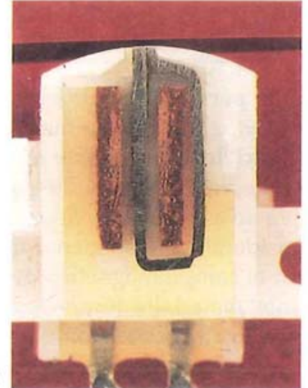


Un fragmento de magnetita (piedra imán) atrae la aguja de una brújula. *(© Paul Silverman/Fundamental Photographs.)*

Cuando se aplica un campo magnético externo, los límites de los dominios se desplazan y, al mismo tiempo, la dirección de alineación dentro de un dominio puede variar de modo que exista un momento magnético neto en dirección del campo aplicado. Puesto que el grado de alineación es grande incluso en el caso de un campo externo pequeño, el campo magnético producido en el material por los dipolos suele ser mucho mayor que el campo externo.



(a)


(b)

(*a*) Líneas de campo magnético sobre una cinta magnetofónica de cobalto. Las flechas indican los bits magnéticos codificados. (*b*) Sección transversal de un cabezal grabador de cintas magnéticas. La corriente procedente de un amplificador de audio se envía a los alambres conductores que rodean un núcleo magnético situado en el cabezal grabador produciendo un campo magnético. Cuando la cinta pasa por una abertura situada sobre el núcleo del cabezal, el campo magnético que lo bordea codifica la información en la cinta. *((a) Akira Tonomura, Hitachi Advanced Research Library, Hatomaya, Japan; (b) © Bruce Iverson.)*

Consideremos la imanación de una barra larga de hierro en el interior de un solenoide en el que se aumenta gradualmente la corriente que circula por los arrollamientos del solenoide. Asumimos que la barra y el solenoide son lo suficientemente grandes como para poder despreciar los efectos de los extremos. Como los momentos magnéticos inducidos están en el mismo sentido que el campo aplicado, $\vec{B}_{app}$ y $\vec{M}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido. Por lo tanto, el campo magnético en el centro de la barra es

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = \mu_0 nI + \mu_0 M \qquad 27.35$$

En los materiales ferromagnéticos, el campo magnético $\mu_0 M$ debido a los momentos magnéticos es con frecuencia superior al campo aplicado B_{ap} en un factor de varios miles.

La figura 27.44 muestra una representación de B en función del campo aplicado B_{ap}. Cuando la corriente se hace crecer gradualmente desde cero, B aumenta desde cero a lo largo de la parte de la curva que empieza en el origen O y llega al punto P_1. La tendencia hacia la horizontal de esta curva cerca del punto P_1 indica que la imanación M se está aproximando a su valor de saturación M_s, que se presenta cuando todos los dipolos atómicos están alineados. Por encima de la saturación, B crece sólo porque el campo imanante $B_{ap} = \mu_0 nI$ crece también. Cuando B_{ap} se hace disminuir gradualmente desde el punto P_1, no existe una disminución correspondiente de la imanación. El desplazamiento de los dominios en un material ferromagnético no es completamente reversible, y parte de la imanación permanece, aun cuando B_{ap} se reduzca a cero, según se indica en la figura. Este efecto se denomina **histéresis**, del griego *hysteros*, que significa posterior, retraso, y la curva en la figura 27.44 se llama **curva de histéresis**. El valor del campo magnético en el punto P_4 cuando B_{ap} es cero se denomina **campo remanente** B_{rem}. En este punto la barra de hierro es un imán permanente. Si la corriente del solenoide se invierte ahora de modo que B_{ap} tiene sentido opuesto, el campo magnético B es gradualmente llevado a cero en el punto c. La parte restante de la curva de histéresis se obtiene mediante un aumento adicional de la corriente en sentido opuesto hasta que se alcanza el punto P_2, que corresponde a la saturación en sentido opuesto, y luego haciendo disminuir la corriente hasta cero en el punto P_3 y aumentando la corriente de nuevo en el sentido inicial.

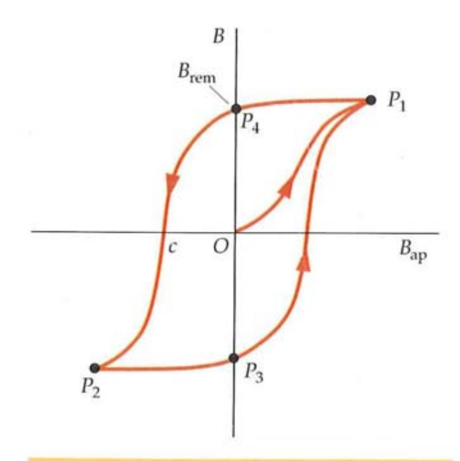


FIGURA 27.44 Representación gráfica de B en función del campo aplicado B_{ap}. La curva exterior se denomina curva de histéresis. El campo B_{rem} es el campo remanente, el cual permanece cuando el campo aplicado retorna a cero.

Como la imanación M depende de la historia previa del material y puede tener un valor grande, incluso cuando el campo aplicado es nulo, no está relacionada sólo con B_{ap}. Sin embargo, si nos limitamos a aquella parte de la curva de imanación desde el origen al punto P_1 de la figura 27.44, $\vec{M}$ y $\vec{B}_{ap}$ son paralelos y M es cero cuando B_{ap} es cero. Podemos, por lo tanto, definir la susceptibilidad magnética como en la ecuación 27.23:

$$M = \chi_m \frac{B_{ap}}{\mu_0}$$

y

$$B = B_{ap} + \mu_0 M = B_{ap}(1 + \chi_m) = K_m \mu_0 nI = \mu nI \qquad 27.36$$

donde,

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 = K_m \mu_0 \qquad 27.37$$

se denomina **permeabilidad** del material. (Para los materiales paramagnéticos y diamagnéticos, χ_m es mucho menor que 1, de modo que la permeabilidad μ y la permeabilidad del espacio libre μ_0 son prácticamente iguales.)

Como B no varía linealmente con B_{ap} (basta ver la figura 27.44), la permeabilidad relativa no es constante. El valor máximo de K_m se da para un valor de la imanación considerablemente menor que la imanación de saturación. En la tabla 27.2 se exponen el campo magnético de saturación $\mu_0 M_s$ y los valores máximos de K_m para algunos materiales ferromagnéticos. Obsérvese que los valores máximos de K_m son muy superiores a la unidad.

El área incluida en la curva de histéresis es proporcional a la energía disipada en forma de calor en el proceso irreversible de imanación y desimanación. Si el efecto de histéresis es pequeño, el área encerrada por el ciclo es pequeña, lo que indica que las pérdidas de energía son pequeñas y el material se denomina **magnéticamente blando**. El hierro dulce o blando es un ejemplo. La curva de histéresis en el caso de un material magnéticamente blando se muestra en la figura 27.45. En este caso el campo remanente B_{rem} es casi cero, siendo la pérdida de energía por ciclo muy

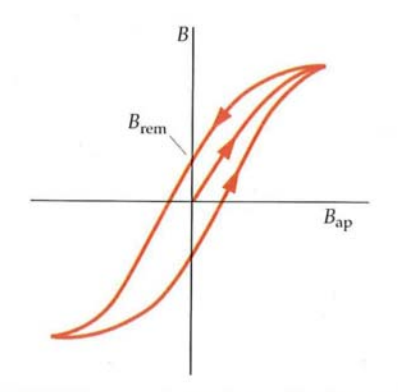
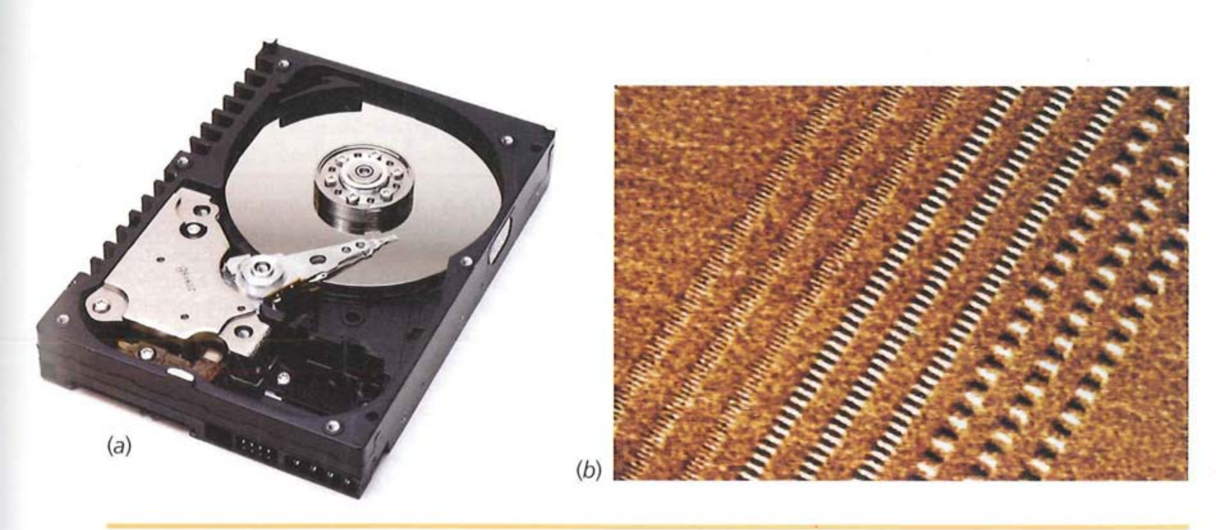


FIGURA 27.45 Curva de histéresis de un material magnéticamente blando. El campo remanente es muy pequeño comparado con el de un material magnéticamente duro, tal como el de la figura 27.44.

Tabla 27.2 Valores máximos de $\mu_0 M$ y K_m para algunos materiales ferromagnéticos

Material	$\mu_0 M_s$, T	K_m
Hierro (recocido)	2,16	5500
Hierro-silicio (96% Fe, 4% Si)	1,95	7000
Permalloy (55% Fe, 45% Ni)	1,60	25 000
Metal-mu (77% Ni, 16% Fe, 5% Cu, 2% Cr)	0,65	100 000

pequeña. Los materiales magnéticamente blandos se utilizan como núcleos de transformador para permitir que el campo magnético B pueda variar sin incurrir en una gran pérdida de energía cuando el campo varía muchas veces por segundo. Por otra parte, en un imán permanente es deseable un campo remanente grande. Los materiales **magnéticamente duros**, como el acero al carbono y la aleación Alnico 5, se utilizan en los imanes permanentes.



(*a*) Mecanismo impulsor del disco duro de un ordenador para el almacenamiento magnético de información capaz de almacenar hasta 250 gigabytes de información. (*b*) Un diagrama de ensayo magnético de un disco duro, aumentado 2400 veces. Las regiones claras y oscuras corresponden a campos magnéticos de sentidos opuestos. La región uniforme fuera del diagrama es una región del disco que ha sido borrado justo antes de la impresión. *((a) © 2003 Western Digital Corporation. All rights reserved. (b) Tom Chang/IBM Storage Systems Division, San Jose, CA.)*

Ejemplo 27.14 Solenoide con núcleo de hierro

Un solenoide largo con 12 vueltas por centímetro posee un núcleo de hierro recocido. Cuando la intensidad de corriente es de 0,50 A, el campo magnético dentro del núcleo de hierro es 1,36 T. Determinar (*a*) el campo aplicado B_{ap}, (*b*) la permeabilidad relativa K_m y (*c*) la imanación M.

PLANTEAMIENTO El campo aplicado es justamente el de un gran solenoide, que viene dado por $B_{ap} = \mu_0 nI$. Como el campo magnético total es conocido, podemos determinar la permeabilidad relativa a través de su definición ($K_m = B/B_{ap}$) y determinar M a partir de la expresión $B = B_{ap} + \mu_0 M$.

SOLUCIÓN

(*a*) El campo aplicado viene dado por la ecuación 27.10:

$$B_{ap} = \mu_0 nI = (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(1200\ \mathrm{m^{-1}})(0{,}500\ \mathrm{A}) = \boxed{7{,}54 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}}$$

(*b*) La permeabilidad relativa es el cociente de B por B_{ap}:

$$K_m = \frac{B}{B_{ap}} = \frac{1{,}36\ \mathrm{T}}{7{,}54 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}} = \boxed{1{,}80 \times 10^3}$$

(*c*) La imanación M se determina a partir de la ecuación 27.35:

$$\mu_0 M = B - B_{ap}$$
$$= 1{,}36\ \mathrm{T} - 7{,}54 \times 10^{-4}\ \mathrm{T} \approx B = 1{,}36\ \mathrm{T}$$
$$M = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1{,}36\ \mathrm{T}}{4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}} = \boxed{1{,}08 \times 10^6\ \mathrm{A/m}}$$

COMPROBACIÓN La tabla 27.2 da 5500 para el máximo valor de K_m. El resultado de la parte (*b*) del problema, tal como era de esperar, es menor que este máximo.

OBSERVACIÓN El campo magnético aplicado de $7{,}54 \times 10^{-4}$ T es una fracción despreciable del campo total de 1,36 T.

*DIAMAGNETISMO

Los materiales diamagnéticos son aquellos que tienen valores negativos muy pequeños de susceptibilidad magnética χ_m. El diamagnetismo fue descubierto por Michael Faraday en 1845 cuando descubrió que un trozo de bismuto era repelido por un polo cualquiera de un imán; lo que indica que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto de sentido opuesto al campo.

Podemos comprender cualitativamente este efecto mediante la figura 27.46, que muestra dos cargas positivas que se mueven en órbitas circulares con la misma velocidad, pero en sentidos opuestos. Sus momentos magnéticos tienen sentidos opuestos y se contrarrestan entre sí.* En presencia de un campo magnético externo $\vec{B}$ dirigido hacia el papel, las cargas experimentan una fuerza extra $q\vec{v} \times \vec{B}$, de dirección radial. Para la carga de la izquierda, esta fuerza extra está dirigida hacia el centro, incrementando la fuerza centrípeta. Si la carga ha de permanecer en la misma órbita circular, debe acelerar de modo que mv^2/r iguale a la fuerza centrípeta total.† Su momento magnético, dirigido hacia fuera, se incrementa. Para la carga de la derecha, la fuerza extra es radial pero alejándose del centro, de modo que la partícula debe disminuir la velocidad para mantener su órbita circular. Su momento magnético, dirigido hacia dentro, disminuye. En ambos casos, la variación del momento magnético de las cargas, en dirección hacia fuera de la página, es opuesta al campo magnético externo. Como los momentos magnéticos permanentes de las dos cargas son iguales y de sentidos opuestos, su suma es nula, quedando sólo los momentos magnéticos inducidos, que son ambos opuestos a la dirección del campo magnético aplicado.

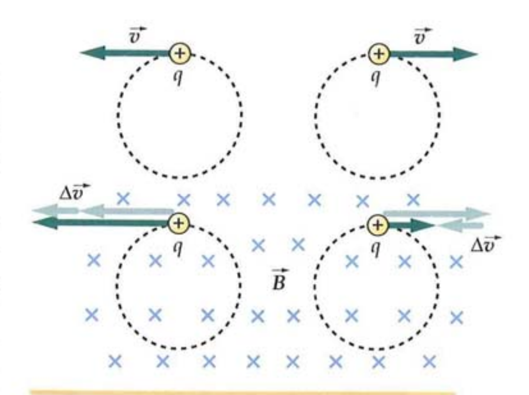


FIGURA 27.46 (*a*) Carga positiva que se mueve circularmente en sentido contrario al de las agujas del reloj con un momento magnético dirigido hacia el lector. Al aplicar un campo magnético externo, dirigido hacia el papel, la fuerza magnética incrementa la fuerza centrípeta y, por lo tanto, la velocidad de la partícula debe aumentar. La variación positiva del momento magnético es hacia fuera. (*b*) Carga positiva moviéndose en sentido horario en un círculo con su momento magnético hacia el papel. Al aplicar un campo magnético externo hacia el papel la fuerza magnética disminuye la fuerza centrípeta y la velocidad de la partícula disminuye. Como en el caso (*a*), el cambio en el momento magnético es hacia fuera.

Un material será diamagnético si sus átomos tienen momento angular neto cero y, por lo tanto, no poseen momento magnético permanente. (El momento angular neto de un átomo depende de su estructura electrónica, tema que estudiaremos en el capítulo 36.) Los momentos magnéticos inducidos que causan el diamagnetismo poseen magnitudes del orden de 10^{-5} magnetones de Bohr. Como este valor es mucho menor que el de los momentos magnéticos permanentes de los átomos de los materiales paramagnéticos o ferromagnéticos, el efecto diamagnético en estos átomos viene enmascarado por el alineamiento de sus momentos magnéticos permanentes. Sin embargo, como este alineamiento decrece con la temperatura, todos los materiales son teóricamente diamagnéticos a temperaturas suficientemente altas.

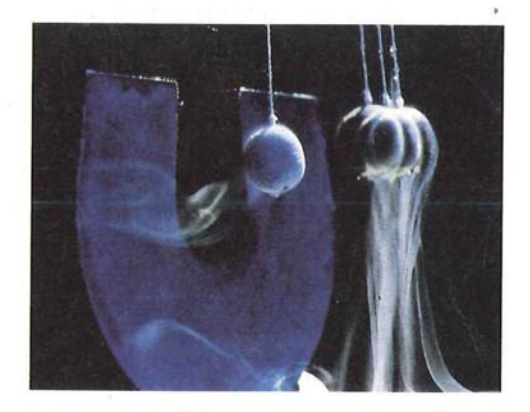
Cuando un superconductor se sitúa en un campo magnético externo, se inducen en su superficie corrientes eléctricas, de tal modo que el campo magnético neto en el superconductor es cero. Consideremos una barra superconductora dentro de un solenoide de n vueltas por unidad de longitud. Cuando el solenoide se conecta a una fuente de fem de modo que transporta una corriente I, el campo magnético debido al solenoide es $\mu_0 nI$. Se induce sobre la barra superconductora una corriente superficial de $-nI$ por unidad de longitud que compensa el campo debido al solenoide, de modo que el campo neto dentro del superconductor es nulo. Según la ecuación 27.24

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap}(1 + \chi_m) = 0$$

de modo que

$$\chi_m = -1$$

Por lo tanto, un superconductor es un material diamagnético perfecto, es decir, posee una susceptibilidad magnética igual a -1.



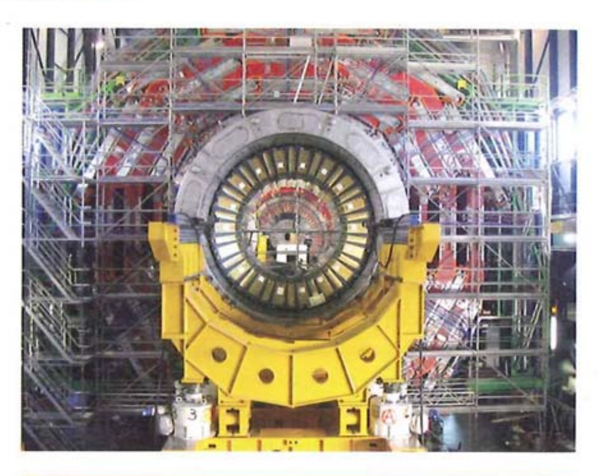
Un superconductor es un material diamagnético perfecto. Aquí, la masa oscilante superconductora del péndulo es repelida por el imán permanente. (*© Bill Pierce/Time Magazine, Inc.*)

* Es más sencillo considerar cargas positivas, aunque son los electrones con carga negativa los que proporcionan los momentos magnéticos de la materia.

† El electrón acelera debido al campo eléctrico inducido por el campo magnético variable; un efecto llamado inducción que veremos en el capítulo 28.

Aplicaciones del solenoide

¿Por qué utilizar solenoides? Algunas herramientas, entre ellas los solenoides, no producen fricción en el movimiento, lo cual implica un desgaste mucho menor de las máquinas por el uso. Válvulas, interruptores y otros mecanismos construidos con solenoides se basan en el mismo principio: un núcleo central en el interior del solenoide se mueve cuando circula una corriente por la bobina que lo forma. Las válvulas construidas con solenoides para controlar el flujo de líquidos y gases son los dispositivos mecánicos más utilizados Algunas válvulas se abren directamente por el movimiento de los núcleos en el interior del solenoide. Cuando se corta la corriente del solenoide los muelles recuperan la posición de apagado de la válvula.[1] Otras válvulas solenoidales, que operan como pilotos de advertencia, utilizan núcleos como interruptores para pistones que tienen grandes puertas o incluso usan el movimiento del núcleo del solenoide para abrir pequeñas puertas piloto que producen una diferencia de presión en la principal línea de corriente de fluido con la que se logra abrir la puerta principal.[2]



El imán constituido por el solenoide superconductor más grande del mundo alcanzó por primera vez su cota máxima de campo magnético (4 teslas) en diciembre de 2006. Este imán cuyo peso es de alrededor de 10 000 toneladas fue construido con un solenoide superconductor de 6 m de diámetro y 13 m de longitud. Este solenoide que está en el CERN se usará como parte de un detector de muones (*CERN*).

Dada la pérdida de tiempo que supone la sustitución de una pequeña válvula en los procesos de montaje, con frecuencia, se utilizan válvulas solenoidales en muchos procesos.[3] Alguna válvula solenoidal se usa para operar a velocidades de millones de ciclos,[4] y también se diseñan este tipo de válvulas para muy diferentes y atrevidos usos; pueden usarse en áreas con corrosión[5,6] o en atmósferas explosivas.[7] Otras aplicaciones[8] en actividades paisajísticas y de irrigación requieren solenoides que operen al aire libre. El uso de solenoides en procesos de manufacturación es creciente.[9]

Por su fiabilidad, larga duración y bajo consumo comparado con los sistemas estrictamente mecánicos, los solenoides se usan en robótica, aplicaciones en la automoción y, con frecuencia, para el control del aire. En aplicaciones en la automoción, algunos solenoides controlan la presión del fluido en la transmisión, mientras que otros controles automáticos cierran las compuertas.

Un defecto de los solenoides es su incidencia en el calentamiento excesivo si son sobrealimentados de corriente[10] o si se les suministra de forma continua la potencia que requieren para ponerlos en funcionamiento.[11] Este sobrecalentamiento puede fundir las bobinas que mantienenen en funcionamiento las máquinas, hacer caer el sistema de manufacturación e incluso producir incendios. Por todo ello, los diseñadores tiene mucho cuidado en probar el solenoide para el uso que está destinado.

No todos los solenoides se usan para aplicaciones mecánicas. Algunos de los más potentes solenoides se usan para proveer de intensos campos magnéticos en experimentos de Física de Partículas. Muchos de estos solenoides utilizan bobinas (criogenizadas) superconductoras para obtener eficiencia sin calentamiento. El Deusches Elektronen-Synchrotron (DESY) utiliza solenoides superconductores que consiguen 5 T, concretamente, 5,25 T con corrientes de hasta 1000 A. Para ello, estas bobinas tienen que ser enfriadas hasta 4,4 K.[12] En Cessy, Francia, se ubica el mayor solenoide superconductor del mundo, el denominado *Compact Muon Solenoid* que se previó que comenzara a funcionar en noviembre de 2007.[13] Las bobinas del solenoide, cuyo diámetro interno es de unos 6,0 m, contienen 1947 km de hilo superconductor de Niobio/Titanio. Cuando se enfría a 4,5 K, circula una corriente superior a 56 kA y produce un campo magnético de 4 T.[14] Tanto los grandes solenoides para experimentos de Física de Partículas como los miniaturizados para plantas de industrias químicas, tienen una fiabilidad y eficacia que los hacen ventajosos en cuanto a calidad-precio.

1 Hargraves, D., "Solenoid Valves: Operation, Selection, and Application." *Air Conditioning, Heating, & Refrigeration News*, Apr. 5, 1999, pp. 26–28.
2 Zdobinski, D., Mudd, W., and Byrne, G., "Understanding Applications, Uses, Key to Solenoid Valve Selection." *Plant Engineering*, Jun. 2006, pp. 65–68.
3 Heney, P. J., "Wide Variety of Solenoid Valves Available to Designers." *Hydraulics and Pneumatics*, Sept. 1998, Vol. 51, No. 9, pp. 51–56.
4 "Updated Solenoid Survives 20 Million Cycles." *Machine Design*, Aug. 23, 2001, p. 54.
5 "Direct-Acting Solenoid Valves." *Design News*, Jun. 5, 2006, pp. 83–84.
6 "Solenoid Valve Handles Acids." *Manufacturing Chemist*, Jul. 1996, Vol. 67, No. 7, p. 51.
7 "Solenoid Valve for Hazardous Areas." *Offshore*, Nov. 1998, Vol. 58, No. 11, p. 216.
8 Mentzer, T., "Control Gets 'Smart'." *Landscape Management*, Jan. 2000, Vol. 39, No. 1, pp. 38+.
9 Mervartova, K., Martinez Calatayud, J., and Catala Icardo, M., "A Fully Automated Assembly Using Solenoid Valves for the Photodegradation and Chemiluminometric Determination of the Herbicide Chlorsulfuron." *Analytical Letters*, Jan. 2005, Vol. 38, No. 1, pp. 179–194.
10 Zdobinski, D., Mudd, W., and Byrne, G., op. cit.
11 Nakhe, S. V., "Smart Solenoid Driver Reduces Power Loss." *Electronic Design*, Oct. 13, 2005, Vol. 53, No. 22, pp. 62–64.
12 Gadwinkel, E., et al., "Cryogenics for a 5 Tesla Superconducting Solenoid with Large Aperture at DESY." *CP170, Advances in Cryogenic Engineering: Transactions of the Cryogenic Engineering Conference—CEC, Vol. 49, AIP Conference Proceedings*, 2004, Vol. 710, Issue 1, pp. 719–725.
13 Science Daily, "World's Largest Superconducting Solenoid Magnet Reaches Full Field." *Science Daily*, Sept. 26, 2006. http://www.sciencedaily.com/releases/2006/09/060925075001.htm As of Oct. 2006.
14 Blau, B., and Pauss, F., "Superconducting Magnet: ETH Zürich and Superconductor Manufacture for CMS." *CMS Info, CERN*, Apr. 2003, http://cmsinfo.cern.ch/outreach/CMSdocuments/MagnetBrochure/MagnetBrochure.pdf As of Oct. 2006.

Resumen

1. Los campos magnéticos surgen de las cargas móviles y, por lo tanto, de las corrientes.
2. La ley de Biot y Savart describe el campo magnético producido por un elemento de corriente.
3. La ley de Ampère relaciona la integral de línea del campo magnético alrededor de una curva cerrada con la corriente total que pasa a través del área limitada por la curva.
4. El vector de imanación $\vec{M}$ describe el momento magnético por unidad de volumen de la materia.
5. La relación clásica $\vec{\mu} = [q/(2m)]\vec{L}$ se deduce de las definiciones del momento angular y del momento magnético.
6. El magnetón de Bohr es la unidad de los momentos atómicos y nucleares magnéticos.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Campo magnético, $\vec{B}$		
Debido a una carga puntual móvil	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$	27.1
	donde $\hat{r}$ es un vector unitario dirigido desde la carga al punto del campo P, $\vec{v}$ es la velocidad con la que se mueve la carga y μ_0 es una constante llamada permeabilidad del vacío, de valor	
	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A} = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$	27.2
Debido a un elemento de corriente (ley de Biot y Savart)	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$	27.3
Sobre el eje de una espira de corriente	$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$	27.6
Dentro de un solenoide y lejos de los extremos	$B_z = \mu_0 n I$	27.10
	donde n es el número de vueltas por unidad de longitud.	
Debido a un hilo rectilíneo portador de corriente	$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)$	27.12
	donde R es la distancia perpendicular al conductor, y θ_1 y θ_2 son los ángulos subtendidos en el punto del campo por los extremos del conductor	
Debido a un hilo rectilíneo, infinitamente largo	Usar la ecuación 27.12 con $\theta_2 = 90°$ y $\theta_2 = -90°$, o deducirla mediante la ley de Ampère.	
	La dirección de $\vec{B}$ es tal que las líneas de campo magnético rodean el conductor en el sentido indicado por los dedos de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.	
Dentro de un toroide estrechamente enrollado	$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}$	27.18
2. Líneas del campo magnético	Las líneas magnéticas no empiezan ni terminan en ningún punto del espacio, sino que forman curvas continuas y cerradas.	
3. Ley de Gauss para el magnetismo	$\phi_{\mathrm{m\,neto}} = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\,dA = \oint_S B_n\,dA = 0$	27.15
4. Polos magnéticos	Los polos magnéticos se generan siempre a pares, polo norte y polo sur. No existen evidencias empíricas de la existencia de polos magneticos aislados (monopolos).	
5. Ley de Ampère	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B_t\,d\ell = \mu_0 I_C$	27.16
	donde C es cualquier curva cerrada.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Validez de la ley de Ampère	La ley de Ampère sólo es válida si las corrientes son estacionarias continuas. Puede utilizarse para deducir expresiones del campo magnético en situaciones de alto grado de simetría, tales como un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente o un solenoide largo estrechamente arrollado.	
6. Magnetismo en la materia	Todos los materiales pueden clasificarse en paramagnéticos, ferromagnéticos o diamagnéticos.	
Imanación	Un material imanado se describe por su vector imanación $\vec{M}$, que se define como el momento del dipolo magnético neto por unidad de volumen del material: $$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV}$$	27.19
	El campo magnético debido a un cilindro imanado uniformemente es el mismo que produciría el cilindro si transportara una corriente por unidad de longitud de módulo M sobre su superficie. Esta corriente, debida al movimiento intrínseco de las cargas atómicas en el cilindro se denomina corriente amperiana o de imanación.	
7. $\vec{B}$ en materiales magnéticos	$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \mu_0 \vec{M}$$	27.22
Susceptibilidad magnética, χ_m	$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_{ap}}{\mu_0}$$	27.23
	En los materiales paramagnéticos, χ_m es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. En los materiales diamagnéticos (no superconductores), χ_m es una constante pequeña negativa independiente de la temperatura. Para los superconductores, $\chi_m = -1$. En los materiales ferromagnéticos, la imanación depende no sólo de la corriente que imana, sino también de la historia pasada del material.	
Permeabilidad relativa	$$\vec{B} = K_m \vec{B}_{ap}$$	27.24
	donde $$K_m = 1 + \chi_m$$	27.25
8. Momentos magnéticos atómicos	$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$ donde $\vec{L}$ es el momento angular de la partícula.	27.28
Magnetón de Bohr	$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2}$$ $$= 9{,}27 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T} = 5{,}79 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/T}$$	27.30
Debido al momento orbital de un electrón	$$\vec{\mu}_\ell = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}$$	27.29
Debido al espín electrónico	$$\vec{\mu}_s = -2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$	27.31
***9. Paramagnetismo**	Los materiales paramagnéticos poseen momentos magnéticos atómicos permanentes con direcciones aleatorias en ausencia de un campo magnético externo. En un campo externo, algunos de estos dipolos se alinean produciendo una pequeña contribución al campo total que se suma al campo externo. El grado de alineamiento es pequeño excepto en campos muy intensos y a muy bajas temperaturas. A temperaturas ordinarias, el movimiento térmico tiende a mantener las direcciones aleatorias de los momentos magnéticos.	
Ley de Curie	En campos débiles, la imanación es, aproximadamente, proporcional al campo aplicado e inversamente proporcional a la temperatura absoluta. $$M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s$$	27.34

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
*10. Ferromagnetismo	Los materiales ferromagnéticos poseen pequeñas regiones de espacio llamadas dominios magnéticos, dentro de los cuales los momentos magnéticos atómicos permanentes están alineados. En ausencia de un campo magnético, la dirección de alineamiento en un dominio es independiente de la que existe en otros, de modo que no se produce un campo magnético neto. Al imanarse, los dominios de un material ferromagnético se alinean produciendo una contribución muy intensa al campo magnético. Esta alineación puede persistir incluso cuando se retira el campo externo, dando lugar a un magnetismo permanente.
*11. Diamagnetismo	Materiales diamagnéticos son aquellos en los cuales los momentos magnéticos de todos los electrones de cada átomo se compensan, de modo que cada átomo posee un momento magnético cero en ausencia de un campo externo. Al aplicar un campo externo, se induce un pequeño momento magnético que tiende a debilitar el campo. Este efecto es independiente de la temperatura. Los superconductores son materiales diamagnéticos con susceptibilidad igual a -1.

Respuestas a los problemas prácticos

27.1 $\vec{B} = 0, \vec{B} = 3{,}2 \times 10^{-14}\,\mathrm{T}\,\hat{k}$

27.2 25 A

27.4 $1{,}48 \times 10^{-2}$ T. Esto es alrededor del 2% menos que el resultado del paso 3.

27.5 B en el centro es mayor para el círculo.

27.6 $R = 4{,}0$ cm

27.7 0

27.8 $\vec{B} = 2{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}\,\hat{j}$

27.9 $M/M_s = 1{,}12 \times 10^{-3}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Realizar un esquema de las líneas de campo del dipolo eléctrico y del magnético mostrados en la figura 27.47 ¿Cuál es la diferencia entre ambos resultados en puntos próximos al centro de cada dipolo?







Dipolo eléctrico   Dipolo magnético

FIGURA 27.47 Problema 1

2 • Dos cables paralelos situados en el plano del papel transportan corrientes iguales en sentidos opuestos como muestra la figura 27.48. En un punto a mitad de distancia entre los cables, el campo magnético es (*a*) cero, (*b*) hacia dentro de la página, (*c*) hacia fuera de la página, (*d*) hacia la parte alta o hacia la parte baja de la página, (*e*) hacia uno de los dos cables.

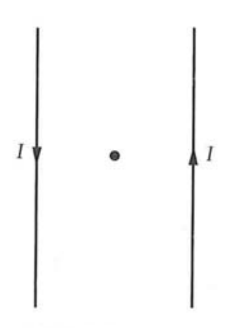


FIGURA 27.48 Problema 2

3 • Dos cables paralelos transportan corrientes I_1 e $I_2 = 2I_1$ en el mismo sentido. Las fuerzas F_1 y F_2 que actúan sobre

los cables están relacionadas por (*a*) $F_1 = F_2$, (*b*) $F_1 = 2F_2$, (*c*) $2F_1 = F_2$, (*d*) $F_1 = 4\,F_2$, (*e*) $4\,F_1 = F_2$.

4 • Hacer un esquema del campo magnético debido a las corrientes del par de espiras coaxiales de la figura 27.49. Considerar dos casos: (*a*) Las corrientes en las espiras tienen idéntico valor y fluyen en sentidos opuestos y (*b*) Las corrientes en las bobinas tienen la misma intensidad y direcciones opuestas.



FIGURA 27.49
Problema 4

5 • Analizar las diferencias y similitudes entre la ley de Gauss para los campos eléctrico y magnético. SSM

6 • Explicar cómo se modificaría la ley de Gauss si se descubriera la existencia de monopolos magnéticos.

7 • Si un observador está enfrente de un extremo de un solenoide y el campo magnético apunta hacia él, ¿la corriente que circula por el solenoide lleva dirección horaria o antihoraria? SSM

8 • Se conectan los extremos opuestos de un muelle metálico en forma de hélice a los terminales de una batería. ¿El espacio entre las vueltas del muelle tiende a crecer, decrecer o permanece igual una vez conectado? Explique su respuesta.

9 • Una densidad de corriente uniforme circula en un conductor recto que tiene una sección transversal circular. Es verdadero a falso que:
(*a*) el mayor valor del módulo del campo magnético producido por el conductor está en su superficie;
(*b*) la intensidad del campo magnético en la región que rodea al conductor es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia medida desde el eje central del conductor y el punto de observación del campo;
(*c*) el campo magnético es cero en todos puntos del eje;
(*d*) el módulo del campo magnético dentro del conductor crece linealmente con la distancia al eje.

10 • Si la susceptibilidad magnética es positiva (*a*) los efectos paramagnéticos o los efectos ferromagnéticos deben ser mayores que los diamagnéticos, (*b*) los efectos diamagnéticos deben ser mayores que los paramagnéticos, (*c*) los efectos diamagnéticos deben ser mayores que los ferromagnéticos, (*d*) los efectos ferromagnéticos deben ser mayores que los paramagnéticos, (*e*) los efectos paramagnéticos deben ser mayores que los ferromagnéticos.

11 • ¿Cuáles de los cuatro gases relacionados en la tabla 27.1 son diamagnéticos y cuáles son paramagnéticos? SSM

12 • Cuando una corriente pasa a través del cable de la figura 27.50, ¿éste tiende a agruparse o a formar un círculo?

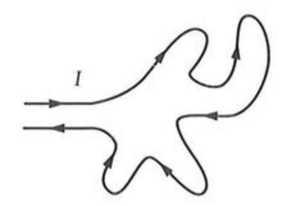


FIGURA 27.50
Problema 12

CAMPO MAGNÉTICO DEBIDO AL MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES

13 • En el tiempo $t = 0$, una partícula de carga $q = 12\ \mu$C está localizada en $x = 0$, $y = 2$ m; su velocidad en ese instante es $v = 30$ m/s $\hat{i}$. Determinar el campo magnético en (*a*) el origen; (*b*) $x = 0$, $y = 1$ m; (*c*) $x = 0$, $y = 3$ m; y (*d*) $x = 0$, $y = 4$ m. SSM

14 • En el tiempo $t = 0$, una partícula de carga $q = 12\ \mu$C está localizada en $x = 0$, $y = 2{,}0$ m; su velocidad en ese instante es $v = 30$ m/s $\hat{i}$. Determinar el campo magnético en (*a*) $x = 1{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m; (*b*) $x = 2{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m; y (*c*) $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m.

15 • Un protón (carga + e), que se mueve con una velocidad de $1{,}0 \times 10^2$ m/s $\hat{i} + 2{,}0 \times 10^2$ m/s $\hat{j}$ está localizado en $x = 3$ m, $y = 4$ m en un cierto instante t. Determinar el campo magnético en las siguientes posiciones: (*a*) $x = 2{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m; (*b*) $x = 6{,}0$ m, $y = 4{,}0$ m; y (*c*) $x = 3{,}0$ m, $y = 6{,}0$ m.

16 •• Un electrón gira alrededor de un protón en una órbita de $5{,}29 \times 10^{-11}$ m. Determinar el campo magnético en el protón producido por el movimiento orbital del electrón.

17 •• Dos cargas iguales q localizadas en (0, 0, 0) y (0, b, 0) en el tiempo cero se mueven con velocidad v en la dirección x positiva ($v << c$). Determinar la relación que existe entre los módulos de las fuerzas magnética y electrostática que se ejercen sobre cada una de ellas.

CAMPO MAGNÉTICO DEBIDO A CORRIENTES: LEY DE BIOT-SAVART

18 • Por un elemento pequeño de corriente $I\,d\ell$, en el que $d\ell = 2{,}0$ mm, circula una corriente $I = 2{,}0$ A. El elemento está centrado en el origen. Hallar el campo magnético dB en los puntos siguientes: (*a*) en el eje x en $x = 3{,}0$ m, (*b*) en el eje x en $x = -6{,}0$ m, (*c*) en el eje z en $z = 3{,}0$ m, (*d*) en el eje y en $y = 3{,}0$ m.

19 • Un pequeño elemento de corriente que está en el origen es de 2,0 mm de longitud y por él circula una corriente de 2,0 A en dirección $+z$. Hallar el vector campo magnético debido a este elemento de corriente en el punto $x = 0$, $y = 3{,}0$ m, $z = 4{,}0$ m. SSM

20 • Un pequeño elemento de corriente que está en el origen es de 2,0 mm de longitud y por él circula una corriente de 2,0 A en dirección $+z$. Determinar el vector campo magnético en los puntos (*a*) $x = 2{,}0$ m, $y = 4{,}0$ m, $z = 0$, y (*b*) $x = 2{,}0$ m, $y = 0$, $z = 4{,}0$ y hacer un diagrama de los resultados.

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR ESPIRAS Y BOBINAS

21 • Una sola espira de alambre de radio 3 cm transporta una corriente de 2,6 A. ¿Cuál es el módulo de B sobre el eje de la espira en (*a*) el centro de la espira, (*b*) a 1 cm del centro, (*c*) a 2 cm del centro y (*d*) a 35 cm del centro?

22 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Un par de bobinas idénticas de radio r y separadas por la misma distancia r constituye un dispositivo clásico, generador de campo magnético, llamado *bobinas de Helmholtz*. Estas bobinas son coaxiales y por ellas circulan corrientes idénticas, de tal forma que sus campos axiales se suman. Una característica de las bobinas de Helmholtz es que el campo resultante en la región entre las bobinas es muy uniforme. Si $r = 30$ cm, $I = 15$ A y el número de vueltas de cada bobina es $N = 250$, utilizando una hoja de cálculo, calcular y representar el campo magnético como función de z, la distancia medida sobre el eje desde el centro de las bobinas ($-r < z < r$). ¿En qué intervalo de valores de z el campo varía menos del 20%?

23 ••• Dos bobinas de Helmholtz de radio R tienen sus ejes a lo largo del eje z como en el problema 22. Una de ellas está en el plano $z = -\frac{1}{2}R$ y la otra en el $z = +\frac{1}{2}R$. Demostrar que en el punto medio de separación entre las bobinas $dB_z/dz = 0$, $d^2B_z/dz^2 = 0$ y $B_z/dz^3 = 0$. (*Nota*: esto demuestra que el campo magnético en puntos cercanos al punto medio de separación entre las bobinas es aproximadamente constante e igual al del punto medio.)

24 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Bobinas *anti-Helmholtz* se usan en muchas aplicaciones de Física como trampas y enfriamiento de átomos con láser, donde se necesita un campo no homogéneo pero con gradiente uniforme. Estas bobinas son como las de Helmholtz, pero en ellas la corriente fluye en sentidos opuestos, de tal forma que los campos axiales se restan, y la separación entre ambas es $\sqrt{3}R$ en vez de R. Dibujar una gráfica del campo magnético en función de z, la distancia sobre el eje desde el centro de las bobinas, para unas bobinas anti-Helmholtz con los mismos parámetros que en el problema 22. ¿Sobre qué intervalo del eje z es dB_z/dz el 1% de su valor en el punto medio entre las dos bobinas?

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR LÍNEAS DE CORRIENTE

Los problemas 25 a 30 se refieren a la figura 27.51, que muestra dos conductores rectilíneos largos, paralelos al eje x que están contenidos en el plano xy. Uno de los conductores está en $y = -6$ cm y el otro en $y = +6$ cm. La corriente que circula por cada conductor es de 20 A.

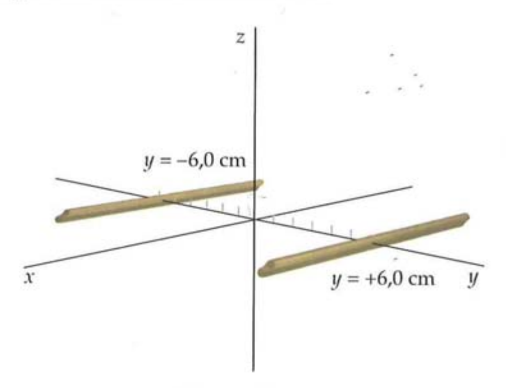


FIGURA 27.51 Problemas 25–30

25 •• Si las corrientes circulan en el sentido negativo del eje de las x, hallar B en los puntos situados en el eje y en (*a*) $y = -3{,}0$ cm, (*b*) $y = 0$, (*c*) $y = +3{,}0$ cm, (*d*) $y = +9{,}0$ cm. SSM

26 •• **HOJA DE CÁLCULO** Utilizando una hoja de cálculo, o una calculadora gráfica, representar B_z en función de y para los puntos situados sobre el eje y cuando ambas corrientes circulan en el sentido negativo de las x.

27 •• La corriente del hilo en $y = -6{,}0$ cm lleva la dirección $-x$ y la del hilo en $y = +6{,}0$ cm la $+x$. Determinar el campo magnético en los siguientes puntos del eje y: (*a*) $y = -3{,}0$ cm, (*b*) $y = 0$, (*c*) $y = +3{,}0$ cm, y (*d*) $y = +9{,}0$ cm.

28 •• **HOJA DE CÁLCULO** La corriente del hilo en $y = -6{,}0$ cm lleva la dirección $+x$ y la del hilo en $y = +6{,}0$ cm la $-x$. Usando una hoja de cálculo o un programa de gráficos, dibujar B_z en función de y.

29 • Determinar el campo magnético sobre el eje z en $z = +8{,}0$ cm cuando (*a*) ambas corrientes llevan la dirección $-x$ y cuando (*b*) la corriente del hilo en $y = -6{,}0$ cm lleva la dirección $-x$ y la que está en $y = +6{,}0$ cm lleva la dirección $+x$.

30 • Hallar el valor de la fuerza por unidad de longitud ejercida por un conductor sobre el otro.

31 • Dos cables paralelos, largos y rectilíneos, separados 8,6 cm, transportan corrientes de igual módulo I. Se repelen entre sí con una fuerza por unidad de longitud de 3,6 nN/m. (*a*) ¿Son las corrientes paralelas o antiparalelas? (*b*) Determinar I.

32 •• La corriente en el conductor de la figura 27.52 es 8,0 A. Hallar B en el punto P debido a cada segmento del conductor

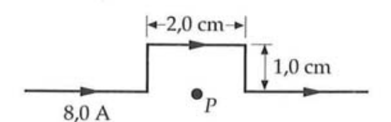


FIGURA 27.52 Problema 32

33 •• Un conductor de 16 cm de longitud está suspendido por cables flexibles encima de un conductor rectilíneo largo. Se establecen en los conductores corrientes iguales y opuestas de modo que el conductor de 16 cm flota a 1,5 mm por encima del conductor largo sin que en los cables de suspensión aparezca ninguna tensión. Si la masa del conductor de 16 cm es 14 g, ¿cuál es la corriente? SSM

34 •• Tres conductores rectilíneos largos y paralelos pasan a través de los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm, según se ve en la figura 27.53, en donde los puntos indican que la corriente está dirigida hacia el lector y la cruz significa que está dirigida hacia el papel. Si cada corriente es de 15 A, hallar (*a*) la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre el conductor superior y (*b*) el campo magnético B en dicho conductor debido a los otros dos conductores inferiores.

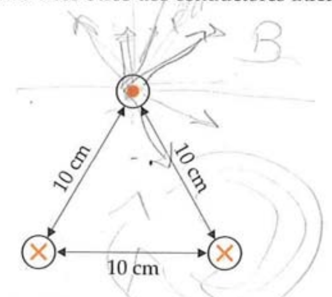


FIGURA 27.53 Problemas 34 y 35

35 •• Resolver el problema 34 con la corriente invertida en el vértice inferior derecho de la figura 27.53.

36 •• Un conductor aislado infinitamente largo está sobre el eje x y transporta una corriente de intensidad I en la dirección x positiva. Un segundo conductor infinitamente largo y aislado está sobre el eje y y transporta la corriente I en la dirección y positiva. ¿En qué punto del plano xy el campo magnético resultante es cero?

37 •• Un cable conductor infinitamente largo, situado a lo largo del eje z, transporta una corriente de 20 A en la dirección z positiva. Un segundo cable, también infinitamente largo, es paralelo al eje z en $x = 10$ cm.

(*a*) Determinar la intensidad de la corriente en el segundo alambre sabiendo que el campo magnético en $x = 2$ cm es cero. (*b*) ¿Cuál es el campo magnético en $x = 5$ cm? SSM

38 •• Tres alambres conductores muy largos y paralelos se hacen pasar por los vértices de un cuadrado, según se muestra en la figura 27.54. Por los tres alambres circula una corriente de módulo *I*. Calcular el campo magnético *B* en el vértice no ocupado cuando (*a*) el sentido de todas las intensidades de corriente es hacia dentro del papel, (*b*) I_1 e I_3 circulan en el sentido hacia dentro e I_2 hacia fuera, y (*c*) I_1 e I_2 circulan hacia dentro e I_3 hacia fuera

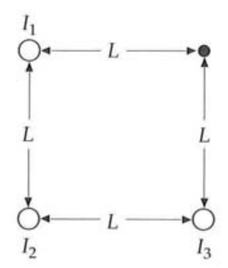


FIGURA 27.54 Problema 38

39 •• Cuatro alambres largos, rectos y paralelos transportan cada uno la corriente *I*. En un plano perpendicular a los alambres, éstos se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado *a*. Determinar la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre uno de los alambres si (*a*) todas las corrientes fluyen en el mismo sentido y (*b*) las corrientes que fluyen por los alambres en vértices adyacentes tienen sentidos opuestos. SSM

40 •• Cinco hilos largos y rectos llevan cada uno una corriente *I* paralela al eje $+z$. Los hilos están a una distancia *R* del eje *z*. Dos de ellos interseccionan con el eje *x*, uno en $x = R$ y otro en $x = -R$; otro intersecciona con el eje *y* en $y = R$; los dos restantes cruzan el plano $z = 0$: uno de ellos en el punto $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ y el otro en $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. Determinar el campo magnético en el eje *z*.

CAMPO CREADO POR UN SOLENOIDE

41 •• Un solenoide de longitud 30 cm, radio 1,2 cm y 300 vueltas transporta una corriente de 2,6 A. Determinar el campo magnético sobre el eje del solenoide (*a*) en el centro, (*b*) dentro del solenoide en un punto situado a 10 cm de un extremo, y (*c*) en un extremo. SSM

42 • Un solenoide de 2,7 m de longitud posee un radio de 0,85 cm y 600 vueltas. Por él circula una corriente *I* de 2,5 A. Determinar, aproximadamente, el campo magnético *B* sobre el eje del solenoide.

43 •• Por un solenoide de radio *R* que tiene *n* vueltas por unidad de longitud circula una corriente *I*. Su eje coincide con el eje *x* y uno de sus extremos se encuentra en $z = -\frac{1}{2}\ell$ y el otro en $z = +\frac{1}{2}\ell$, siendo ℓ la longitud total del solenoide. Demostrar que el campo magnético *B* en cualquier punto del eje *x* viene dado por $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$, en donde y $\cos\theta_2 = (z - \frac{1}{2}\ell)/\sqrt{(z - \frac{1}{2}\ell)^2 + R^2}$.

44 ••• En el problema 43, se da una expresión para el módulo del campo magnético a lo largo del eje de un solenoide. Para $z \gg \ell$ y $z \gg R$, los ángulos θ_1 y θ_2 son muy pequeños, de tal forma que se puede hacer la aproximación de $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ y $\text{sen}\,\theta \approx \text{tg}\,\theta \approx \theta$. (*a*) Hacer un dibujo y usarlo para demostrar que con esas condiciones, se pueden hacer las siguientes aproximaciones: $\theta_1 \approx R/(z + \frac{1}{2}\ell)$ y $\theta_2 \approx R/(z - \frac{1}{2}\ell)$. (*b*) Con las aproximaciones usadas en este problema demostrar que el campo magnético en puntos del eje *z* donde $z \gg \ell$ puede escribirse como $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{q_m}{r_2^2} - \frac{q_m}{r_1^2}\right)$, donde $r_2 = z - \frac{1}{2}\ell$ es la distancia al extremo más cercano del solenoide, $r_1 = z + \frac{1}{2}\ell$ es la distancia al extremo más lejano del solenoide, y $q_m = nI\pi R^2 = \mu/\ell$, donde $\mu = NI\pi R^2$ es el módulo del momento magnético del solenoide.

DETERMINACIÓN DEL CAMPO CON LA LEY DE AMPÈRE

45 • Una corteza cilíndrica de paredes delgadas, rectilínea y larga, de radio *R* transporta una corriente *I*. Determinar *B* dentro y fuera del cilindro. SSM

46 • En la figura 27.55 una corriente de 8 A está dirigida hacia el papel, la otra corriente de 8 A está dirigida hacia el lector y cada una de las curvas es una trayectoria circular. (*a*) Hallar $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ para cada trayectoria indicada, en donde $d\ell$ se toma en sentido antihorario. (*b*) ¿Cuál de las trayectorias, si es que la hay, puede utilizarse para hallar *B* en cualquier punto debido a estas corrientes?

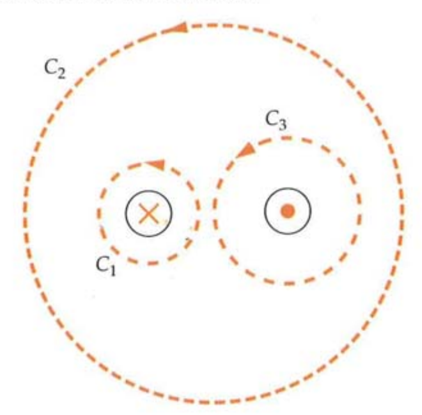


FIGURA 27.55 Problema 46

47 •• Demostrar que no es posible obtener un campo magnético uniforme en el que no exista ningún campo disperso, como se ve en la figura 27.56, debido a que violaría la ley de Ampère. Comprobarlo aplicando la ley de Ampère a la curva rectangular indicada por las líneas a trazos. SSM

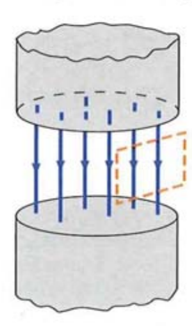


FIGURA 27.56 Problema 47

48 •• **HOJA DE CÁLCULO** Un cable coaxial está formado por un hilo conductor cilíndrico interno de radio 1,00 mm y un conductor externo, en forma de corteza o capa cilíndrica de radios interior y exterior de 2,00 mm y 3,00 mm, respectivamente. Una corriente de 15 A va hacia abajo por el hilo interno y vuelve por el conductor externo. La corriente se distribuye uniformemente por la sección de los conductores. Utilizando una hoja de cálculo, o una calculadora gráfica, dibujar la intensidad del campo magnético B en función de la distancia r desde el eje del cable coaxial para 0 mm < R < 3,00 mm. ¿Cuál es el campo fuera del hilo?

49 •• Una corteza cilíndrica gruesa infinitamente larga de radio interior a y radio exterior b transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda la sección transversal de la corteza. Determinar el campo magnético en (*a*) $R < a$, (*b*) $a < R < b$, y (*c*) $R > b$. SSM

50 •• La figura 27.57 muestra un solenoide que transporta una corriente I con n vueltas por unidad de longitud. Aplicar la ley de Ampère a la línea rectangular indicada para deducir una expresión de B, suponiendo que éste es uniforme dentro del solenoide y nulo en el exterior.

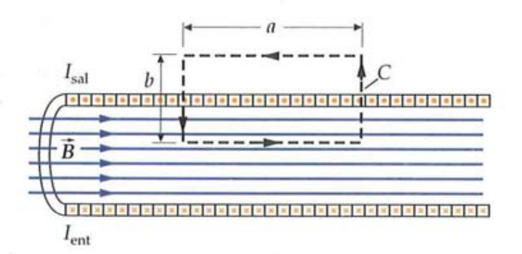


FIGURA 27.57 Problema 50

51 •• Un toroide con un arrollamiento compacto, de radio interior 1 cm y radio exterior 2 cm, tiene 1000 vueltas de alambre y transporta una corriente de 1,5 A. (*a*) ¿Cuánto vale el campo magnético a una distancia de 1,1 cm del centro? (*b*) ¿Cuánto vale a 1,5 cm del centro? SSM

52 ••• Una lámina conductora infinita en el plano $z = 0$ transporta una corriente en la dirección $-x$ (figura 27.58*a*). La lámina se extiende indefinidamente en todas direcciones dentro de su mismo plano y la corriente está distribuida uniformemente en toda la lámina. Para determinar la dirección del campo magnético en un punto P, considerar el campo debido a dos corrientes idénticas, I_1 y I_2, correspondientes a las dos tiras estrechas mostradas en la figura. (*a*) ¿Cuál es la dirección del campo magnético en el punto P debido a I_1 e I_2? (*b*) ¿Cuál es la dirección del campo magnético debido a la lámina entera? (*c*) ¿Cuál es la dirección del campo magnético del punto P cuando $y = 0$? (*d*) ¿Cuál es la dirección del campo magnético en un punto por debajo de la lámina (cuando $z < 0$)? (*e*) Aplicar la ley de Ampère al rectángulo de línea discontinua de la figura 28.57*b* para demostrar que el módulo del campo magnético viene dado por $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$, donde $\lambda = dI/dy$ es la corriente por unidad de longitud a lo largo del eje y.

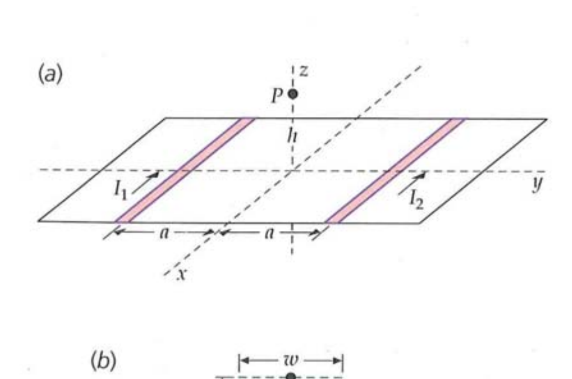


FIGURA 27.58 Problema 52

IMANACIÓN Y SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA

53 • Un solenoide con arrollamiento compacto de 20 cm de largo tiene 400 vueltas por las que circula una corriente de 4 A, de modo que su campo axial tiene la dirección z. Despreciando los extremos, hallar B y B_{ap} en el centro cuando (*a*) no existe ningún núcleo en el solenoide y (*b*) existe un núcleo de hierro en el solenoide con una imanación $M = 1{,}2 \times 10^6$ A/m. SSM

54 • Un solenoide largo está enrollado alrededor de un núcleo de tungsteno y transporta una corriente. (*a*) Si se extrae el núcleo mientras la corriente se mantiene constante, ¿el campo magnético dentro del solenoide crece o decrece? (*b*) ¿En qué porcentaje?

55 • Cuando una muestra de líquido se inserta en un solenoide que transporta una corriente de intensidad constante, el campo magnético dentro del solenoide disminuye en un 0,004%. ¿Cuál es la susceptibilidad magnética del líquido?

56 • Un solenoide largo que transporta una corriente de 10 A tiene 50 vueltas/cm. ¿Cuál es el campo magnético en el interior del solenoide si (*a*) está vacío, (*b*) está lleno de aluminio, y (*c*) está lleno de plata?

57 •• Un cilindro de hierro, inicialmente desimanado, se enfría a 4,00 K. ¿Cuál es la imanación del cilindro a esa temperatura debida a la influencia del campo magnético terrestre en un lugar donde su valor es de 0,300 G? Considerar un momento magnético de 2,00 magnetones de Bohr por átomo. SSM

58 •• Un cilindro de plata a 77 K tiene una imanación del 0,075% de la correspondiente a su saturación. Si consideramos que cada átomo de plata tiene un magnetón de Bohr de momento magnético y que la plata tiene una densidad de $1{,}05 \times 10^4$ kg/m³. (*a*) ¿Cuál es el campo magnético paralelo al eje necesario para conseguir esa imanación? (*b*) ¿Cuánto vale el campo en el centro del cilindro?

59 •• Un cilindro de material magnético se sitúa en el interior de un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud por el que circula una corriente de intensidad I. La tabla nos ofrece el campo magnético B en función de nI. Utilizar estos valores para representar B en función de B_{ap} y K_m en función de nI. Usar estos valores para dibujar B

en función de B_{ap}, y K_m en función de NI, siendo B_{ap} el campo debido a la corriente I y K_m es la permeabilidad relativa de la muestra.

nI, A/m	0	50	100	150	200	500	1000	10 000
B, T	0	0,04	0,67	1,00	1,2	1,4	1,6	1,7

MOMENTOS MAGNÉTICOS ATÓMICOS

60 •• El níquel tiene una densidad de 8,7 g/cm³ y una masa molar de 58,7 g/mol. Su imanación de saturación es $\mu_0 M_s = 0{,}61$ T. Calcular el momento magnético en magnetones de Bohr de un átomo de níquel.

61 •• Repetir el problema 60 para el cobalto, que tiene una densidad de 8,9 g/cm³, una masa molar de 58,9 g/mol y una imanación de saturación de $\mu_0 M_s = 1{,}79$ T.

*PARAMAGNETISMO

62 • Demostrar que la ley de Curie predice que la susceptibilidad magnética de un material paramagnético viene dada por $\chi_m = \mu_0 M_s/(3kT)$.

63 •• En un modelo sencillo del paramagnetismo podemos considerar que cierta fracción f de las moléculas tienen sus momentos magnéticos alineados con el campo magnético externo y el resto de ellas están orientadas al azar, de modo que no contribuyen al campo magnético. (*a*) Utilizar este modelo de la ley de Curie para demostrar que a una temperatura T y con un campo externo B esta fracción de moléculas alineadas es $f = \mu B/3kT$. (*b*) Calcular esta fracción para $T = 300$ K y un campo $B = 1{,}0$ T, asumiendo que μ es un magnetón de Bohr.

64 •• Considerar que el momento magnético de un átomo de aluminio es 1 magnetón de Bohr. La densidad del aluminio es 2,7 g/cm³ y su masa molar es de 27 g/mol. (*a*) Calcular M_s y $\mu_0 M_s$, para el aluminio. (*b*) Utilizar los resultados del problema 62 para calcular χ_m a $T = 300$ K. (*c*) Explicar por qué el resultado de (*b*) es mayor que el valor que se muestra en la tabla 27.1.

65 •• Un toroide de N vueltas, de radio medio R y radio de sección transversal r, siendo $r \ll R$, transporta por su arrollamiento una corriente de intensidad I (figura 27.59). Cuando se rellena el toroide con cierto material, se denomina *anillo de Rowlan*. Hallar B_{ap} y B en dicho anillo. Admitir que la imanación M en todos los puntos es paralela a $\vec{B}_{ap}$. SSM

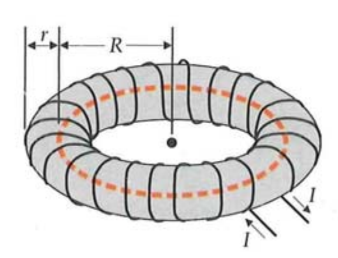


FIGURA 27.59 Problemas 65 y 73

66 •• Un toroide se rellena con oxígeno líquido, cuya susceptibilidad magnética es 4×10^{-3}. El toroide tiene 2000 vueltas y transporta una corriente de 15 A. Su radio medio es de 20 cm y el radio de su sección transversal, 0,8 cm. (*a*) ¿Cuál es la imanación M? (*b*) ¿Cuál es el campo magnético B? (*c*) ¿Cuál es el porcentaje en que se ha incrementado el campo B producido por el oxígeno líquido?

67 •• Un toroide de radio medio 14 cm y área de sección transversal 3 cm² está enrollado con alambre fino a razón de 60 vueltas/cm, medidas a lo largo de su circunferencia media, transportando una corriente de intensidad 4 A. El núcleo está relleno de un material paramagnético, cuya susceptibilidad es $2{,}9 \times 10^{-4}$. (*a*) ¿Cuál es el módulo del campo magnético dentro de la sustancia? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la imanación? (*c*) ¿Cuál sería el módulo del campo magnético si no estuviera presente el núcleo paramagnético?

*FERROMAGNETISMO

68 • En el caso del hierro recocido la permeabilidad K_m tiene un valor máximo de unos 5500 para $B_{ap} = 1{,}57 \times 10^{-4}$ T. Hallar M y B cuando K_m es máximo.

69 •• La imanación de saturación en el caso del hierro recocido tiene lugar cuando $B_{ap} = 0{,}201$ T. Hallar la permeabilidad μ y la permeabilidad relativa K_m en la saturación (véase la tabla 27.2). SSM

70 •• La *fuerza coercitiva* se define como el campo magnético aplicado necesario para anular B a lo largo de la curva de histéresis (punto *c* de la figura 27.44). Para un determinado imán permanente en forma de barra la fuerza coercitiva es $B_{ap} = 5{,}53 \times 10^{-2}$ T. El imán en forma de barra, ha de desimanarse situándolo en el interior de un solenoide largo de 15 cm de longitud y 600 vueltas. ¿Cuál es la corriente mínima necesaria que ha de circular por el solenoide para desimanar el imán?

71 •• Un solenoide largo tiene 50 vueltas/cm y por él circula una corriente de 2 A. Al solenoide lo atraviesa un núcleo de hierro y al medir B resulta valer 1,72 T. (*a*) ¿Cuál es el valor de B_{ap} (despreciando los efectos de los extremos)? (*b*) ¿Cuál es el valor de M? (*c*) ¿Cuál es la permeabilidad relativa K_m en este caso?

72 •• Cuando la corriente que circula por el solenoide del problema 71 es 0,2 A, el campo magnético medido resulta valer 1,58 T. (*a*) Despreciando los efectos de los extremos, ¿cuánto vale B_{ap}? (*b*) ¿Cuánto vale M? (*c*) ¿Cuánto vale la permeabilidad relativa K_m?

73 •• El toroide de N vueltas por el que circula una corriente I, tiene un radio medio R y una sección tranversal de radio r, donde $r << R$ (figura 27.59) y tiene un núcleo de hierro. Cuando la corriente es de 10 A, el campo magnético en el toroide es 1,8 T. (*a*) ¿Cuál es la imanación M? (*b*) Determinar los valores de K_m, m y xm correspondientes a la muestra de hierro. SSM

74 • Los centros de las vueltas de un toroide forman una circunferencia de radio 14,0 cm. La superficie de la sección transversal del toroide es de 3 cm². Si tiene 5278 vueltas de un hilo fino que transporta una corriente de 0,200 A y el núcleo de hierro dulce tiene una permeabilidad de 500, ¿cuál es el valor del campo en el núcleo?

75 ••• Un cable largo y rectilíneo con un radio de 1,0 mm se recubre con un material ferromagnético aislante de espesor 3,0 mm y una permeabilidad magnética relativa $K_m = 400$. El cable así recubierto se encuentra en el aire. El alambre en sí mismo no es magnético y transporta una corriente de 40 A. (*a*) Determinar el campo magnético dentro del alambre en función del radio r. (*b*) Determinar el campo magnético dentro del material ferromagnético en función del radio R. (*c*) Determinar el campo magnético fuera del material ferromagnético en función

de R. (*d*) ¿Cuáles serán los módulos y sentidos de las corrientes de imanación sobre las superficies del material ferromagnético que dan lugar a los campos magnéticos observados?

PROBLEMAS GENERALES

76 • Determinar el campo magnético en el punto P de la figura 27.60.

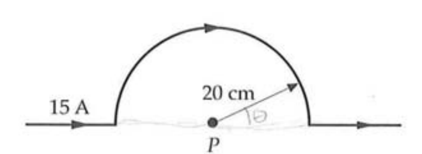


FIGURA 27.60 Problema 76

77 • Hallar el campo magnético en el punto P de la figura 27.61, que es el centro común de los dos arcos de semicircunferencia. SSM

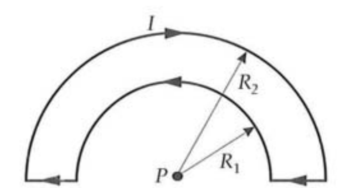


FIGURA 27.61 Problema 77

78 •• Un conductor de longitud ℓ se enrolla en forma de una bobina circular de N espiras y transporta una corriente de intensidad I. Demostrar que el campo magnético en el centro de la bobina viene dado por $\mu_0 \pi N^2 I/\ell$.

79 •• Un conductor muy largo que transporta una corriente I se dobla en la forma indicada en la figura 27.62. Determinar el campo magnético en el punto P.

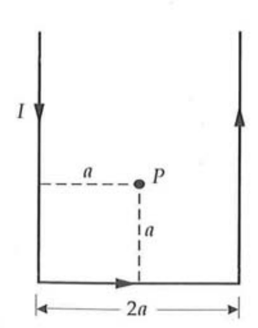


FIGURA 27.62 Problema 79

80 •• Un cable de transmisión de energía por el cual circulan 50 A está situado a 2 m por debajo de la superficie terrestre, pero se ignora su dirección, sentido y posición precisa. Explicar cómo podría localizarse utilizando una brújula. Admitir que se encuentra en el ecuador, en donde el campo magnético terrestre es 0,7 G dirigido hacia el norte.

81 •• Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 20 A, según se ve en la figura 27.63. Una bobina rectangular con dos de sus lados paralelos al conductor recto tiene lados de 5 y 10 cm, estando su lado más próximo a una distancia de 2 cm del conductor. La bobina transporta una corriente de 5 A. (*a*) Determinar la fuerza debida a la corriente del conductor que actúa sobre cada segmento de la bobina rectangular. (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la bobina? SSM

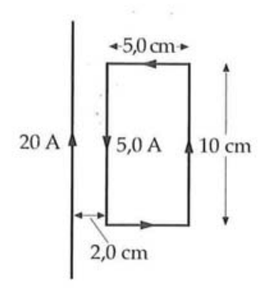


FIGURA 27.63 Problema 81

82 •• La espira cerrada que se muestra en la figura 27.64 transporta una corriente de 8 A en sentido antihorario. El radio del arco exterior es de 60 cm y el del interior 40 cm. Determinar el campo magnético en el punto P.

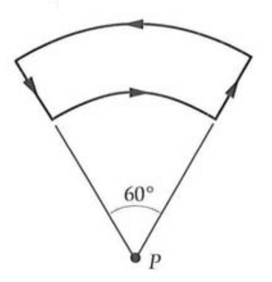


FIGURA 27.64 Problema 82

83 •• Un circuito cerrado está formado por dos semicírculos de radios 40 y 20 cm conectados entre sí por segmentos rectilíneos, como se muestra en la figura 27.65. Una corriente fluye por este circuito en sentido horario. Determinar el campo magnético en el punto P.

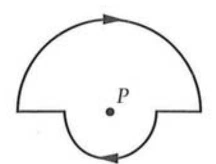


FIGURA 27.65 Problema 83

84 •• Por un conductor rectilíneo muy largo circula una corriente de 20 A. Un electrón está a 1 cm del centro del conductor y se mueve con una velocidad de $5,0 \times 10^6$ m/s. Hallar la fuerza que actúa sobre el electrón cuando se mueve (*a*) directamente alejándose del conductor, (*b*) paralelo al conductor en el sentido de la corriente y (*c*) perpendicular al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica con el conductor.

85 •• HOJA DE CÁLCULO Una corriente de 5 A se distribuye uniformemente sobre la sección de un hilo conductor recto y largo cuyo radio es de 2,55 mm. Usando una hoja de cálculo, dibujar la intensidad del campo magnético en función de R, distancia desde el centro del hilo, para $0 \leq R \leq 10R_0$.

86 •• Una bobina circular de 50 vueltas y radio 10 cm transporta una corriente de 4 A. En el centro de esta gran bobina existe una pequeña bobina de 20 vueltas de radio 0,5 cm que transporta una corriente de 1 A. Los planos de las dos bobinas son perpendiculares. Determinar el momento ejercido por la bobina grande sobre la pequeña. (Despreciar cualquier variación de B debida a que la gran bobina cubre la región ocupada por la pequeña.)

87 •• La aguja de una brújula magnética posee una longitud de 3 cm, un radio de 0,85 mm y una densidad de $7{,}96 \times 10^3$ kg/m^3. Puede girar libremente en un plano horizontal, donde la componente horizontal del campo magnético terrestre es 0,6 G. Cuando se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, la aguja efectúa un movimiento armónico simple alrededor de su punto medio con una frecuencia de 1,4 Hz. (*a*) ¿Cuál es el momento dipolar magnético de la aguja? (*b*) ¿Cuál es la imanación M? (*c*) ¿Cuál es la corriente de imanación en la superficie de la aguja?

88 •• Puede construirse un amperímetro relativamente barato, denominado *galvanómetro de tangentes*, utilizando el campo magnético terrestre. Una bobina circular plana de N espiras y un radio R está orientada de modo que el campo B_c que se produce en el centro de la bobina está dirigido hacia el este o hacia el oeste. Una brújula se coloca en el centro de la bobina. Cuando no circula corriente por la bobina, la brújula señala hacia el norte. Cuando existe una corriente I, la brújula señala en la dirección del campo magnético resultante B formando un ángulo θ con el norte. Demostrar que la corriente I está relacionada con θ y con la componente horizontal del campo terrestre B_t por $I = \dfrac{2RB_e}{\mu_0 N}\,\mathrm{tg}\,\theta$.

89 •• El campo magnético terrestre es alrededor de 0,600 G en los polos y apunta verticalmente hacia abajo en el hemisferio norte. Si este campo magnético se debiera a una corriente eléctrica circulando en una espira de un radio de 1300 km (radio del núcleo de hierro de la Tierra), (*a*) ¿cuál sería la corriente necesaria para obtener dicho campo? (*b*) ¿Qué sentido debería tener la corriente, la del giro de la Tierra o el opuesto? Explique su respuesta.

90 •• Una larga y estrecha barra imanada tiene su momento magnético $\vec{\mu}$ paralelo a su eje y está suspendido por su centro (en esencia viene a ser una aguja de brújula). Cuando el imán se coloca en un campo magnético $\vec{B}$, se alinea con el campo. Si se desplaza un pequeño ángulo y se le deja libre, demostrar que el imán empieza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia igual a $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu B}{I}}$, donde I es el momento de inercia del imán con respecto al punto de suspensión.

91 •• Un conductor recto infinitamente largo se dobla en la forma indicada en la figura 27.66. La porción circular tiene un radio de 10 cm con su centro a la distancia r de la parte recta. Determinar r de modo que el campo magnético en el centro de la porción circular sea cero.

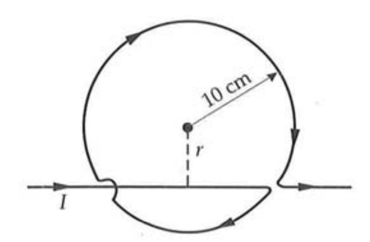


FIGURA 27.66 Problema 91

92 •• (*a*) Determinar el campo magnético en el punto P generado por la corriente de intensidad I que circula por el conductor mostrado en la figura 27.67. (*b*) Utilizar el resultado de (*a*) para determinar el campo en el centro de un polígono de N lados. Demostrar que cuando N es muy grande, el resultado se aproxima al del campo magnético en el centro de un círculo.

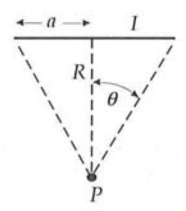


FIGURA 27.67 Problema 92

93 •• La corriente que circula por un conductor cilíndrico largo de radio $R = 10$ cm varía con la distancia al eje del mismo según la relación $I(r) = (50\text{ A/m})r$. Determinar el campo magnético en (*a*) $r = 5$ cm, (*b*) en $r = 10$ cm y (*c*) $r = 20$ cm.

94 •• La figura 27.68 muestra una espira cuadrada de 20 cm de lado situada en el plano xy con su centro en el origen. Por ella circula una corriente de 5 A. Por encima de la espira, en $y = 0$, $z = 10$ cm se encuentra un alambre infinitamente largo, paralelo al eje x, por el cual circula una corriente de 10 A. (*a*) Determinar el momento que actúa sobre la espira. (*b*) Determinar la fuerza neta que actúa sobre la espira.

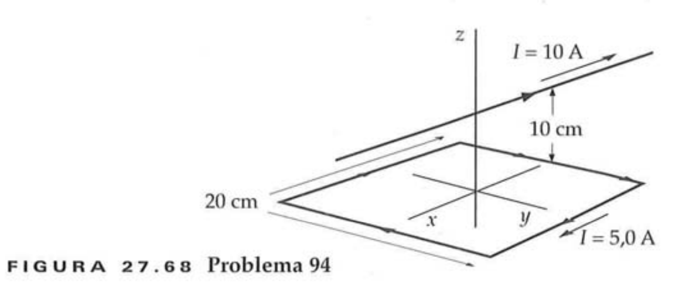


FIGURA 27.68 Problema 94

95 •• Podemos construir una balanza de corriente eléctrica de la siguiente forma: ponemos un alambre de 10 cm de largo en el platillo de una balanza electrónica como las que se usan en los laboratorios de Química. Sujetamos el alambre y lo conectamos a una fuente de alimentación, y cerramos el circuito de tal forma que otro segmento del mismo alambre queda suspendido en el aire manteniéndose paralelo al primer trozo, justo por encima y a una distancia de 2 cm, tal como indica la figura de abajo. La fuente suministra una corriente que atraviesa los dos trozos de alambre. Cuando la fuente está conectada, la lectura de la balanza aumenta en 5 mg. ¿Cuál es la corriente que atraviesa el alambre? SSM

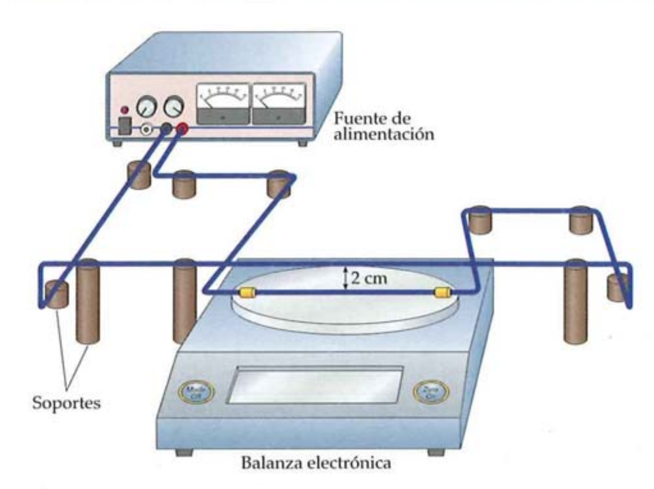
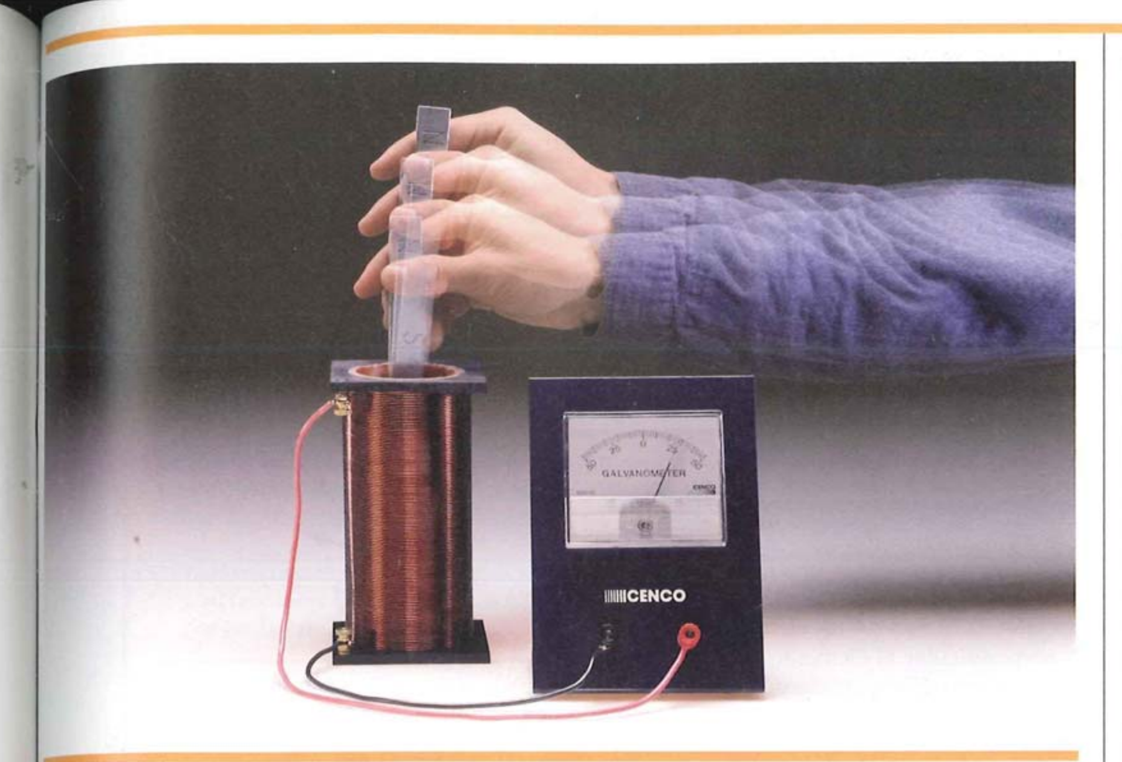


FIGURA 27.69 Problema 95

96 •• Consideremos la balanza del problema 95. Si ésta tiene una sensibilidad de 0,1 mg, ¿cuál es la corriente mínima que se puede detectar con esta balanza?

97 ••• Un disco de radio R lleva una carga fija de densidad σ y gira con velocidad angular ω. (*a*) Consideremos un anillo circular de radio r y anchura dr con carga dq. Demostrar que la corriente producida por este anillo es $dI = \omega\sigma r\, dr$. (*b*) Utilizar este resultado del apartado (*a*) para demostrar que el campo magnético en el centro del disco es $\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R$. (*c*) Utilizar el resultado del apartado (*a*) para hallar el campo magnético en un punto situado en el eje del disco a una distancia x del centro. SSM

98 ••• Una espira cuadrada de lado, está en el plano yz con su centro en el origen. Transporta una corriente I. Determinar el campo magnético B en cualquier punto del eje x, y demostrar que para x mucho mayor que ℓ, $B \approx \mu\mu_0/(2\pi z^3)$, donde μ es el momento magnético de la espira.





DEMOSTRACIÓN DE LA FEM INDUCIDA. CUANDO EL IMÁN SE ALEJA DE LA BOBINA O SE ACERCA A ELLA SE INDUCE EN ÉSTA UNA FEM, COMO INDICA LA DESVIACIÓN DEL GALVANÓMETRO. NO SE OBSERVA NINGUNA DESVIACIÓN CON EL IMÁN EN REPOSO. *(Richard Megna/Fundamental Photographs.)*

Inducción magnética

? ¿Cómo se puede calcular la fuerza electromotriz inducida en una bobina? (Véase el ejemplo 28.2.)

A principios de la década de 1830, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry en Norteamérica descubrieron independientemente que la variación temporal del flujo magnético debida a un campo magnético variable que atraviesa la superficie limitada por una espira conductora estacionaria (en reposo) induce en ésta una corriente. Las fem y las corrientes causadas por los flujos magnéticos variables se denominan **fem inducidas** y **corrientes inducidas**. En sí mismo, el proceso se denomina **inducción magnética**. Faraday y Henry descubrieron también que en un campo magnético estático, variando el flujo que atraviesa una superficie encerrada por una espira en movimiento se induce una fem en ésta. Una fem producida cuando un conductor se mueve en una región en la que existe campo magnético se denomina **fem de movimiento**.

A veces, al extraer la clavija del enchufe de un circuito eléctrico observamos la producción de una pequeña chispa. Antes de la desconexión, el cordón eléctrico transporta una corriente que, como sabemos, genera un campo magnético alrededor de la corriente. Al desconectar, la corriente cesa bruscamente y el campo mag-

nético que le rodea se colapsa. El campo magnético variable produce una fem que tiende a mantener la corriente original engendrando así una chispa a través del enchufe. Una vez que el campo magnético se ha anulado y, por lo tanto, deja de ser variable, la fem inducida es cero.

En este capítulo, exploraremos los diferentes métodos de inducción magnética, los cuales pueden resumirse por una simple relación conocida por el nombre de ley de Faraday. La ley de Faraday relaciona la fem inducida en un circuito con la variación temporal del flujo magnético a través de él. (El flujo magnético *a través del circuito se refiere al flujo magnético a través de la superficie encerrada por el circuito.)*

28.1 FLUJO MAGNÉTICO

El flujo de un campo magnético a través de una superficie se calcula de un modo análogo al flujo de un campo eléctrico (sección 22.2). Sea dA un elemento de área sobre la superficie y $\hat{n}$ el vector unitario perpendicular al elemento (figura 28.1). Hay dos direcciones normales a cualquier elemento de superficie y podemos elegir de forma arbitraria cuál de ellas consideramos que debe ser la dirección del vector unitario $\hat{n}$. Sin embargo, el signo del flujo no depende de dicha elección. El flujo magnético ϕ_m se define por la expresión

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = \int_S B_n\, dA \qquad 28.1$$

FLUJO MAGNÉTICO

La unidad de flujo magnético es la del campo magnético multiplicada por la unidad del área, el tesla-metro cuadrado, y se denomina **weber** (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \qquad 28.2$$

Como el campo magnético es proporcional al número de líneas de campo magnético por unidad de área, el flujo magnético es proporcional al número de líneas que atraviesan el área.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.1

Demostrar que 1 weber por segundo es un volt.

Si la superficie es un plano de área A, y $\vec{B}$ es constante en módulo, dirección y sentido sobre la superficie, el flujo que atraviesa la superficie es

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n}A = BA\cos\theta = B_n A \qquad 28.3$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de $\vec{B}$ y la dirección normal positiva. Con frecuencia trataremos el flujo a través de una superficie rodeada por una bobina que contiene varias vueltas de alambre. Si la bobina contiene N vueltas, el flujo a través de la superficie es igual al producto de N por el flujo que atraviesa una sola vuelta (figura 28.2):

$$\phi_m = NBA\cos\theta \qquad 28.4$$

donde A es el área de la superficie plana encerrada por una sola vuelta. (*Observación*: de hecho, sólo puede encerrar una superficie una curva cerrada. Una sola vuelta de una bobina de varias espiras no está cerrada, de modo que no puede encerrar una superficie. Sin embargo, si la bobina está enrollada de forma compacta podemos considerar que una vuelta está casi cerrada y que el área de la superficie que (casi) limita es A.)

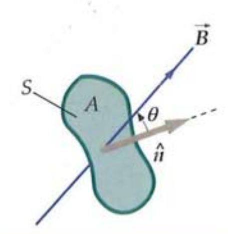
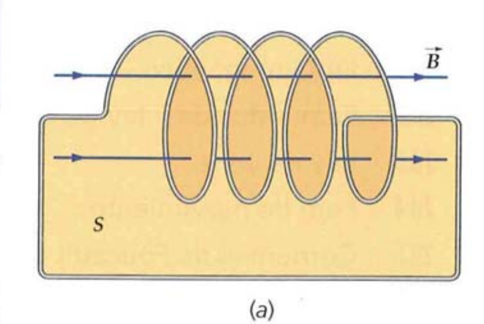
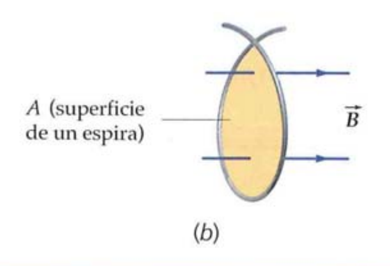


FIGURA 28.1 Si el campo $\vec{B}$ forma un ángulo θ con la normal al área de un bucle, el flujo a través del mismo es $\vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = B\, dA \cos\theta$, donde dA es el área de la superficie.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 28.2 (*a*) El flujo a través de la superficie S encerrada por la bobina con N vueltas es proporcional a las líneas de campo que penetran en la superficie. La bobina de la figura contiene 4 vueltas. Las dos líneas de campo dibujadas en la figura penetran la superficie cuatro veces, una vez por cada vuelta, de tal forma que el flujo a través de la superficie S es cuatro veces mayor que la que penetra por cada vuelta de la bobina. La bobina tiene las espiras separadas lo suficiente para permitir ver mejor la superficie S. (*b*) El área A de la superficie plana es (casi) la encerrada por una vuelta de la bobina.

Ejemplo 28.1 Flujo a través de un solenoide

Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de 40 cm de longitud, 2,5 cm de radio y 600 vueltas, cuando transporta una corriente de 7,5 A.

PLANTEAMIENTO El campo magnético $\vec{B}$ dentro del solenoide es constante y paralelo al eje del solenoide. Por lo tanto, es perpendicular al plano de las espiras. Necesitamos determinar B dentro del solenoide y luego multiplicar B por NA.

SOLUCIÓN

1. El flujo magnético es el producto del número de vueltas, el campo magnético y el área de las espiras (ecuación 28.4):

$$\phi_m = NBA$$

2. El campo magnético dentro del solenoide viene dado por $B = \mu_0 nI$ (ecuación 27.10), donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud:

$$\phi_m = N\mu_0 nIA = N\mu_0 \frac{N}{\ell} IA = \frac{\mu_0 N^2 IA}{\ell}$$

3. Expresar el área de las espiras en función de su radio:

$$A = \pi r^2$$

4. Sustituir los valores determinados para calcular el flujo:

$$\phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I \pi r^2}{\ell}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(600)^2(7{,}5\ \text{A})\pi(0{,}025\ \text{m})^2}{0{,}40\ \text{m}}$$

$$= \boxed{1{,}67 \times 10^{-2}\ \text{Wb}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades en la segunda línea del paso 4 son $\text{T} \cdot \text{m}^2$, que son las unidades del flujo magnético, cuya unidad es el Weber.

OBSERVACIÓN Obsérvese que $\phi_m = NBA$ y que B es proporcional al número de vueltas N. Por lo tanto, el flujo es proporcional a N^2.

28.2 FEM INDUCIDA Y LEY DE FARADAY

Los experimentos de Faraday, Henry y otros, demostraron que si el flujo magnético a través de un área rodeada por un circuito varía por cualquier medio, se induce una fem que es igual en módulo a la variación por unidad de tiempo del flujo que atraviesa el circuito. La fem se detecta habitualmente observando una corriente en el circuito, pero aparece incluso aunque el circuito sea incompleto (abierto), de modo que no existe corriente. En nuestras explicaciones previas, la fem en un circuito se localizó en una región específica del mismo, por ejemplo, entre los terminales de la batería. Sin embargo, la fem inducida por un flujo magnético variable puede considerarse distribuida a través del circuito.

El flujo magnético ϕ_m a través de la superficie plana de área A en un campo magnético $\vec{B}$ uniforme es $\phi_m = BA \cos\theta$ (ecuación 28.3), donde θ es el ángulo entre $\vec{B}$ y la normal a la superficie. El flujo magnético a través de una superficie encerrada por un circuito puede alterarse de muchas maneras distintas. La corriente que produce el campo magnético se puede aumentar o disminuir; pueden moverse unos imanes permanentes alejándolos o acercándolos a la superficie; se puede hacer girar el propio circuito en un campo magnético fijo o lo podemos mover en el interior de una región en la que exista un campo magnético fijo pero no uniforme $\vec{B}$; puede variarse la orientación del circuito; o puede aumentarse o disminuirse el área del circuito en el interior de un campo magnético fijo. En cada uno de los casos, se induce una fem $\mathcal{E}$ en el circuito cuyo valor es igual en módulo

a la variación del flujo magnético por unidad de tiempo a través de (una superficie encerrada por) un circuito. Es decir

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad 28.5$$

LEY DE FARADAY

Este resultado es conocido como la **ley de Faraday**. El signo negativo en esta ley de Faraday se refiere al sentido de la fem inducida que analizaremos en las próximas secciones de este capítulo.

Consideremos una sola espira de un conductor fija en un campo magnético, como se indica en la figura 28.3. El flujo a través de la espira varía porque aumenta la intensidad del campo magnético, de modo que se induce en ella una fem. Como esta fem es el trabajo realizado por unidad de carga, deben existir fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles que realicen trabajo sobre ellas. Las fuerzas magnéticas no pueden realizar trabajo y, por lo tanto, no podemos atribuir la fem al trabajo realizado por dichas fuerzas. Son las fuerzas eléctricas asociadas con un campo eléctrico no conservativo $\vec{E}_{nc}$ las que realizan trabajo sobre las cargas móviles. La integral de línea de este campo eléctrico alrededor de un circuito completo es igual al trabajo realizado por unidad de carga, que es la fem del circuito.

Los campos eléctricos que hemos estudiado previamente eran el resultado de cargas eléctricas estáticas. Estos campos son conservativos, lo cual significa que su circulación alrededor de una curva cerrada C es cero. (Se define la circulación del potencial vector $\vec{E}$ alrededor de la curva C como $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$.) Sin embargo, el campo eléctrico resultante de un flujo magnético variable no es conservativo. La circulación alrededor de C es una fem inducida igual a la variación con el tiempo del flujo magnético a través de cualquier superficie S encerrada por C cambiada de signo:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad 28.6$$

FEM INDUCIDA EN UN CIRCUITO ESTACIONARIO EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE

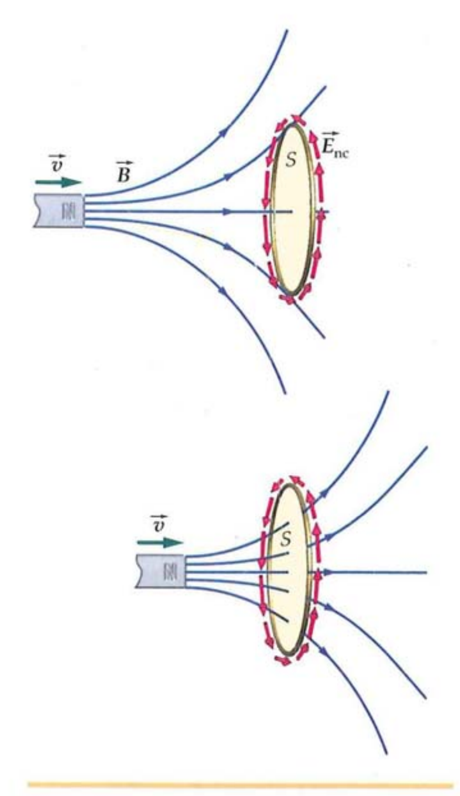


FIGURA 28.3 Cuando el flujo magnético que atraviesa la espira de alambre es variable, se induce en ella una fem. La fem se distribuye a través de toda la espira y equivale a un campo eléctrico no conservativo $\vec{E}_{nc}$ tangente al alambre. La curva cerrada C está dentro del material de la espira conductora.

Ejemplo 28.2 Fem inducida en una bobina circular I

Un campo magnético uniforme forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 4 cm. El campo varía a razón de 85 T/s, permaneciendo fija su dirección. Determinar el módulo de la fem inducida en la bobina.

PLANTEAMIENTO La fem inducida es igual a N veces la variación de flujo a través de cada vuelta por unidad de tiempo. Como $\vec{B}$ es uniforme, el flujo a través de cada vuelta es simplemente $\phi_m = BA\cos\theta$, donde $A = \pi r^2$ es el área de una espira.

SOLUCIÓN

1. El módulo de la fem viene dada por la ley de Faraday: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi_m}{dt}$

2. Para un campo uniforme, el flujo es: $\phi_m = N\vec{B} \cdot \hat{n}A = NBA\cos\theta$

3. Sustituir ϕ_m por esta expresión y calcular $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBA\cos\theta) = -N\pi r^2\cos\theta\frac{dB}{dt}$$
$$= (300)\pi(0{,}0400\text{ m})^2\cos 30{,}0°(85{,}0\text{ T/s}) = -111\text{ V}$$
$$\mathcal{E} = \boxed{111\text{ V}}$$

COMPROBACIÓN La línea 2 del paso 3 tiene unidades de $\text{T}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, donde $1\text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ es 1 Weber/s = 1 Volt. [Usar la fórmula $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ para recordar que $1\text{ N} = 1\text{ C}\cdot\text{m}\cdot\text{T/s}$, así que $1\text{ T} = 1\text{ N}\cdot\text{s}/(\text{C}\cdot\text{m})$.]

PROBLEMA PRÁCTICO 28.2 Si la resistencia de la bobina es 200 Ω, ¿cuál es la corriente inducida?

Ejemplo 28.3 Fem inducida en una bobina circular II — *Inténtelo usted mismo*

Una bobina de 80 vueltas tiene un radio de 5 cm y una resistencia de 30 Ω. Determinar cuál debe ser el módulo de la variación de un campo magnético perpendicular al plano de la bobina para inducir en ésta una corriente de 4 A.

PLANTEAMIENTO Aplicando la ley de Faraday, el número de vueltas (espiras) multiplicado por la variación temporal del flujo magnético a través de la superficie de una espira es igual a la fuerza electromotriz inducida cambiada de signo. La fem en la bobina es igual a IR.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Escribir el flujo magnético en función de B, N y el radio r y despejar B.	$\phi_m = NBA = NB\pi r^2$ $B = \dfrac{\phi_m}{N\pi r^2}$
2. Derivar B respecto al tiempo.	$\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{1}{N\pi r^2}\dfrac{d\phi_m}{dt}$
3. Utilizar la ley de Faraday para relacionar la variación con el tiempo del flujo y la fem.	$\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi_m}{dt}$
4. Calcular el módulo de la fem en la bobina a partir de la corriente y resistencia de la bobina.	$\lvert\mathcal{E}\rvert = IR = 120\text{ V}$
5. Sustituir los valores de $\mathcal{E}$, N y r para calcular dB/dt.	$\left\lvert\dfrac{dB}{dt}\right\rvert = \dfrac{1}{N\pi r^2}\lvert\mathcal{E}\rvert = \boxed{191\text{ T/s}}$

Una convención de signos nos permite utilizar la ecuación 28.5 para determinar el sentido del campo eléctrico y la fem inducida. Según esta convención, la dirección tangencial positiva a lo largo de la curva C se relaciona con la dirección y el sentido del vector unitario $\hat{n}$ normal de la superficie S limitada por dicha curva C mediante la regla de la mano derecha, tal como indica la figura 28.4. Según esta regla, el dedo pulgar da la dirección y el sentido del vector unitario $\hat{n}$, los otros cuatro dedos plegados sobre la palma de la mano indican de forma natural la dirección tangencial positiva en C. Si $d\phi_m/dt$ es positivo, de acuerdo con la ley de Faraday de la ecuación 28.6, $\mathcal{E}$ tiene la dirección tangencial negativa. (El sentido de $\mathcal{E}$ queda determinado por la ley de Lenz que se estudia en la sección 28.3.)

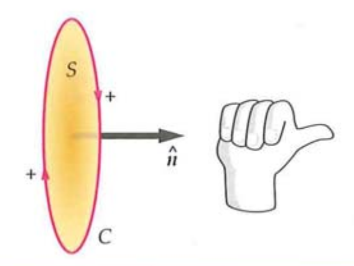


FIGURA 28.4 Colocando el pulgar de la mano derecha en la dirección y el sentido del vector unitario $\hat{n}$ de la superficie S, los dedos de la mano derecha se curvan indicando la dirección tangencial positiva en C.

Ejemplo 28.4 El campo eléctrico inducido es no conservativo

Un campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular al plano de la página y es uniforme en una región circular de radio R, como se indica en la figura 28.5. Fuera de la región circular, B vale 0. La variación por unidad de tiempo del módulo de B es dB/dt. ¿Cuál es el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico inducido en el plano de la página (a) a una distancia $r < R$ a partir del centro de la región circular y (b) a una distancia $r > R$, en donde $B = 0$?



FIGURA 28.5



FIGURA 28.6

PLANTEAMIENTO El campo magnético $\vec{B}$ está dirigido hacia la página y es uniforme en una región circular de radio R, como se muestra en la figura 28.6. Cuando B varía, el flujo magnético también varía y se induce una fem $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ alrededor de cualquier curva que incluya el flujo. El campo eléctrico inducido se obtiene aplicando $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -d\phi_m/dt$ (ecuación 28.6). Para aprovechar la simetría del sistema elegiremos una curva circular de radio r para el

cálculo de la integral de línea. Por simetría, $\vec{E}$ es tangente a esta curva y posee el mismo módulo en cualquier punto de la misma. Asignaremos el sentido hacia dentro de la página como el positivo de $\hat{n}$. Este convenio de signos indica que la dirección tangencial positiva tiene sentido horario. Calcularemos entonces el flujo magnético ϕ_m y su derivada respecto al tiempo. Igualando la integral y la derivada respecto al tiempo, obtenemos una expresión para $\vec{E}$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se relacionan mediante la ecuación 28.6:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

donde

$$\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA$$

2. E_t (componente tangencial de $\vec{E}$) se determina a partir de la integral de línea para un círculo de radio $r < R$. $\vec{E}$ es tangente al círculo y su módulo es constante:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \oint_C E_t\,d\ell = E_t\oint_C d\ell = E_t 2\pi r$$

3. Para $r < R$, $\vec{B}$ es constante sobre el círculo. Elegimos como sentido positivo del vector unitario $\hat{n}$ el sentido hacia el interior de la página. Como $\vec{B}$ es perpendicular al plano del círculo, el flujo es simplemente BA:

$$\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = \int_S B_n\,dA = B_n\int_S dA$$
$$= BA = B\pi r^2$$

4. Calcular la derivada de ϕ_m respecto al tiempo:

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi r^2) = \frac{dB}{dt}\pi r^2$$

5. Sustituir los resultados de 2 y 4 en 1 y despejar E_t:

$$E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

por lo tanto,

$$E_t = \boxed{-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \quad r < R}$$

6. La dirección de $\hat{n}$ elegida en 3 implica que la dirección tangencial positiva es la horaria:

E_t es negativa; por lo tanto, $\vec{E}$ tiene $\boxed{\text{dirección antihoraria}}$.

(*b*) 1. Para un círculo de radio $r > R$, en donde el campo magnético es nulo, la integral de línea es la misma que antes:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_t 2\pi r$$

2. Como $B = 0$ para $r > R$, el flujo magnético a través del círculo es pr^2B:

$$\phi_m = B\pi R^2$$

3. Aplicar la ley de Faraday para deducir E_t:

$$E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi R^2$$

por lo tanto,

$$E_t = \boxed{-\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \quad r > R}$$

E_t es negativa; por lo tanto, $\vec{E}$ tiene $\boxed{\text{dirección antihoraria}}$.

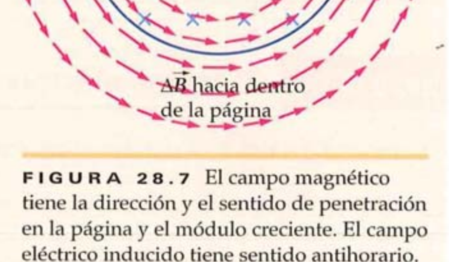


FIGURA 28.7 El campo magnético tiene la dirección y el sentido de penetración en la página y el módulo creciente. El campo eléctrico inducido tiene sentido antihorario.

COMPROBACIÓN La dirección tangencial positiva es la de las agujas del reloj (horaria). Cuando $d\phi_m/dt$ es positiva, E_t es negativa y la dirección del campo eléctrico es antihoraria, tal como se muestra en la figura 28.7.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el campo eléctrico en este ejemplo se produce por la variación del campo magnético más que por cargas eléctricas. Obsérvese también que $\vec{E}$, y en consecuencia la fuerza electromotriz inducida, existe a lo largo de la curva que encierra la superficie por la que el flujo magnético varía temporalmente, tanto si hay hilo y circuito como si no lo hay.

! Obsérvese también que $\vec{E}$, y en consecuencia la fuerza electromotriz inducida, existe a lo largo de la curva que encierra la superficie por la que el flujo magnético varía temporalmente, tanto si hay hilo y circuito como si no lo hay.

28.3 LEY DE LENZ

El signo negativo de la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducidas pueden determinarse mediante un principio general físico llamado **ley de Lenz**:

> La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.
>
> LEY DE LENZ

Este enunciado de la ley de Lenz no especifica el tipo de variación que causa la fem y la corriente inducidas, lo cual intencionadamente queda sin concretar para cubrir una diversidad de condiciones. Algunos ejemplos aclararán este punto.

La figura 28.8 muestra una barra magnética que se mueve acercándose a una espira de resistencia R. El movimiento del imán hacia la derecha induce una fem y una corriente en la espira. La ley de Lenz establece que esta fem y la correspondiente corriente inducida deberán tener una dirección tal que se oponga al movimiento del imán. Es decir, la corriente inducida en la espira produce un campo magnético que ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda cuando el imán se aproxima por la derecha. La figura 28.9 muestra el momento magnético inducido en la espira de corriente cuando el imán se acerca hacia ella. La espira actúa como un imán con su polo norte a la izquierda y el sur a la derecha y dado que los polos iguales se repelen, el momento magnético inducido de la espira repele al imán, por lo que la espira reacciona oponiéndose al movimiento de acercamiento del imán a la espira. Esto significa que el sentido de la corriente inducida en la espira tiene que ser tal como se muestra en la figura 28.9.

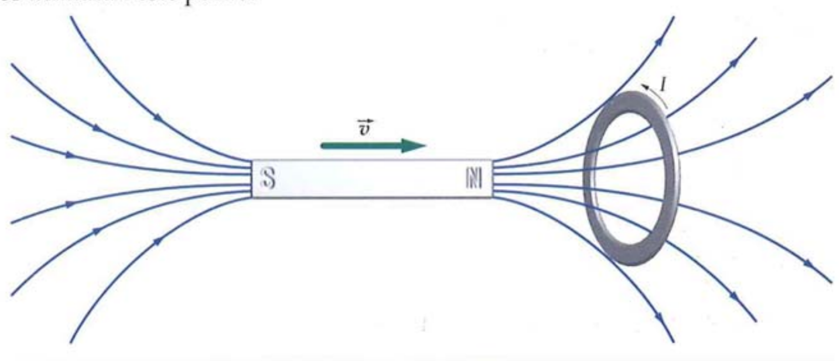


FIGURA 28.8 Cuando el imán en forma de barra se mueve hacia la espira, la fem inducida en ella produce una corriente en el sentido indicado. El campo magnético debido a la corriente inducida en la espira produce un campo magnético que ejerce una fuerza sobre el imán, oponiéndose a su movimiento hacia la derecha.

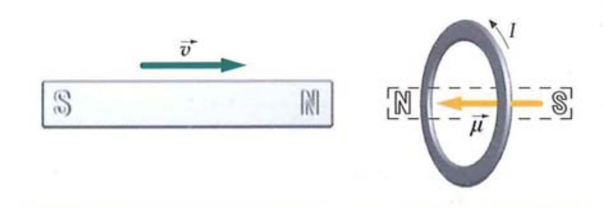


FIGURA 28.9 El momento magnético de la espira $\vec{\mu}$ (se representa en la figura como si fuera un imán) debido a la corriente inducida es tal que se opone al movimiento de la barrita de imán real. Este imán se mueve hacia la espira y, por lo tanto, el momento magnético inducido repele la barrita imanada.

Supongamos que la corriente en la espira de la figura 28.9 fuera la opuesta a la dirección mostrada. Entonces habría una fuerza magnética cuando el imán se aproximase hacia la derecha que causaría una aceleración. Esta aceleración produciría un crecimiento en la corriente inducida, lo cual volvería a causar fuerza magnética sobre el imán y así sucesiva y progresivamente. Esto es demasiado bueno para ser cierto. Si esto fuera así, aplicando una pequeña fuerza a un imán en dirección a una espira conductora, aquel se movería hacia ésta siempre con velocidad creciente sin ninguna aportación energética por nuestra parte, lo cual violaría el principio de conservación de la energía. Sin embargo, la realidad es que la energía se conserva y la ley de Lenz es consistente con esta realidad.

Se puede enunciar la ley de Lenz de forma alternativa en términos del flujo magnético de la siguiente forma

> Cuando se produce una variación del flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera un flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación.
>
> FORMULACIÓN ALTERNATIVA DE LA LEY DE LENZ

Un ejemplo de cómo se aplica esta formulación alternativa puede verse en el ejemplo 28.5.

Ejemplo 28.5 Ley de Lenz y corriente inducida

Usando la forma alternativa de la ley de Lenz, determinar el sentido de la corriente inducida en la espira mostrada en la figura 28.8.

PLANTEAMIENTO Usar la forma alternativa de la ley de Lenz para determinar el sentido del campo magnético debido a la corriente inducida en la espira. Entonces utilizar la regla de la mano derecha para determinar el sentido de esta corriente inducida. Cuando un flujo magnético a través de una superficie varía con el tiempo, se induce una corriente que crea un campo magnético y, por consiguiente, un flujo a través de la misma superficie que es de signo opuesto a la variación del flujo inicial.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un esquema de la espira y la superficie plana S encerrada por ésta tal como indica la figura 28.10. En la superficie S dibujar el vector $\Delta\vec{B}_1$, que representa el cambio del campo magnético $\vec{B}_1$ cuando se aproxima el imán:

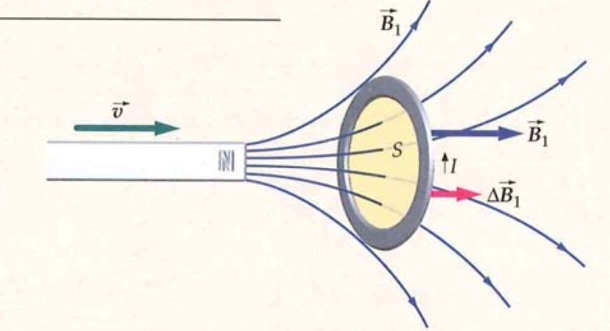


FIGURA 28.10

2. Dibujar un esquema del campo $\vec{B}_2$ que representa el campo magnético generado por la corriente inducida en la espira. Utilizar la forma alternativa de la ley de Lenz para determinar el sentido de $\vec{B}_2$. (Véase la figura 28.11.) $\vec{B}_2$ y $\Delta\vec{B}_1$ debe penetrar en S en direcciones opuestas para que la variación del flujo de $\vec{B}_2$ sea opuesta a la variación del flujo de $\vec{B}_1$:

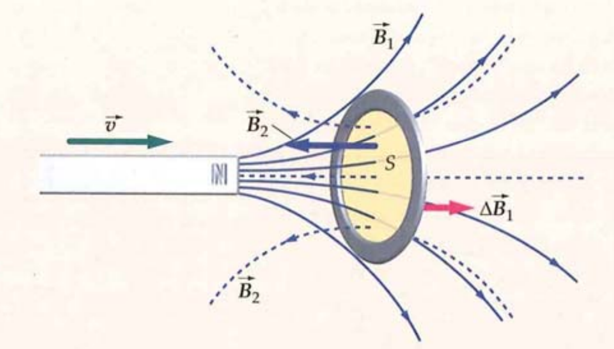


FIGURA 28.11

3. Teniendo en cuenta la regla de la mano derecha y el sentido de $\vec{B}_2$, determinar el sentido de la corriente inducida en la espira tal como se indica en la figura 28.12.

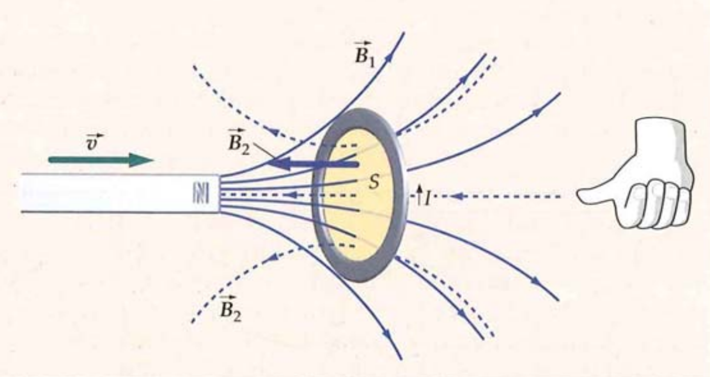


FIGURA 28.12

COMPROBACIÓN El resultado del paso 3 da la misma dirección que la obtenida en la página 995 con la ley de Lenz.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 28.1

Utilizando la forma alternativa de la ley de Lenz, determinar el sentido de la corriente inducida en la espira mostrada en la figura 28.8 cuando el imán se mueve hacia la izquierda alejándose de la espira.

En la figura 28.13, el imán está en reposo y la espira se mueve alejándose de él. En la figura se indican también la corriente inducida y el momento magnético. En este caso el imán atrae a la espira, según exige la ley de Lenz, oponiéndose al movimiento de ésta.

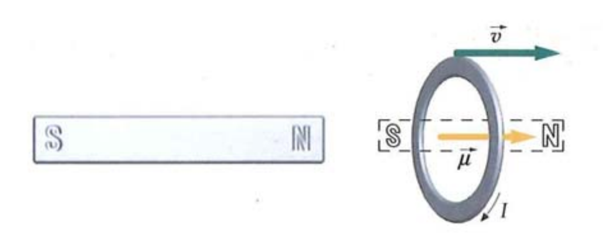
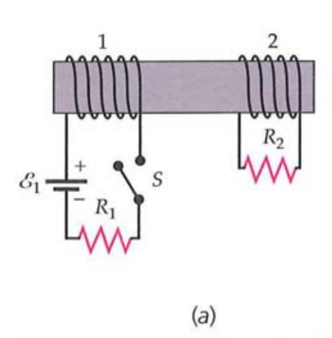
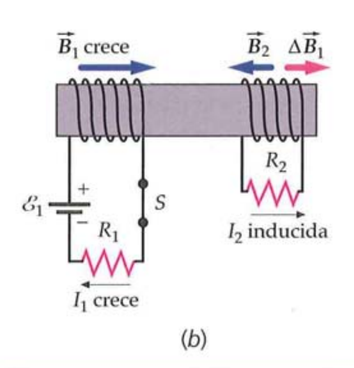


FIGURA 28.13 Cuando la espira se aleja de la barra magnética estacionaria, el imán atrae a la espira por el momento magnético inducido en ella, oponiéndose de nuevo al movimiento relativo.

En la figura 28.14, cuando se hace variar la corriente en el circuito 1, existe un cambio en el flujo que atraviesa el circuito 2. Supóngase que el interruptor S situado en el circuito 1 está inicialmente abierto y que, por ello, no hay corriente en este circuito (figura 28.14*a*). Cuando se cierra el interruptor (figura 28.14*b*), la corriente del circuito 1 no alcanza su valor estacionario $\mathcal{E}_1/R_1$ instantáneamente, sino que tarda un tiempo breve para variar desde cero a este valor final. Durante este tiempo, mientras la corriente está aumentado, el flujo del circuito 2 está variando y existe una corriente inducida en dicho circuito en el sentido indicado. Cuando la corriente del primer circuito alcance su valor estacionario, este flujo dejará de ser variable y no existirá ninguna corriente inducida en el circuito 2. Cuando se abra el interruptor del circuito 1 (figura 28.14*c*) y la corriente disminuya hasta cero, aparecerá momentáneamente en el circuito 2 una corriente inducida en sentido opuesto. Es importante tener muy en cuenta que existe una fem inducida *sólo mientras el flujo está variando*. La fem no depende del módulo del flujo, sino solamente de la rapidez con que se verifica el cambio. Un flujo estacionario grande a través de un circuito no produce una fem inducida.





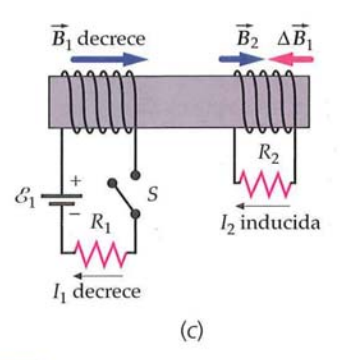


FIGURA 28.14 (*a*) Dos circuitos adyacentes. (*b*) En el momento de cerrar el interruptor, I_1 empieza a crecer en el sentido indicado. El flujo variable que atraviesa el circuito 2 induce una corriente I_2. El flujo que atraviesa el circuito 2 debido a I_2 se opone al aumento de flujo debido a I_1. (*c*) Cuando se abre el interruptor, I_1 disminuye y el flujo que atraviesa el circuito 2 varía. La corriente inducida I_2 tiende a mantener el flujo a través del circuito 2

En el siguiente ejemplo consideramos el circuito aislado sencillo que se muestra en la figura 28.15. Cuando existe una corriente en el circuito, se produce un flujo magnético a través de la bobina debido a su propia corriente. Cuando la corriente varía, el flujo en la bobina también varía y existe una fem inducida en el circuito. Esta *fem autoinducida* se opone a la variación de la corriente y se denomina **fuerza contra fem**. Debido a esta fem autoinducida, la corriente de un circuito no puede saltar instantáneamente desde cero hasta un valor finito o desde cierto valor determinado hasta cero. El primero que observó este efecto fue Henry, cuando experimentaba con un circuito compuesto por muchas vueltas de alambre como el de la figura 28.15. Este dispositivo proporciona un flujo grande a través del circuito incluso aunque la corriente sea pequeña. Joseph Henry observó la presencia de una chispa que saltaba en el interruptor cuando intentaba abrir el circuito. Esta chispa se debe a la gran fem inducida que se presenta cuando la corriente varía rápidamente, como sucede al abrir el interruptor. En este caso, la fem inducida intenta mantener la corriente original. La gran fem inducida produce una gran diferencia de potencial a través del interruptor cuando éste se abre. El campo eléctrico entre los bornes del interruptor es suficientemente grande para provocar la ruptura dieléctrica del aire. Cuando se da la ruptura dieléctrica, el aire conduce la corriente eléctrica en forma de chispa.

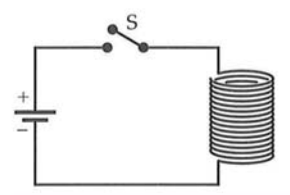


FIGURA 28.15 La bobina con muchas espiras de conductor origina un flujo grande con una corriente determinada en el circuito. La fem inducida en este circuito cuando la corriente varía se opone a dicha variación.

Ejemplo 28.6 Ley de Lenz y bobina en movimiento

Una bobina rectangular de N vueltas de anchura a y longitud b, donde $N = 80$, $a = 20$ cm y $b = 30$ cm, está situada en un campo magnético $B = 0{,}8$ T dirigido hacia dentro de la página (figura 28.16). Como indica la figura, sólo la mitad de la bobina se encuentra en la región del campo magnético. La resistencia R de la bobina es de 30 Ω. Determinar el módulo, dirección y sentido de la corriente inducida al desplazarse la bobina con una velocidad de 2 m/s (*a*) hacia la derecha, (*b*) hacia arriba y (*c*) hacia abajo.

N = 80 vueltas
a = 20,0 cm
b = 30,0 cm

FIGURA 28.16

PLANTEAMIENTO La corriente inducida es igual a la fem inducida dividida por la resistencia. La fem inducida en el circuito cuando se mueve la bobina puede calcularse a partir de la variación temporal del flujo a través de ésta. El flujo es proporcional a la distancia x. El sentido de la corriente se determina a partir de la ley de Lenz.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La corriente inducida es igual a la fem divida por la resistencia:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

2. El módulo de la fem inducida viene dada por la ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

3. El flujo a través de la bobina es N veces el que atraviesa cada vuelta de ésta. Elegimos la dirección del vector unitario $\hat{n}$. como la dirección hacia adentro de la página. El flujo a través de la superficie S de cada vuelta es Bax:

$$\phi_m = N\vec{B}\cdot\hat{n}A = N[Bax - (0)a(b - x)] = NBax$$

4. Cuando la bobina se mueve hacia la derecha (o hacia la izquierda), el flujo no cambia (hasta que la bobina sale de la región del campo magnético). La corriente es, por lo tanto, cero:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = 0$$

así tenemos que

$$I = \boxed{0}$$

(*b*) 1. Calcular la derivada del flujo respecto al tiempo cuando la bobina se mueve hacia arriba. En este caso, x aumenta, de modo que dx/dt es positiva:

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(NBax) = NBa\frac{dx}{dt}$$

2. Calcular el módulo de la corriente:

$$|I| = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{NBa|dx/dt|}{R} = \frac{(80)(0{,}800\text{ T})(0{,}200\text{ m})(2{,}00\text{ m/s})}{30{,}0\ \Omega} = 0{,}853\text{ A}$$

3. Cuando la bobina se mueve hacia arriba, el flujo $\vec{B}$ a través de S es creciente. La corriente inducida debe producir un campo magnético cuyo flujo a través de S tiende a compensar el aumento de flujo del campo externo que se produce según x aumenta. Esto implica que el producto escalar con el vector unitario $\hat{n}$ es negativo. Tal campo magnético en S se dirige hacia fuera de la página. Para producir un campo magnético en este sentido, la corriente inducida deberá ser antihoraria.

$$\boxed{I = 0{,}853\text{ A, en sentido antihorario}}$$

(*c*) Cuando la bobina se mueve hacia abajo, el flujo de $\vec{B}$ a través de S es decreciente. La corriente inducida debe producir un campo magnético cuyo flujo a través de S tiende a compensar la disminución del flujo del campo externo que se produce según x decrece. Esto implica que el producto escalar con el vector unitario $\hat{n}$ es positivo. Tal campo magnético en S se dirige hacia dentro de la página. Para producir un campo magnético en este sentido, la corriente inducida deberá ser horaria.

$$\boxed{I = 0{,}853\text{ A, en sentido horario}}$$

COMPROBACIÓN En la parte (*b*), el movimiento hacia arriba induce la corriente de tal forma que se produce una fuerza que se opone a este movimiento. Aplicando $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ (ecuación 26.4) al hilo de la parte superior del cuadro, la espira sufre una fuerza hacia abajo dado que la corriente es antihoraria. Este hecho concuerda con el resultado del problema de la parte (*b*).

OBSERVACIÓN En este ejemplo el campo magnético es estático, de forma que no existe campo eléctrico no conservativo. Por lo tanto, la fem no es el trabajo realizado por un campo eléctrico no conservativo. Este punto es analizado en la próxima sección.

28.4 FEM DE MOVIMIENTO

La fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético se denomina fem de movimiento. En general:

> Fem de movimiento es toda fem inducida por el movimiento de un conductor en un campo magnético.
>
> DEFINICIÓN: FEM DE MOVIMIENTO

Ejemplo 28.7 Carga total a través de una bobina que gira

Una pequeña bobina de N vueltas está localizada en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$, tal como se muestra en la figura 28.17. La bobina está conectada a un integrador de corriente (C.I.), que es un dispositivo usado para medir la carga total que pasa por la bobina. Determinar la carga que atraviesa la bobina si esta gira 180º alrededor del eje mostrado.

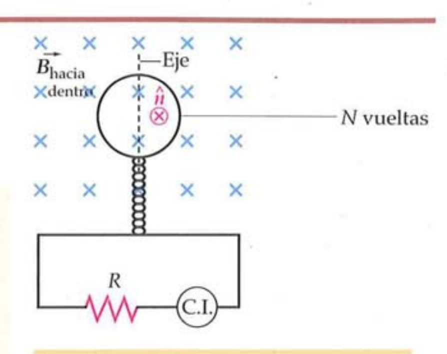


FIGURA 28.17

PLANTEAMIENTO Cuando la bobina de la figura 28.17 gira, el flujo del campo magnético a través de la bobina cambia, causando una fem inducida. La fem inducida a su vez origina una corriente $I = \mathcal{E}/R$, donde R es la resistencia del circuito. Como $I = dq/dt$, podemos calcular la carga Q que pasa a través del integrador utilizando $Q = \int I\, dt$.

SOLUCIÓN

1. El incremento de carga dq es igual a la corriente multiplicada por dt:
$$dq = I\,dt$$

2. La fem $\mathcal{E}$ se relaciona con la intensidad I mediante la ley de Ohm:
$$\mathcal{E} = RI$$
por lo tanto,
$$\mathcal{E}\,dt = RI\,dt$$

3. La fem se relaciona con el flujo ϕ_m por la ley de Faraday:
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$
o sea
$$\mathcal{E}\,dt = -d\phi_m$$

4. Sustituyendo $-d\phi_m$ por $\mathcal{E}\,dt$ y dq por $I\,dt$ en el paso 2 y despejando dq, resulta:
$$-d\phi_m = R\,dq$$
por lo tanto,
$$dq = -\frac{1}{R}\,d\phi_m$$

5. Integrar para calcular la carga total Q:
$$Q = \int_0^Q dq = -\frac{1}{R}\int_{\phi_{mi}}^{\phi_{mf}} d\phi_m = -\frac{1}{R}(\phi_{mf} - \phi_{mi}) = -\frac{\Delta\phi_m}{R}$$

6. El flujo a través de la bobina es $\phi_m = n\vec{B}\cdot\hat{n}A$, donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie plana encerrada por la bobina (figura 28.18). Inicialmente, la normal se dirige hacia dentro de la página. Cuando la bobina gira también lo hace obviamente la superficie y su vector normal. Determinar el cambio de flujo ϕ_m cuando la bobina gira 180º:
$$\Delta\phi_m = \phi_{mf} - \phi_{mi} = N\vec{B}\cdot\hat{n}_f A - N\vec{B}\cdot\hat{n}_i A$$
$$= NA(\vec{B}\cdot\hat{n}_f - \vec{B}\cdot\hat{n}_i) = NA[(-B) - (+B)] = -2NBA$$

$\vec{B}$ $\hat{n}_i$ — Antes de la rotación; $\vec{B}$ $\hat{n}_f$ — Después de la rotación

FIGURA 28.18

7. Combinando los resultados de los dos pasos previos se obtiene Q:
$$Q = \boxed{\frac{2NBA}{R}}$$

OBSERVACIÓN Obsérvese que la carga Q no depende de si la bobina gira lenta o rápidamente, lo único que importa es el cambio en el flujo magnético a través de la bobina. A esta bobina se le denomina bobina rotante y puede usarse para medir campos magnéticos. Por ejemplo, si el integrador de corriente (C.I.) mide una carga total Q pasando a través de la bobina cuando ésta está girando, entonces el módulo del campo magnético puede determinarse mediante la expresión $B = RQ/(2NA)$, que se puede obtener directamente del resultado del paso 7 del problema.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.3 Una bobina rotante de 40 vueltas, de radio 3 cm y resistencia 16 Ω está inicialmente localizada en un plano perpendicular a un campo magnético, uniforme y estático de 0,50 T. Si la bobina se gira 90º, ¿cuánta carga atraviesa la bobina?

La figura 28.19 muestra una varilla conductora que se desliza a lo largo de dos conductores que están unidos a una resistencia. Existe un campo magnético $\vec{B}$ uniforme dirigido hacia el papel.

Considérese un flujo magnético a través de la superficie plana S encerrada por el circuito. Sea $\hat{n}$ la normal a la superficie, un vector dirigido hacia dentro de la página. Como el área S se incrementa cuando la varilla se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través de dicha superficie crece también y, por lo tanto, se induce una fem en el circuito. Si llamamos ℓ a la distancia que separa a los conductores que sirven de raíles y x a la distancia desde el extremo izquierdo de los raíles a la varilla, el área S encerrada por el circuito es ℓx, y el flujo magnético es

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n} A = B_n A = B\ell x$$

Derivando con respecto del tiempo en ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

en donde $v = dx/dt$ es la velocidad de la barra. Por lo tanto, la fem inducida en este circuito es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B\ell v$$

donde el signo negativo significa que la fem se genera en la dirección tangencial negativa del circuito. Poniendo el dedo pulgar de la mano derecha en la dirección y el sentido del vector unitario $\hat{n}$ (hacia dentro de la página) y los otros dedos curvándose en la dirección positiva, es decir, la horaria, vemos que la fem inducida lleva el sentido antihorario.

Podemos comprobar este resultado, el del sentido de la fem inducida, mediante la ley de Lenz. El movimiento de la varilla hacia la derecha produce la corriente inducida de tal forma que la fuerza magnética (de Lorenz) sobre la varilla es hacia la izquierda. La fuerza de Lorentz en un conductor con corriente es $I\vec{L} \times \vec{B}$ (ecuación 26.4), donde $\vec{L}$ es un vector de longitud L que tiene el sentido de la corriente. Si $\vec{L}$ es hacia arriba, la fuerza es hacia la izquierda, lo cual confirma el resultado anterior (la corriente es antihoraria). Si la varilla se mueve inicialmente con una velocidad $\vec{v}$ hacia la derecha, la fuerza debida a la corriente inducida frena a la varilla hasta pararla. Para mantener el movimiento de la varilla, se necesita una fuerza externa empujando hacia la derecha.

Se puede realizar una segunda comprobación del sentido de la fem inducida considerando el sentido de la fuerza magnética sobre los portadores de carga moviéndose hacia la derecha con la varilla. La carga se mueve hacia la derecha con la misma velocidad $\vec{v}$ que la varilla, de tal forma que experimenta la fuerza de Lorenz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Si q es positiva, la fuerza es hacia arriba, lo cual implica que la fem inducida es antihoraria.

$$|\mathcal{E}| = B\ell v \qquad 28.7$$

MÓDULO DE LA FEM PARA UNA VARILLA QUE SE MUEVE PERPENDICULARMENTE A ELLA MISMA Y A $\vec{B}$

(Si el campo magnético no es perpendicular al plano del circuito, el campo B en la ecuación 28.7 se debe sustituir por la componente normal de B en el plano del circuito.)

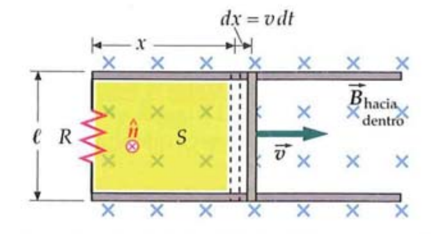


FIGURA 28.19 Varilla conductora deslizante sobre raíles conductores en el interior de un campo magnético. Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el área de la superficie S crece y el flujo magnético entrante al papel que la atraviesa se incrementa. En el circuito se induce una fem de magnitud $B\ell v$, produciéndose una corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual genera un flujo saliente del papel que se opone al cambio del flujo debido al movimiento de la varilla.

La figura 28.20 muestra un portador de carga positiva en una barra conductora que se mueve con velocidad constante a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia el papel. Como el portador de carga se mueve horizontalmente con la barra, actúa sobre él una fuerza magnética que tiene una componente hacia arriba de módulo qvB. Debido a esta fuerza magnética, los portadores de carga de la barra se mueven hacia arriba, lo que da lugar a una carga neta positiva en la parte superior de la barra y, por lo tanto, a una carga neta negativa en la parte inferior. Los portadores continúan desplazándose hacia arriba hasta que el campo eléctrico $\vec{E}_{\parallel}$ producido por las cargas separadas ejerce una fuerza hacia abajo de módulo $qE_{\parallel}$ sobre las cargas separadas que equilibra la fuerza magnética qvB. En el equilibrio, el módulo del campo eléctrico en la barra es, por lo tanto,

$$E_{\parallel} = vB$$

La dirección y el sentido de este campo eléctrico son paralelos a la barra y están dirigidos hacia abajo. La diferencia de potencial a través de la barra de longitud ℓ es

$$\Delta V = E_{\parallel}\ell = vB\ell$$

siendo el potencial mayor en la parte alta de la barra. Esto es, cuando no hay corriente atravesando la varilla, la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla es igual a $vB\ell$, que coincide con la fem de movimiento. Cuando hay corriente a través de la varilla, la diferencia de potencial es

$$\Delta V = vB\ell - Ir \qquad 28.8$$

donde r es la resistencia de la varilla.

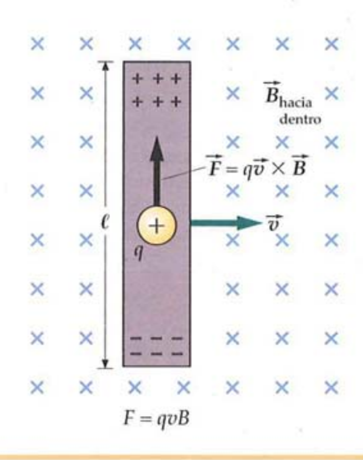


FIGURA 28.20 Un portador de carga en una barra conductora que se mueve a través de un campo magnético experimenta una fuerza magnética que tiene una componente hacia arriba. Los portadores de carga se desplazan hacia la parte alta de la barra, dejando negativa la parte baja de la misma. La separación de cargas produce un campo eléctrico de módulo $E_{\parallel} = vB$ hacia abajo. El potencial en la parte alta de la barra es mayor que en el fondo, siendo su diferencia $E_{\parallel}\ell = vB\ell$.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.4

Una barra de 40 cm de longitud se mueve a la velocidad de 12 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 0,30 T. Su vector velocidad es perpendicular a su longitud. Determinar la fem inducida en la barra.

Ejemplo 28.8 Un conductor en U y una varilla que se desliza sobre éste

Inténtelo usted mismo

En la figura 28.19, sea $B = 0,6$ T, $v = 8$ m/s, $\ell = 15$ cm y $R = 25\ \Omega$, y suponer que la resistencia de la barra y los raíles es despreciable. Determinar (*a*) la fem inducida en el circuito, (*b*) la intensidad de corriente del circuito, (*c*) la fuerza necesaria para mover la barra con velocidad constante y (*d*) la potencia disipada en la resistencia.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Calcular la fem inducida mediante la ecuación 28.7.	$\mathcal{E} = Bv\ell =$ **0,720 V**
2. Determinar la intensidad de corriente a partir de la ley de Ohm.	$I = \frac{\mathcal{E}}{R} =$ **28,8 mA**
3. La fuerza necesaria para desplazar la barra con velocidad constante es igual y opuesta a la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la barra, de módulo $IB\ell$ (ecuación 26.4). Calcular el módulo de esta fuerza.	$F = IB\ell =$ **2,59 mN**
4. Determinar la potencia disipada en la resistencia.	$P = I^2R =$ **20,7 mW**

COMPROBACIÓN Usando $P = Fv$, confirmamos que la potencia es 20,7 mW.

OBSERVACIÓN El potencial en la parte alta de la barra es mayor que el de la parte baja en una cantidad igual a la fem.

Ejemplo 28.9 Arrastre magnético

Una barra de masa m se desliza sin rozamiento sobre unos raíles conductores en una región de campo magnético constante B dirigido hacia la página (figura 28.21). Un agente externo empuja la barra manteniéndola a velocidad constante v_0 hacia la derecha. En el tiempo $t = 0$ se suprime súbitamente la fuerza externa y la barra se desacelera debido a la fuerza magnética. Determinar la velocidad v de la barra en función del tiempo.

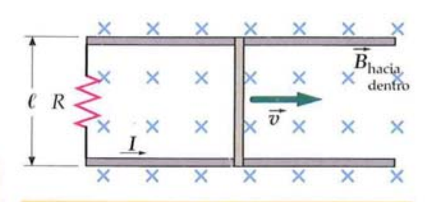


FIGURA 28.21

PLANTEAMIENTO La velocidad de la barra cambia porque una fuerza magnética actúa sobre la corriente inducida. El movimiento de la barra a través de un campo magnético induce una fem $\mathcal{E} = B\ell v$ y, por lo tanto, una corriente en la barra, $I = \mathcal{E}/R$. Esto hace que sobre la barra actúe una fuerza magnética, $F = I\ell B$ (ecuación 26.4). Conocida la fuerza, aplicamos la segunda ley de Newton para determinar la velocidad en función del tiempo. Tómese como positiva la dirección de la velocidad inicial.

SOLUCIÓN

1. Aplicar la segunda ley de Newton a la barra:
$$F_x = ma_x = m\frac{dv}{dt}$$

2. La fuerza ejercida sobre la barra es la fuerza magnética (ecuación 26.4), la cual es proporcional a la corriente y está dirigida en el sentido negativo de x (figura 28.21):
$$F_x = -I\ell B$$

3. La corriente es igual a la fem de movimiento dividida por la resistencia de la barra:
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

4. Con estos resultados determinar el módulo de la fuerza magnética ejercida sobre la barra:
$$F_x = -IB\ell = -\frac{B\ell v}{R}B\ell = -\frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

5. Según la segunda ley de Newton:
$$-\frac{B^2\ell^2 v}{R} = m\frac{dv}{dt}$$

6. Separar variables, integrar la velocidad desde v_0 hasta v_f y el tiempo de 0 a t_f:
$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}dt$$
$$\int_{v_0}^{v_f}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^{t_f}dt$$
$$\ln\frac{v_f}{v_0} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}t_f$$

7. Hacer $v = v_f$ y $t = t_f$, y despejar v:
$$v = \boxed{v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{donde } \tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}}$$

COMPROBACIÓN La energía cinética de la barra se transforma en energía térmica en la resistencia. Para conservar la energía, la energía cinética de la barra y, por consiguiente, su velocidad deberán decrecer. El resultado del paso 7 está de acuerdo con la conservación de la energía.

OBSERVACIÓN Si la fuerza fuera constante, la velocidad de la barra disminuiría linealmente con el tiempo. Sin embargo, como la fuerza es proporcional a la velocidad de la barra (paso 4), la fuerza es grande inicialmente, pero disminuye cuando la velocidad decrece. En principio, la barra no debería nunca cesar en su movimiento. Aun así, la barra se mueve sólo una distancia finita. (Véase el problema 37.)

GENERADORES Y MOTORES

La mayor parte de la energía eléctrica consumida hoy en día procede de los generadores eléctricos de corriente alterna (ac). Un **generador** simple de corriente alterna se construye con una bobina giratoria y un campo magnético uniforme tal como queda reflejado en la figura 28.22. Los extremos de la bobina se conectan a un anillo deslizante que gira con la bobina. El contacto eléctrico con la bobina se hace mediante un cepillo estacionario de grafito que debe estar en contacto con el anillo. Cuando la perpendicular al plano de la bobina $\hat{n}$ forma un ángulo θ con

el campo magnético uniforme $\vec{B}$, tal como se muestra en la figura, el flujo magnético a través de la bobina es

$$\phi_m = NBA\cos\theta \qquad 28.9$$

donde N es el número de vueltas de la bobina y A la superficie encerrada por ésta. Cuando la bobina gira mecánicamente, el flujo a través de ella varía y, como consecuencia, la fem se induce en la bobina de acuerdo con la ley de Faraday. Si el ángulo inicial entre $\hat{n}$ y $\vec{B}$ es cero, en un tiempo t, éste viene dado por

$$\theta = \omega t$$

donde ω es la velocidad angular de rotación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación 28.9, obtenemos

$$\phi_m = NBA\cos\omega t = NBA\cos 2\pi f t$$

La fem en la bobina es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -NBA\frac{d}{dt}\cos\omega t = \omega NBA \operatorname{sen}\omega t \qquad 28.10$$

Esto se puede escribir

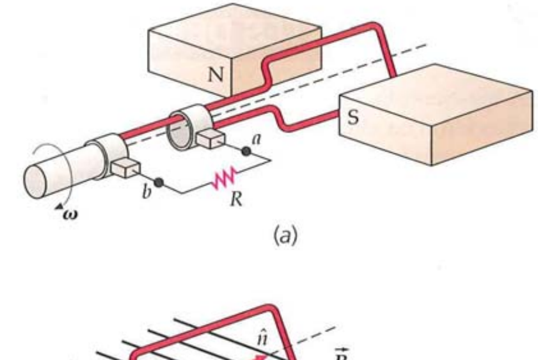
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{máx} \operatorname{sen}\omega t$$

donde

$$\mathcal{E}_{máx} = \omega NBA$$

es el máximo valor de la fem. Si giramos la bobina con una velocidad angular constante en el seno de un campo magnético se produce una fem sinusoidal. De esta forma, la energía mecánica de rotación se convierte en energía eléctrica. Es bastante usual que la energía mecánica se obtenga mediante la caída de corrientes de agua sobre una turbina. Aunque los generadores, en la práctica, son considerablemente más complejos, su funcionamiento se basa en el mismo principio, es decir, una fem alterna se produce mediante la rotación de una bobina en el seno de un campo magnético; y el dispositivo se diseña de tal forma que genere una fem sinusoidal.

La misma bobina en un campo magnético que genera la corriente alterna puede usarse como **motor** ac. En lugar de utilizar energía mecánica de rotación para producir fem ac, podemos aplicar un motor ac a la bobina procedente de otro generador, tal como se muestra en la figura 28.23. (En el circuito de la figura el generador ac se representa por el símbolo ⓥ.) Una espira por la que circula una corriente y que está en un campo magnético experimenta una fuerza cuyo momento le genera una rotación, de tal forma que el momento magnético $\vec{\mu}$ de la espira tiende a colocarse paralelo al campo magnético exterior a ella y el plano que la contiene es perpendicular a $\vec{B}$. Si la corriente le fuera aportada a la bobina tal como muestra la figura 28.23, el momento de la fuerza sobre la bobina modificaría la dirección cuando pasase por su posición de equilibrio que es cuando adquiere la posición vertical en la figura. La bobina oscilaría alrededor de su posición de equilibrio, eventualmente viniendo a quedar sobre el plano vertical. Sin embargo, si la dirección de la corriente se invirtiera en el momento en el que la bobina pasa por la posición vertical, el momento de la fuerza no cambiaría la dirección pero continuaría girando en la misma dirección. Como la bobina gira en un campo magnético, se genera una fuerza contraelectromotriz que tiende a oponerse a la corriente. Cuando el motor está en marcha, no hay fuerza contraelectromotriz y la corriente es intensa quedando limitada por la resistencia del circuito. Cuando el motor empieza a girar, la fuerza contraelectromotriz crece y la corriente decrece.



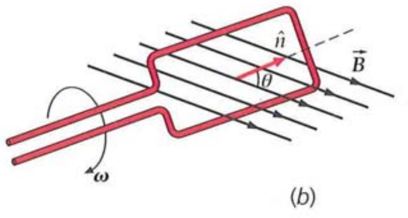


FIGURA 28.22 (*a*) Un generador ac. Una bobina girando con velocidad angular constante en un campo magnético *B* crea una fem sinusoidal. La energía procede de una central hidroeléctrica o una turbina de vapor que se utilizan para hacer girar la bobina y producir energía. La fem se envía a un circuito externo por un contacto ("cepillo") que a su vez lo está con un anillo deslizante. (*b*) En un instante, la perpendicular al plano de la bobina forma un ángulo θ con el campo magnético y, en consecuencia, el flujo magnético es BA sen θ.

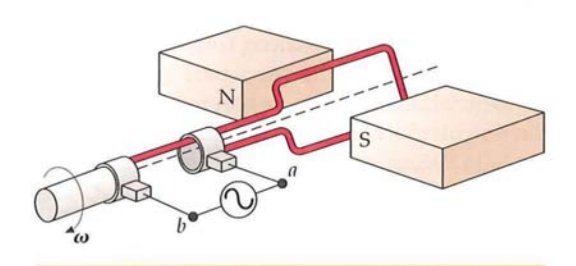


FIGURA 28.23 Cuando se suministra una corriente alterna a la bobina (de la figura 28.22), ésta se convierte en un motor. Según gira la bobina, se genera una fuerza contraelectromotriz que limita la corriente.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.5

Una bobina de 250 espiras y con una superficie por espira de 3,0 cm² gira a 60 rev/s en un campo magnético de 0,40 T a 60 Hz. ¿Cuál es la máxima fem generada por la bobina?



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 28.2

Cuando un generador envía energía eléctrica a un circuito, ¿de dónde procede la energía?

28.5 CORRIENTES DE FOUCAULT O TURBILLONARIAS

En los ejemplos anteriores, las corrientes producidas por un flujo variable se establecieron en alambres delgados o barras. Frecuentemente, un flujo variable establece unas corrientes circulantes, denominadas corrientes de Foucault o turbillonarias, en un trozo de metal como el núcleo de un transformador. El calor producido por estas corrientes constituye una pérdida de potencia en el transformador. Consideremos un bloque conductor entre las piezas polares de un electroimán como indica la figura 28.24. Si el campo magnético $\vec{B}$ entre las piezas polares varía con el tiempo (como sucede si la corriente de los arrollamientos del imán es una corriente alterna), el flujo que atraviesa cualquier circuito cerrado en el bloque, como el indicado por la curva C en la figura, será un flujo variable. Como la curva C pertenece a un conductor, se inducirá una fem alrededor de C.

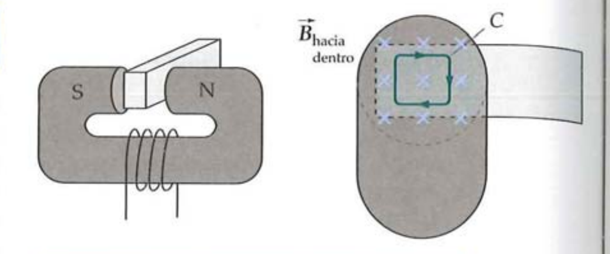


FIGURA 28.24 Corrientes turbillonarias o de Foucault. Si el campo magnético a través de un metal varía, se induce una fem en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal como la curva C indicada. Las fem inducidas producen corrientes llamadas turbillonarias.

La existencia de corrientes de Foucault se puede demostrar sacando una lámina de cobre o de aluminio que está situada entre los polos de un imán permanente intenso (figura 28.25). Parte del área encerrada por la curva C en esta figura está en el interior del campo magnético y otra parte es exterior al mismo. Cuando se tira de la lámina hacia la derecha, el flujo a través de esta curva disminuye (admitiendo que el flujo dirigido hacia el papel es positivo) y se induce una fem en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de esta curva. Esta fem produce una corriente que está dirigida hacia arriba en la región situada entre las piezas polares, y el campo magnético ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda sobre esta corriente, que se opone al movimiento de la lámina. Se puede apreciar esta fuerza sobre la lámina si se intenta tirar rápidamente de ella a través de un campo magnético fuerte.

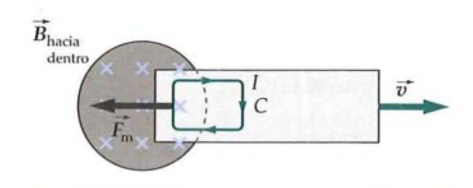


FIGURA 28.25 Demostración de las corrientes turbillonarias. Cuando el bloque metálico se empuja hacia la derecha, existe una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la corriente inducida que se opone al movimiento.

Las corrientes circulantes o corrientes de Foucault normalmente son molestas debido a que el calor producido no solamente constituye una pérdida de potencia sino que además hay que disiparlo transfiriéndolo al medio ambiente. La pérdida de potencia puede reducirse aumentando la resistencia de los caminos posibles que han de seguir las corrientes de Foucault, como se ven en la figura 28.26*a*. En este caso, el bloque conductor está en forma de láminas, es decir, formado por unas tiras pequeñas pegadas juntas. Debido al pegamento aislante que separa las tiras, las corrientes de Foucault están confinadas esencialmente a ellas. Se han roto, por lo tanto, los grandes circuitos por donde pueden circular las corrientes de Foucault y se reduce en gran manera la pérdida de potencia. Si la lámina está recortada, como se ve en la figura 28.26*b*, para reducir las corrientes de Foucault, será también muy reducida la fuerza que se observe.

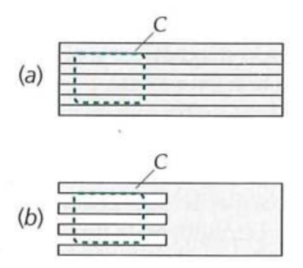


FIGURA 28.26 Las corrientes de Foucault en un bloque de metal pueden reducirse obstruyendo las trayectorias de conducción. (*a*) Si el bloque se construye con láminas de metal pegadas conjuntamente, la resistencia del pegamento aumenta la resistencia del bucle C. (*b*) Recortando el metal como se indica, también se reducen las corrientes turbillonarias.

Las corrientes turbillonarias no son siempre perjudiciales. Por ejemplo, se utilizan a menudo para amortiguar oscilaciones molestas. Así, las balanzas mecánicas muy sensibles, si no poseen un sistema de amortiguamiento, al pesar una masa pequeña oscilan muchas veces antes de alcanzar el equilibrio. Para evitar esto, estas balanzas se diseñan de modo que una pequeña pieza de aluminio (o de otro metal) se mueve entre los polos de un imán mientras la balanza oscila. Las corrientes de Foucault resultantes amortiguan las oscilaciones de modo que el equilibrio se alcanza rápidamente. Otro ejemplo es el frenado magnético de algunos vagones de transporte rápido. Estos vagones poseen un gran electroimán en posición sobre los raíles. Cuando se envía corriente al electroimán, se inducen corrientes de Foucault en los raíles debido al movimiento del imán y las fuerzas magnéticas proporcionan una fuerza de arrastre al vagón que lo frena.

28.6 INDUCTANCIA

AUTOINDUCCIÓN

Consideremos una bobina por la que circula una corriente I. La corriente produce un campo magnético $\vec{B}$ que varía de un punto a otro, pero en todos los puntos $\vec{B}$ es proporcional a I. El flujo magnético a través de la bobina, por lo tanto, es también proporcional a I:

$$\phi_{\text{m}} = LI \qquad 28.11$$

DEFINICIÓN: AUTOINDUCCIÓN

donde L es una constante llamada autoinducción de la bobina. La autoinducción depende de la forma geométrica de la bobina. La unidad del SI de inductancia es el **henry** (H) y según la ecuación 28.11 es igual a la unidad de flujo, el weber, dividido por la unidad de intensidad de corriente, el ampere:

$$1\text{ H} = 1\text{ Wb/A} = 1\text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{A}$$

En principio, la autoinducción de cualquier bobina o circuito puede calcularse suponiendo la existencia de una corriente I, determinando $\vec{B}$ en cada punto de una superficie encerrada por la bobina, calculando el flujo ϕ_m, y usando la ecuación $L = \phi_m/I$. En la práctica, el cálculo es muy difícil. Sin embargo, la autoinducción de un solenoide enrollado apretadamente puede calcularse directamente. El campo magnético en un solenoide de estas características, de longitud ℓ y N vueltas que transporta una corriente I fue calculado en el ejemplo 28.1 y, por tanto, el flujo sería:

$$\phi_m = NBA = \mu_0 N(\mu_0 nI)A = \frac{\mu_0 N^2 IA}{\ell} = \mu_0 n^2 IA\ell \qquad 28.12$$

donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. Como es lógico, el flujo es proporcional a la intensidad de corriente I. La constante de proporcionalidad es la autoinducción

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A\ell \qquad 28.13$$

AUTOINDUCCIÓN DE UN SOLENOIDE

La autoinducción es proporcional al cuadrado del número de vueltas por unidad de longitud n y al volumen $A\ell$. Así pues, lo mismo que la capacidad, la autoinducción depende sólo de factores geométricos.* De acuerdo con las dimensiones de la ecuación 28.13, μ_0 puede expresarse en henrys por metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m}$$

Ejemplo 28.10 Autoinducción de un solenoide

Determinar la autoinducción de un solenoide de longitud 10 cm, área 5 cm², y 100 vueltas.

PLANTEAMIENTO Podemos calcular la autoinducción en henrys mediante la ecuación 28.13.

SOLUCIÓN

1. L viene expresada por la ecuación 28.13: $L = \mu_0 n^2 A\ell$

2. Convertir las magnitudes conocidas en unidades del SI:
$\ell = 10{,}0\text{ cm} = 0{,}100\text{ m}$
$A = 5{,}00\text{ cm}^2 = 5{,}00 \times 10^{-4}\text{ m}^2$
$n = N/\ell = (100\text{ vueltas})/(0{,}100\text{ m}) = 1000\text{ vueltas/m}$
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m}$

3. Sustituir estos valores en L:
$L = \mu_0 n^2 A\ell$
$= (4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m})(1000\text{ vueltas/m})^2(5{,}00 \times 10^{-4}\text{ m}^2)(0{,}100\text{ m})$
$= \boxed{6{,}28 \times 10^{-5}\text{ H}}$

COMPROBACIÓN La inductancia de un solenoide sin núcleo de hierro debe ser menor que un henry, como es el caso del solenoide del ejemplo.

* Si el inductor tiene un núcleo de hierro, la autoinducción también depende de las propiedades de este núcleo.

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo magnético debido a la corriente también se modifica y, por lo tanto, en el circuito se induce una fem. Como la autoinducción del circuito es constante, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad 28.14$$

FUERZA ELECTROMOTRIZ AUTOINDUCIDA

Así pues, la fem autoinducida es proporcional a la variación con el tiempo de la intensidad de corriente. Una bobina o solenoide con suficientes vueltas para tener alta autoinducción se denomina **inductor**. En los circuitos se representa con el símbolo ⌒ʘʘʘ⌒. Generalmente, podemos despreciar la autoinducción del resto del circuito comparado con la de un inductor. La diferencia de potencial entre los extremos de un inductor viene dada por

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = -L\frac{dI}{dt} - Ir \qquad 28.15$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE LOS EXTREMOS DE UN INDUCTOR

donde r es la resistencia interna del inductor.* Para un inductor ideal, $r = 0$.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.6

Determinar el valor de la variación con el tiempo de la intensidad de corriente del ejemplo 28.10 para inducir una fem de 20,0 V.

INDUCTANCIA MUTUA

Cuando dos o más circuitos están próximos uno al otro, como indica la figura 28.27, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no sólo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por los circuitos próximos. Sea I_1 la corriente en el circuito 1 de la izquierda de la figura 28.27 e I_2 la del circuito 2 de la derecha. El campo magnético $\vec{B}$ en la superficie S_2 es la superposición de $\vec{B}_1$ debido a I_1 y $\vec{B}_2$ debido a I_2, siendo B_1 proporcional a I_1 (y B_2 proporcional a I_2). Por lo tanto, podemos expresar el flujo de $\vec{B}_1$ que atraviesa el circuito 2, $\phi_{m2,1}$ como

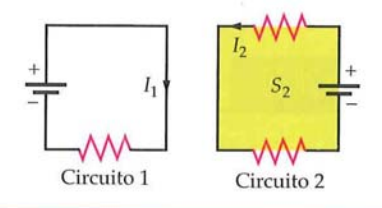


FIGURA 28.27 Dos circuitos adyacentes. El campo magnético en S_2 se debe parcialmente a la corriente I_1 y parcialmente a I_2. El flujo a través de cualquiera de los circuitos es la suma de dos términos, uno proporcional a I_1 y el otro a I_2.

$$\phi_{m1\,2} = M_{1\,2}I_1 \qquad 28.16a$$

DEFINICIÓN: INDUCTANCIA MUTUA

donde $M_{1\,2}$ es la inductancia mutua de los dos circuitos. La inductancia mutua depende de la disposición geométrica entre ambos. En particular, podemos ver que si los circuitos están bastante separados, el flujo de $\vec{B}_1$ a través del circuito 2 será pequeño y la inductancia mutua también lo será. (El flujo neto ϕ_{m2} de $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ que atraviesa el circuito 2 es $\phi_{m2} = \phi_{m1\,2} + \phi_{m2\,2}$.) Puede escribirse una ecuación semejante a la 28.16a para el flujo de $\vec{B}_2$ que atraviesa el circuito 1:

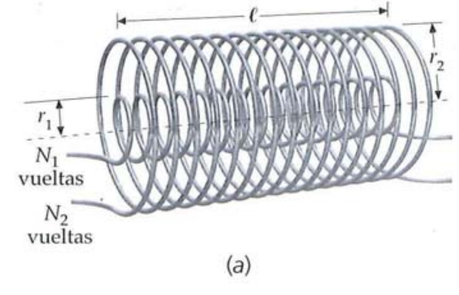
$$\phi_{m2\,1} = M_{21}I_2 \qquad 28.16b$$

Podemos calcular la inductancia mutua de dos solenoides concéntricos de espiras apretadas como los que se muestran en la figura 28.28. Sea ℓ la longitud común de ambos solenoides y supongamos que el solenoide interior tiene N_1 vueltas y radio r_1 y que el solenoide exterior tiene N_2 vueltas y radio r_2. Calcularemos primero la inductancia mutua $M_{2,1}$ suponiendo que el solenoide interior transporta una corriente I_1 y determinando el flujo magnético ϕ_{m2} debido a esta corriente a través del solenoide exterior.

* Si el inductor tiene un núcleo de hierro, la resistencia interna incluye las propiedades de este núcleo.

El campo magnético $\vec{B}_1$ debido a la corriente del solenoide interno es constante en su espacio interior y su valor es

$$B_1 = \mu_0(N_1/\ell)I_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad r < r_1 \qquad 28.17$$

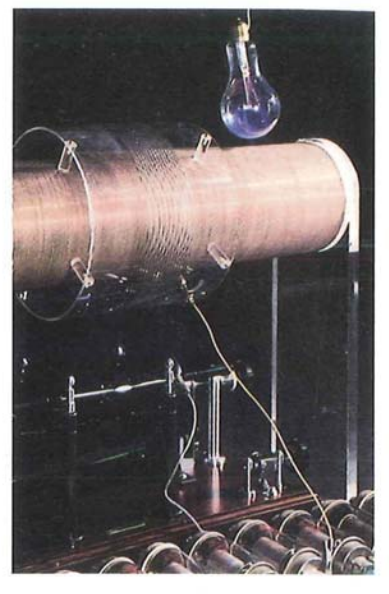


Fuera del solenoide interno, el campo magnético B_1 es despreciable. El flujo de $\vec{B}_1$ que atraviesa el solenoide externo debido a este campo magnético es, por lo tanto,

$$\phi_{m2} = N_2 B_1(\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1(\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 \ell(\pi r_1^2) I_1$$

Obsérvese que el área utilizada para calcular el flujo que atraviesa el solenoide exterior no es el área de dicho solenoide, πr_2^2, sino el área del solenoide interior πr_1^2, ya que el campo magnético debido al solenoide interior es cero fuera del mismo. La inductancia mutua es, por lo tanto,

$$M_{12} = \frac{\phi_{m12}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2 \qquad 28.18$$



(b)

FIGURA 28.28 (*a*) Un solenoide largo y estrecho se encuentra dentro de otro más ancho de igual longitud. Una corriente en uno de los solenoides produce flujo magnético en el otro. (*b*) Carrete de Tesla que ilustra la geometría de los cables del apartado (*a*). Este dispositivo funciona como un transformador (capítulo 29). La corriente alterna de bajo voltaje del arrollamiento exterior se transforma en una corriente alterna de mayor voltaje en el arrollamiento interior. La fem alterna inducida en la bobina interior por la corriente variable de la bobina exterior es suficientemente grande para encender la bombilla situada encima de las bobinas. ((*b*) © *Michael Holford, Collection of the Science Museum, London.*)

PROBLEMA PRÁCTICO 28.7

Calcular la inductancia mutua M_{21} de los solenoides concéntricos de la figura 28.28 determinando el flujo a través del solenoide interno debido a una corriente I_2 en el solenoide externo.

Obsérvese en el ejercicio anterior que $M_{12} = M_{21}$. Puede demostrarse que este es un resultado general. Por ello, prescindiremos de los subíndices de la inductancia mutua y escribiremos simplemente M.

28.7 ENERGÍA MAGNÉTICA

Un inductor almacena energía magnética, del mismo modo que un condensador almacena energía eléctrica. Consideremos el circuito formado por una inductancia L y una resistencia R en serie con una batería de fem $\mathcal{E}_0$ y un interruptor S, como se muestra en la figura 28.29. Se supone que R y L son la resistencia e inductancia del circuito completo. El interruptor está inicialmente abierto, de modo que no pasa corriente por el circuito. Poco después se cierra el interruptor y aparece una corriente I en el circuito, una caída de potencial $-IR$ a través de la resistencia y una diferencia de potencial $-L\,dI/dt$ en el inductor. (En un inductor de resistencia despreciable, la diferencia de potencial entre sus extremos es igual a la fuerza contraelectromotriz, la cual se expresa en la ecuación 28.14.) Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff en este circuito, resulta

$$\mathcal{E}_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad 28.19$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por la intensidad de corriente I, resulta

$$\mathcal{E}_0 I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt} \qquad 28.20$$

El término $\mathcal{E}_0 I$ es la potencia suministrada por la batería. El término I^2R es la energía potencial por unidad de tiempo que incide en la resistencia. (También es la potencia disipada en forma de calor en la resistencia del circuito.) El término $LI\,dI/dt$ representa la energía que por unidad de tiempo incide en el inductor. Entonces, si U_m es la energía en el inductor, se verifica

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

o también,

$$dU_m = LI\,dI$$

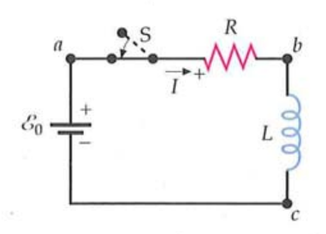


FIGURA 28.29 Inmediatamente después de cerrado el interruptor S, la corriente comienza a crecer en este circuito y una fuerza contraelectromotriz de módulo $L\,dI/dt$ se genera en el inductor. La caída de potencial a través de la resistencia IR, más la caída de potencial a través del inductor $L\,dI/dt$, es igual a la fem de la batería.

* El transformador se trata en el capítulo 29.

Integrando esta ecuación, resulta:

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 + C$$

donde C es una constante de integración. Para obtener C, igualamos U_m a cero cuando I es igual a cero. La energía almacenada en un inductor que transporta una corriente I viene dada por

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \qquad 28.21$$

ENERGÍA ALMACENADA EN UN INDUCTOR

En el proceso de producir una corriente en un inductor, se crea un campo magnético en el espacio interior de su bobina. Es decir, podemos imaginar que la energía almacenada en un inductor es energía almacenada en el campo magnético creado. En el caso especial de un solenoide largo, el campo magnético está relacionado con la corriente I y el número de vueltas por unidad de longitud n por

$$B = \mu_0 nI$$

y la autoinducción viene expresada por la ecuación 28.13:

$$L = \mu_0 n^2 A\ell$$

en donde A es el área transversal y ℓ la longitud. Sustituyendo I por $B/\mu_0 n$ y L por $\mu_0 n^2 A\ell$ en la ecuación 28.21, resulta

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 A\ell\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}A\ell$$

La magnitud $A\ell$ es el volumen del espacio contenido dentro del solenoide, donde se crea el campo magnético. La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía magnética** u_m:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad 28.22$$

DENSIDAD DE ENERGÍA MAGNÉTICA

Aunque está ecuación se ha obtenido para el caso especial del campo magnético en un solenoide largo, el resultado es general. Es decir, siempre que exista un campo magnético en el espacio, la energía magnética por unidad de volumen viene dada por la ecuación 28.22. Obsérvese la semejanza con la densidad de energía eléctrica en un campo eléctrico (ecuación 24.9):

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Ejemplo 28.11 Densidad de energía electromagnética

Cierta región del espacio contiene un campo magnético de 0,020 T y un campo eléctrico de $2{,}5 \times 10^6$ N/C. Determinar (*a*) la densidad de energía electromagnética y (*b*) la energía en una caja cúbica de lado $\ell = 12$ cm.

PLANTEAMIENTO La densidad de energía total u es la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética, $u = u_e + u_m$. La energía en un volumen V viene dada por $U = u\mathcal{V}$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular la densidad de energía eléctrica:

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$
$$= \frac{1}{2}(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(2{,}50 \times 10^6\ \mathrm{N/C})^2$$
$$= 27{,}7\ \mathrm{J/m^3}$$

2. Calcular la densidad de energía magnética: $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0{,}0200\ \text{T})^2}{2(4\pi \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2)} = 159\ \text{J/m}^3$

3. La densidad de energía total es la suma de las dos contribuciones anteriores: $u = u_e + u_m = 27{,}7\ \text{J/m}^3 + 159\ \text{J/m}^3 = \boxed{187\ \text{J/m}^3}$

(*b*) La energía total en la caja es $U = u\mathcal{V}$, donde $\mathcal{V} = \ell^3$ es el volumen de la caja: $U = u\mathcal{V} = u\ell^3 = (187\ \text{J/m}^3)(0{,}120\ \text{m})^3 = \boxed{0{,}323\ \text{J}}$

*28.8 CIRCUITOS *RL*

Un circuito que contiene una resistencia y un inductor tal como el indicado en la figura 28.29 se denomina **circuito *RL***. Como a temperatura ambiente todos los circuitos contienen resistencia y autoinducción, el análisis de un circuito *RL* puede aplicarse en cierta extensión a todo circuito.*

Para el circuito de la figura 28.29, la aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff nos dio:

$$\mathcal{E}_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad 28.19$$

Podemos entender muchas de las características de la corriente en este circuito a partir de la ecuación anterior sin necesidad de resolverla. Inicialmente (justo después de cerrar el interruptor) la corriente es nula, de modo que IR es cero y $L\,dI/dt$ es igual a la fem de la batería, $\mathcal{E}_0$. Haciendo $I = 0$ en la ecuación 28.19, resulta

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{I=0} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \qquad 28.23$$

Cuando la corriente crece, IR crece también y dI/dt disminuye. Obsérvese que la corriente no puede saltar súbitamente de cero a un valor finito como lo haría si no tuviera inductancia. Cuando la inductancia L no es despreciable, dI/dt es finita y, por lo tanto, la corriente debe ser continua en el tiempo. En un tiempo breve, la corriente alcanza un valor positivo I, y su variación con el tiempo es

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0 - IR}{L}$$

En este momento la corriente es todavía creciente, pero su ritmo de crecimiento es menor que en el instante $t = 0$. El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo dI/dt igual a cero. El valor final de la corriente es, por lo tanto,

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \qquad 28.24$$

La figura 28.30 muestra la variación de la corriente en este circuito en función del tiempo. Esta figura es semejante a la que representa la variación de la carga en un condensador cuando éste se carga en un circuito *RC* (figura 25.45).

La ecuación 28.19 tiene la misma forma que la ecuación 25.38 correspondiente a la carga de un condensador y puede resolverse de igual modo, es decir, separando variables e integrando. El resultado es

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = I_f(1 - e^{-t/\tau}) \qquad 28.25$$

donde $I_f = \mathcal{E}_0/R$ es la corriente cuando $t \to \infty$,

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad 28.26$$

es la **constante de tiempo** del circuito. Cuanto mayor es la autoinducción L o menor la resistencia R, más tiempo exige el establecimiento de una fracción determinada de la corriente final I_f.

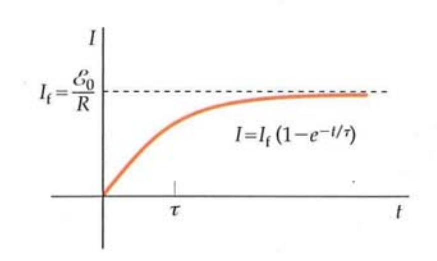


FIGURA 28.30 Variación de la intensidad de corriente en función del tiempo en un circuito *LR*. En el instante $t = t = L/R$, la corriente es igual al 63% de su valor máximo $\mathcal{E}_0/R$.

* Todos los circuitos tienen también capacidades entre partes del mismo a potenciales diferentes. Incluiremos los efectos de la capacidad en el capítulo 29, cuando estudiemos circuitos de ac. Ahora se desprecia la capacidad con objeto de simplificar el análisis y resaltar los efectos de la inductancia.

Ejemplo 28.12 Dando energía a una bobina

Una bobina de autoinducción 5 mH y una resistencia de 15,0 Ω se sitúa entre los terminales de una batería de 12 V de resistencia interna despreciable. (*a*) ¿Cuál es la corriente final? (*b*) ¿Cuál es la constante de tiempo? (*c*) ¿Cuánto tiempo (medido en constantes de tiempo) debe transcurrir para que la corriente alcance el 99% de su valor final?

PLANTEAMIENTO La intensidad de corriente final es la intensidad de corriente cuando $dI/dt = 0$, expresada por la ecuación 28.22. La corriente en función del tiempo viene dada por la ecuación 28.25, $I = I_f(1 - e^{-t/\tau})$, donde $\tau = L/R$.

SOLUCIÓN

(*a*) Utilizar la ecuación 28.19 para determinar la corriente final, I_f:

$$\mathcal{E}_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathcal{E}_0 - I_f R - 0 = 0$$

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{12{,}0\ \text{V}}{15{,}0\ \Omega} = \boxed{0{,}800\ \text{A}}$$

(*b*) Calcular la constante de tiempo τ:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5{,}00 \times 10^{-3}\text{H}}{15{,}0\ \Omega} = \boxed{333\ \mu\text{s}}$$

(*c*) Utilizar la ecuación 28.25 para calcular el tiempo t para el cual $I = 0{,}99\ I_f$:

$$I = I_f(1 - e^{-t/\tau}),$$

así

$$e^{-t/\tau} = \left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

Entonces,

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right) = -\tau \ln(1 - 0{,}990)$$

$$= -\tau \ln(0{,}010) = \tau \ln 100 = \boxed{4{,}61\tau}$$

COMPROBACIÓN En un tiempo equivalente a cinco constantes de tiempo, la corriente es del orden del 1% de su valor final. Esto es consistente con el resultado del ejemplo 25.18 donde se encontró que después de cinco constantes de tiempo, la carga de un condensador era menor del 1% de su valor inicial cuando se está descargando.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.8
¿Cuánta energía se almacena en este inductor cuando se obtiene la corriente final?

En la figura 28.31, el circuito posee un interruptor adicional (mostrado en la figura 28.32) que nos permite eliminar la batería del circuito sin interrumpir la corriente que circula por el inductor, y una resistencia adicional R_1 para proteger a la batería, de modo que no resulte cortocircuitada cuando el interruptor hace contacto. Si el interruptor está en la posición *e*, la batería, el inductor y las dos resistencias se encuentran conectadas en serie, y la corriente crece en el circuito del modo que acabamos de analizar, excepto en que ahora la resistencia total es $R_1 + R$ y la corriente final $\mathcal{E}_0/(R + R_1)$. Supongamos que el polo del interruptor ha permanecido en la posición *e* durante un tiempo largo, de modo que la corriente es aproximadamente estacionaria en su valor final, que llamaremos I_0. En el tiempo $t = 0$ movemos rápidamente el polo a la posición *f* (para eliminar la batería de cualquier consideración). Tenemos ahora un circuito que tiene sólo una resistencia y una bobina (malla *abcdfa*) sobre las cuales circula una corriente inicial I_0. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito, resulta

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

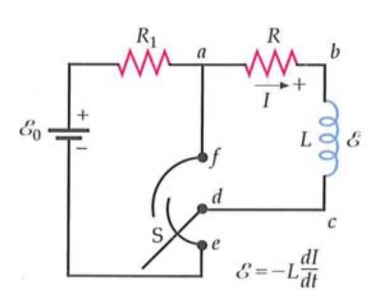


FIGURA 28.31 Un circuito *RL* con un interruptor que interrumpe el paso de corriente antes de cambiar el contacto, para que la batería pueda eliminarse del circuito sin interrumpir la corriente que circula por la bobina. Después de que la corriente de la bobina alcanza su valor máximo estando el polo en contacto con *e*, éste se mueve rápidamente hacia la posición *f*.

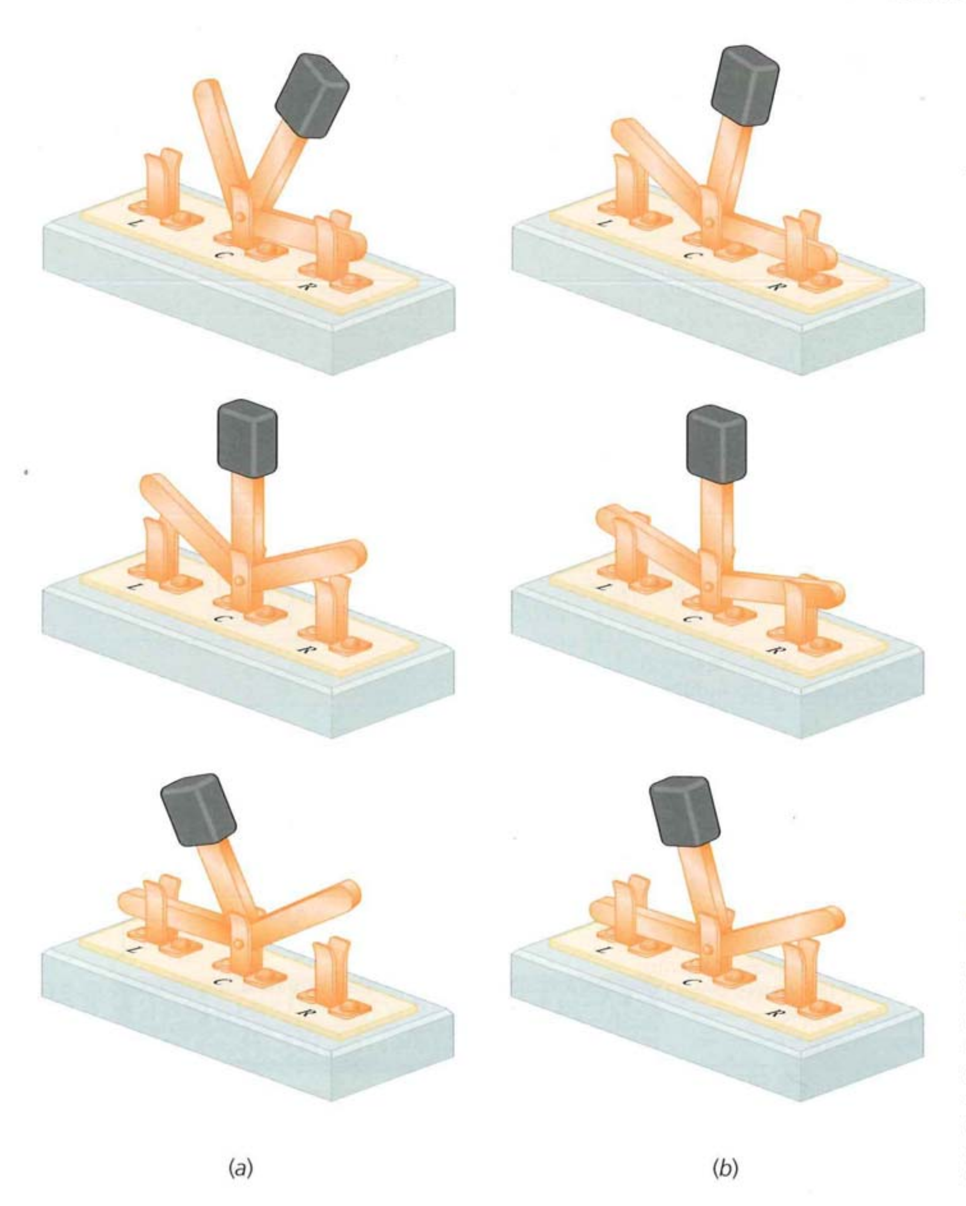


FIGURA 28.32 (*a*) El interruptor estándar de polo simple y doble contacto de la figura interrumpe el paso de corriente antes de cambiar de uno a otro contacto. (*b*) Este interruptor que también es de polo simple con doble contacto no interrumpe el paso de corriente al pasar de uno a otro contacto, de tal forma que cuando está en posición intermedia, el interruptor mantiene contacto eléctrico con las posiciones *L* y *R*.

Reajustando esta ecuación para separar las variables *I* y *t*, se obtiene

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt \qquad 28.27$$

La ecuación 28.27 es de la misma forma que la ecuación 25.34 correspondiente a la descarga de un condensador. Integrando y despejando *I*, se llega a

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \qquad 28.28$$

en donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo. La figura 28.33 muestra la corriente en función de tiempo.

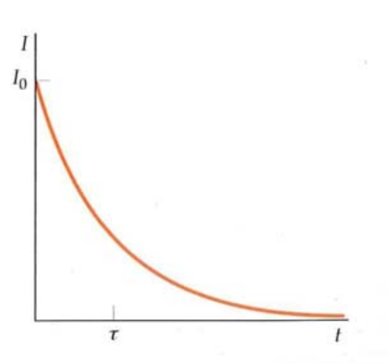


FIGURA 28.33 Intensidad de corriente en función del tiempo para el circuito de la figura 28.31. La corriente decrece exponencialmente con el tiempo.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.9

Determinar la constante de tiempo de un circuito de resistencia 85 Ω e inductancia 6 mH.

Ejemplo 28.13 Energía disipada

Determinar la energía disipada en la resistencia R de la figura 28.31 cuando la corriente que circula por el inductor disminuye desde su valor inicial I_0 hasta 0.

PLANTEAMIENTO La energía disipada por unidad de tiempo es igual a I^2R.

SOLUCIÓN

1. El calor producido por unidad de tiempo es I^2R: $\quad \dfrac{dU}{dt} = I^2R$
2. La energía total disipada en forma en la resistencia es la integral de $P\,dt$ de $t = 0$ a $t = \infty$: $\quad U = \int_0^\infty I^2R\,dt$
3. La corriente I viene dada por la ecuación 28.28: $\quad I = I_0e^{-(R/L)t}$
4. Aplicar el valor de la corriente en la integral: $\quad U = \int_0^\infty I^2R\,dt = \int_0^\infty I_0^2e^{-2(R/L)t}R\,dt = I_0^2R\int_0^\infty e^{-2(R/L)t}\,dt$
5. La integración puede hacerse sustituyendo $x = 2Rt/L$: $\quad U = I_0^2R\dfrac{e^{-2(R/L)t}}{-2(R/L)}\Bigg|_0^\infty = I_0^2R\dfrac{-L}{2R}(0-1) = \boxed{\dfrac{1}{2}LI_0^2}$

COMPROBACIÓN La cantidad total de energía disipada es igual a la energía $\frac{1}{2}LI_0^2$ almacenada originalmente en el inductor. (La energía almacenada en un inductor es $\frac{1}{2}LI^2$, como vimos en la ecuación 28.21.)

Ejemplo 28.14 Corrientes inicial y final

Determinar las corrientes I_1, I_2 e I_3 en el circuito que se muestra en la figura 28.34, (*a*) inmediatamente después de cerrar el interruptor S y (*b*) al cabo de un largo tiempo de cerrar S. Pasado este largo tiempo, se abre el interruptor. (*c*) Inmediatamente después de abrir el interruptor determinar las tres corrientes y (*d*) determinar la caída de potencial en los extremos de la resistencia. (*e*) Determinar las tres corrientes un largo tiempo después de abrir S.

S, $R_1 = 10\ \Omega$, I_1, I_3, $\mathcal{E} = 150$ V, $R_2 = 20\ \Omega$, I_2, $L = 2$ H

FIGURA 28.34

PLANTEAMIENTO (*a*) Simplificaremos el cálculo teniendo en cuenta que la corriente en un inductor no puede cambiar bruscamente. Por lo tanto, la corriente en el inductor debe ser cero inmediatamente después de cerrar el interruptor, porque era cero antes. (*b*) Cuando la corriente alcanza su valor final, dI/dt es igual a cero y, por lo tanto, no hay caída de potencial a través del inductor. Este actúa como un cortocircuito, es decir, como un alambre de resistencia nula. (*c*) Inmediatamente después de abrir el interruptor, la corriente en el inductor sigue siendo la misma que antes de la apertura. (*d*) Un tiempo largo después de abrir el interruptor, todas las corrientes son nulas.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. En el instante de cerrar el circuito en S, la corriente a través del inductor es cero, exactamente igual que lo era inmediatamente antes de que se cerrara. Aplicando la regla de los nudos podemos relacionar I_1 e I_2:

$$I_3 = \boxed{0}$$
$$I_1 = I_2 + I_3$$
así
$$I_1 = I_2$$

2. La corriente en la malla de la izquierda se obtiene aplicándole la regla de las mallas:

$$\mathcal{E} - I_1R_1 - I_1R_2 = 0$$
así
$$I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{150\text{ V}}{10\ \Omega + 20\ \Omega} = \boxed{5{,}0\text{ A}}$$

(*b*) 1. Pasado un tiempo suficientemente largo, la corriente se vuelve estacionaria y el inductor actúa como un cortocircuito, de tal forma que la caída de potencial entre los extremos de la resistencia R_2 es cero. Aplicando la regla de las mallas, obtenemos I_2:

$$-L\frac{dI_3}{dt} + I_2R_2 = 0$$
$$0 + I_2R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \boxed{0}$$

2. Aplicando otra vez la regla de las mallas a la malla de la izquierda, obtenemos I_1:

$$\mathcal{E} - I_1R_1 - I_2R_2 = 0$$
$$\mathcal{E} - I_1R_1 - 0 = 0$$

por lo tanto,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{150\ \text{V}}{10\ \Omega} = \boxed{15\ \text{A}}$$

3. Aplicando la regla de los nudos, obtenemos I_3:

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$15\ \text{A} = 0 + I_3$$

por lo tanto,

$$I_3 = \boxed{15\ \text{A}}$$

(*c*) Cuando el interruptor es reabierto, I_1 se hace cero instantáneamente. La corriente I_3 en el inductor varía de forma continua, de tal forma que en aquel instante $I_3 = 15$ A. Aplicando la regla de los nudos, obtenemos I_2:

$$I_3 = \boxed{15\ \text{A}}$$
$$I_1 = I_2 + I_3$$

por lo tanto,

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0 - 15\ \text{A} = \boxed{-15\ \text{A}}$$

(*d*) Aplicando la ley de Ohm, obtenemos la caída de potencial entre los extremos de R_2:

$$V = I_2R_2 = (15\ \text{A})(20\ \Omega) = \boxed{300\ \text{V}}$$

(*e*) Pasado un tiempo suficientemente largo después de que el interruptor fuera abierto, todas las corrientes deberán ser cero:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \boxed{0}$$

OBSERVACIÓN ¿Puede sorprendernos que la caída de potencial a través de R_2 en el apartado (*d*) sea superior a la fem de la batería? Esta caída de potencial es igual a la fem del inductor.

PROBLEMA PRÁCTICO 28.10 Supongamos que $R_2 = 200\ \Omega$ y que el interruptor se ha cerrado hace un tiempo largo. ¿Cuál es la caída de potencial entre los extremos de esta resistencia después de abrir el circuito?

28.9 PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LOS SUPERCONDUCTORES

Los superconductores poseen resistividades nulas por debajo de una temperatura crítica T_c, la cual varía según el material. En presencia de un campo magnético $\vec{B}$, la temperatura crítica es menor que la correspondiente en ausencia de campo. Cuando el campo magnético crece, la temperatura crítica disminuye. Si el campo magnético es mayor que cierto valor crítico B_c, la superconductividad no existe a ninguna temperatura.

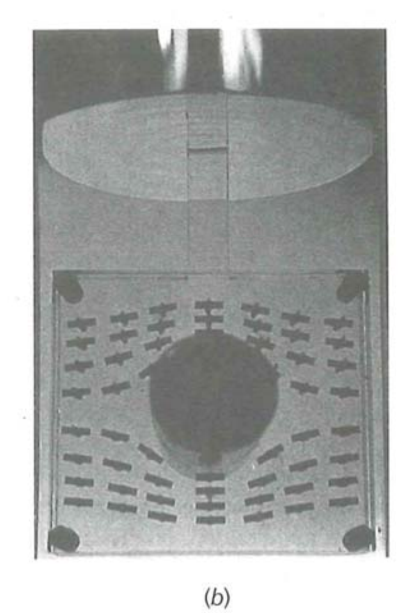
*EFECTO MEISSNER

Cuando un superconductor está en un campo magnético externo aplicado y se enfría por debajo de su temperatura crítica, el campo magnético dentro del material superconductor se hace nulo (figura 28.35). Este efecto fue descubierto por Walter Meissner y Robert Ochsenfeld en 1933 y se conoce ahora con el nombre de **efecto Meissner**. El campo magnético se hace cero porque corrientes superconductoras que se inducen en la superficie del superconductor producen un segundo campo magnético que compensa el campo aplicado. La le-

$T > T_c$

$T < T_c$

(*a*)



(*b*)

FIGURA 28.35 (*a*) El efecto Meissner en una esfera superconductora enfriada dentro de un campo magnético externo constante. Cuando la temperatura desciende por debajo del valor crítico T_c, el campo magnético dentro de la esfera se hace cero. (*b*) Demostración del efecto Meissner. Un cilindro de estaño superconductor se sitúa con su eje perpendicular a un campo magnético horizontal. La dirección de las líneas de campo vienen indicadas por agujas de brújula débilmente imanadas que se intercalan entre láminas de lucita, de modo que pueden girar libremente. (*A. Leitner/Rensselaer Polytechnic Institute.*)

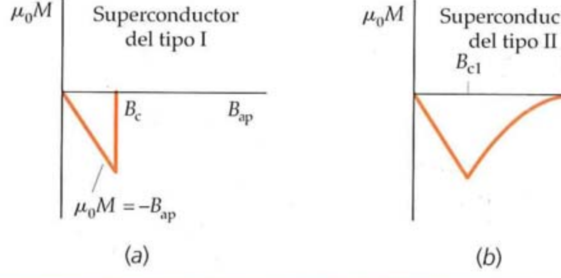
vitación magnética que se muestra en la foto se debe a la repulsión que se produce entre el imán permanente que produce el campo externo y el campo magnético producido por las corrientes inducidas en el superconductor.

El efecto Meissner completo sólo se verifica en ciertos materiales llamados **superconductores del tipo I**. La figura 28.36*a* muestra un gráfico del producto $\mu_0 M$ (M es la imanación) en función del campo magnético aplicado B_{ap} para un superconductor del tipo I. Para un campo magnético menor que el campo crítico B_c, el campo magnético $\mu_0 M$ inducido en el superconductor es igual y opuesto al campo magnético externo. Los valores de B_c para los superconductores del tipo I son siempre demasiado pequeños para que tales materiales sean útiles en las bobinas de un imán superconductor.

Otros materiales, llamados **superconductores del tipo II**, poseen una curva de imanación semejante a la de la figura 28.36*b*. Suelen ser aleaciones o metales que poseen resistividades grandes en el estado normal. Los superconductores del tipo II exhiben las propiedades eléctricas de los superconductores excepto cuando actúa el efecto Meissner hasta el campo crítico B_{c2}, que puede ser varios cientos de veces superior a los valores típicos de los campos críticos para superconductores del tipo I. Por ejemplo, la aleación Nb3Ge tiene un campo crítico B_{c2} = 34 T. Tales materiales pueden utilizarse para la construcción de imanes superconductores de campo intenso. Por debajo del campo crítico B_{c1}, el comportamiento de un superconductor del tipo II es el mismo que el de otro del tipo I.



La pastilla pequeña es un superconductor. La levitación magnética se debe a la repulsión entre imán permanente que produce el campo externo aplicado y el campo magnético producido por las corrientes inducidas en el superconductor. *(© Palmer/Kane, Inc./CORBIS.)*



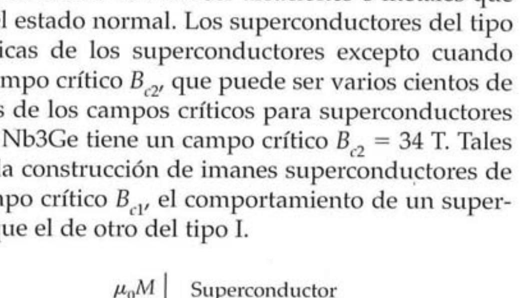


FIGURA 28.36 Gráficos del producto $\mu_0 M$ en función del campo magnético aplicado para los superconductores del tipo I y del tipo II. (*a*) En los del tipo I, el campo magnético resultante es cero por debajo de un campo aplicado crítico *Bc* porque el campo debido a las corrientes inducidas en la superficie del superconductor neutraliza exactamente el campo aplicado. Por encima del campo crítico, el material es un conductor normal y la imanación es demasiado pequeña para verse a esta escala. (*b*) En un superconductor del tipo II, el campo magnético comienza a penetrar el material cuando alcanza el valor Bc_1, pero éste permanece superconductor hasta un campo Bc_2 después de lo cual se convierte en un conductor normal.

*CUANTIZACIÓN DEL FLUJO

Consideremos un anillo superconductor de área A portadora de una corriente. Existirá un flujo magnético $\phi_m = B_n A$ a través de la superficie S encerrada por el anillo debido a la corriente mencionada y quizá a otras corrientes externas al anillo. Según la ecuación 28.6, si el flujo se modifica, se inducirá un campo eléctrico en el anillo cuya circulación será proporcional a la variación temporal del flujo. Sin embargo, en un superconductor no puede existir un campo eléctrico porque, al ser nula su resistencia, un campo eléctrico finito produciría una corriente infinita. El flujo a través del anillo se "congela" y no puede variar.

Otro efecto, el cual resulta del tratamiento mecánico-cuántico de la superconductividad, es que el flujo total a través de la superficie S está cuantizado y viene dado por

$$\phi_m = n\frac{h}{2e} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28.29}$$

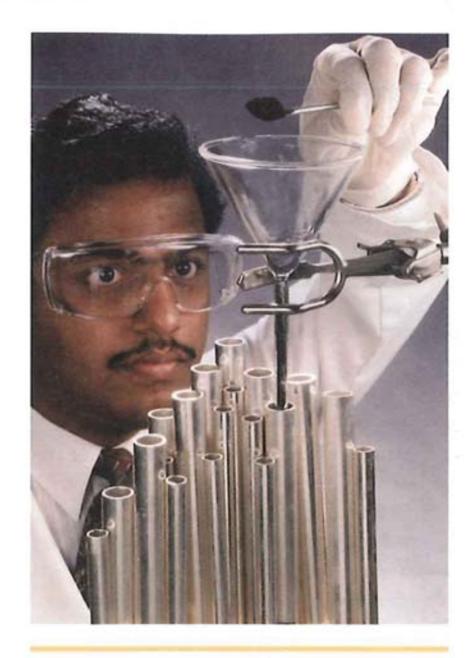
La unidad más pequeña del flujo, llamada **fluxón**, es

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}0678 \times 10^{-15}\ \text{T} \cdot \text{m}^2 \tag{28.30}$$

Temas de actualidad en Física

La promesa de los superconductores

En 1986, dos investigadores de IBM encontraron que un óxido metálico en forma de cerámica era superconductor a 32 K.[1] A partir de entonces, investigadores de todo el mundo probaron diferentes compuestos cerámicos para comprobar si eran superconductores. En 1987, se encontró un superconductor de alta temperatura (HTS, siglas en inglés), a 90 K, lo que permitía sustituir la criogenia del helio por la del nitrógeno.[2] Estos superconductores cerámicos tienen además la propiedad de poder transportar corrientes muy intensas. Hasta la prensa diaria llegó la noticia de que la superconductividad a temperatura ambiente podría ser factible. Libros editados en los últimos años de la década de los 80 analizaban las posibilidades de construir trenes levitantes utilizando superconductores, ordenadores con electrónica basada en éstos, redes eléctricas de transmisión de energía sin pérdidas por resistencia eléctrica, e incluso láseres en satélites asistidos con elementos superconductores.[3,4]



El investigador está llenando los tubos con polvo de superconductor de alta temperatura de transición para construir el hilo. *(Gentileza del Departamento de Energía.)*

Desafortunadamente, los superconductores a temperatura ambiente no han podido ser descubiertos. Además, la manipulación y el trabajo con estos compuestos cerámicos sigue siendo difícil.[5] Son quebradizos y no pueden conectarse fácilmente a hilos, de tal forma que se tienen que inventar procedimientos para depositar estos superconductores cerámicos en otras superficies. Por otro lado, si los contornos entre los diminutos granos de la cerámica no se orientan convenientemente o las capas son demasiado gruesas, estos compuestos cerámicos dejan de ser superconductores.[6]

Estas dificultades están siendo lenta pero progresivamente superadas. Los HTS se usan en la actualidad en múltiples aplicaciones: los dispositivos detectores basados en la interferencia cuántica con superconductores, los denominados SQUID (siglas en inglés) se usan[7] para detectar energías extremadamente pequeñas, incluso son capaces de detectar campos magnéticos[8] en el sistema nervioso de un recién nacido.[10] Se ha logrado construir cables, todavía de longitud muy limitada, con HTS, de tal forma que enfriados con nitrógeno líquido pueden transmitir corrientes elevadas[11] en hilos finos de gran calidad.[12]

Los superconductores se convierten en conductores normales con resistencia eléctrica cuando transportan una elevada corriente, lo cual puede ser ventajoso para la distribución de potencia a largas distancias. Cuando en un circuito se produce un cortocircuito (rama con pequeña resistencia eléctrica), la corriente aumenta muy rápidamente a menos que se proteja el circuito con un fusible o un cortacircuito. Sin protecciones, las grandes intensidades pueden dañar a los equipos y causar incendios. Se están desarrollando limitadores de corriente[13] mediante superconductores con objeto de proteger las redes eléctricas de distribución de corrientes excesivamente intensas.[14]

En 2001, investigadores japoneses descubrieron que el diborato de magnesio, MgB_2, superconducía a 39 K, temperatura mucho mayor que la de otros superconductores metálicos. Estos superconductores metálicos pueden ser enfriados con neón líquido en lugar de helio, cuya criogenia es mucho más costosa. Al ser metálico el MgB_2, la construcción de hilos es mucho más fácil.[15] El MgB_2 puro pierde la superconductividad con menores corrientes que los HTS; por ello, este superconductor metálico no puede utilizarse para las aplicaciones de aquéllos.[16] Muchos investigadores están estudiando el "dopado" de este metal superconductor con pequeñas cantidades de otros compuestos para mejorar sus características y propiedades.[17]

1 Yamazaki, S., "Superconducting Ceramics." *United States Patent* 7,1112,556 *B1*. September 26, 2006.
2 Chu, C. W., "Superconductivity Above 90 K." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Jul. 1987, Vol. 84, pp. 4681–4682.
3 Asimov, I., *How Did We Find Out About Superconductivity?* New York: Walker and Company, 1988, pp. 57–62.
4 Lampton, C. E., *Superconductors*. Hillside, New Jersey: Enslow, 1989, pp. 7–8, 53–69.
5 Pool, R., "Superconductors' Material Problems." *Science*, Apr. 1, 1988, Vol. 240, No. 4848, pp. 25–27.
6 Service, R. F., "YBCO Confronts Life in the Slow Lane." *Science*, Feb. 1, 2002, Vol. 295, p. 787.
7 Irwin, K. D., "Seeing with Superconductors." *Scientific American*, Nov. 2006, pp. 86–94.
8 Bick, M., et al., "A SQUID-Based Metal Detector-Comparison to Coil and X-Ray Systems." *Superconducting Science and Technology*, Jan. 18, 2005, Vol. 18, pp. 346–351.
9 "Color Video Streaming from Space." *Machine Design*, May 25, 2006, p. 40.
10 Draganova, R., et al., "Sound Frequency Change Detection in Fetuses and Newborns, a Magnetoencephalographic Study." *Neuroimage*, Nov. 1, 2005, Vol. 28, No. 2, pp. 354–361.
11 Malozemoff, A. P., Mannhart, J., and Scalapino, D., "High-Temperature Cuprate Superconductors Get to Work." *Physics Today*, April 2005, pp. 41–47.
12 Kang, S., "High-Performance, High-T_C Superconducting Wires." *Science*, Mar. 31, 2006, Vol. 311, pp. 1911–1914.
13 Malozemoff, A. P., Mannhart, J., and Scalapino, D., op. cit.
14 Meerovich, V., and Sokolovsky, V., "Experimental Study of a Transformer with Superconducting Elements for Fault Current Limitation and Energy Redistribution." *Cryogenics*, Aug. 2005, Vol. 45, No. 8, pp. 572–577.
15 Service, R., "MgB_2 Trades Performance for a Shot at the Real World." *Science*, Feb. 1, 2002, Vol. 295, pp. 786–788.
16 Canfield, P., and Bud'ko, S., "Low-Temperature Superconductivity Is Warming Up." *Scientific American*, Apr. 2005, pp. 80–87.
17 Senkowicz, B. J., et al., "Atmospheric Conditions and Their Effect on Ball-Milled Magnesium Diboride." *Superconductor Science and Technology*, Oct. 2006, Vol. 19, pp. 1173–1177.

Resumen



1. La ley de Faraday y la ley de Lenz son leyes fundamentales de la Física.
2. La autoinductancia es una propiedad de un elemento de circuito que relaciona el flujo que atraviesa el elemento con la corriente.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Flujo magnético ϕ_m		
Definición general	$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$	28.1
Campo constante, superficie plana por una bobina de N vueltas	$\phi_m = NBA\cos\theta$ donde A es el área de la superficie plana que queda limitada por una vuelta de la bobina.	28.4
Unidades	$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2$	28.2
Debido a la corriente de un circuito	$\phi_m = LI$	28.11
Debido a la corriente de dos circuitos	$\phi_{m1} = L_1I_1 + MI_2$ $\phi_{m2} = L_2I_2 + MI_1$	28.16
2. fem		
Ley de Faraday (incluye tanto la inducción como la fem de movimiento)	$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$	28.5
Inducción (campo magnético variable con el tiempo, siendo C estacionaria)	$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$	28.6
Barra moviéndose perpendicularmente tanto a sí misma como al campo $\vec{B}$	$\lvert\mathcal{E}\rvert = vB\ell$	28.7
Autoinducida (fuerza contraelectromotriz)	$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$	28.14
3. Ley de Faraday	$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$	28.5
4. Ley de Lenz	La fem inducida y la corriente inducida tienen un sentido tal que se opone al cambio que las produce.	
Formulación alternativa	Cuando el flujo magnético a través de una superficie varía, el campo magnético debido a la corriente inducida produce un flujo sobre esta misma superficie que se opone al cambio de flujo inicial.	
5. Inductancia		
Autoinducción	$L = \frac{\phi_m}{I}$	28.11
Autoinducción de un solenoide	$L = \mu_0 n^2 A\ell$	28.13

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Inductancia mutua	$M = \frac{\phi_{m21}}{I_1} = \frac{\phi_{m12}}{I_2}$	28.18
Unidades	$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2/\text{A}$ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$	
6. Energía magnética		
Energía almacenada en un inductor	$U_m = \frac{1}{2}LI^2$	28.21
Densidad de energía en un campo magnético	$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$	28.22
7. Circuitos *RL		
Diferencia de potencial entre los extremos de un inductor	$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = -L\frac{dI}{dt} - Ir$ donde r es la resistencia interna del inductor. En un inductor perfecto, $r = 0$.	28.15
Inductor al que se le suministra energía por medio de una batería	En un circuito *RL*, formado por una resistencia *R*, una inductancia *L* y una batería de fem $\mathcal{E}_0$, en serie, la corriente no alcanza su valor máximo I_f instantáneamente, sino que tarda cierto tiempo. Si la corriente es inicialmente cero, su valor al cabo de cierto tiempo *t* viene dado por $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = I_f(1 - e^{-t/\tau})$	28.25
Constante de tiempo, τ	$\tau = \frac{L}{R}$	28.26
Desconexión del inductor en presencia de una resistencia	En un circuito de resistencia *R* e inductancia *L*, la corriente no cae a cero instantáneamente, sino que decrece de forma continua. Si la corriente inicial es I_0, su valor un instante de tiempo después puede calcularse mediante su evolución temporal, la cual viene dada por la expresión $I = I_0 e^{-t/\tau}$	28.28

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

28.1 Opuestos en la dirección mostrada en la figura 28.12.

28.2 El agente externo actuando sobre la espira (o bobina) la mantiene en funcionamiento. La energía procede del agente externo.

Respuestas a los problemas prácticos

28.2 0,555 A

28.3 3,53 mC

28.4 1,4 V

28.5 11 V

28.6 $3{,}18 \times 10^5$ A/s

28.7 $M_{12} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2$

28.8 $U_m = \frac{1}{2}LI_f^2 = 1{,}60 \times 10^{-3}$ J

28.9 71 μs

28.10 3,0 kV

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • (*a*) Se denomina ecuador magnético a la línea en la superficie terrestre en la que el campo magnético de la Tierra es horizontal. En esta línea, ¿cómo debería orientarse una hoja de papel para que le atravesara el mayor flujo magnético posible? (*b*) ¿Y cómo hacerlo para que fuera mínimo? SSM

2 • ¿Cómo debería orientarse una hoja de papel en uno de los polos magnéticos de la Tierra para que el flujo magnético que le atravesara fuera mínimo?

3 • Demostrar que la siguiente combinación de unidades equivale al volt, $T \cdot m^2/s$. SSM

4 • Demostrar que la siguiente combinación de unidades equivale al ohm, $Wb/(A \cdot s)$.

5 • Una espira conductora se encuentra en el plano de esta página y transporta una corriente inducida en sentido horario. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones podía ser cierta? (*a*) Existe un campo magnético constante que está dirigido hacia la página. (*b*) Existe un campo magnético constante que está dirigido desde la página hacia fuera. (*c*) Existe un campo magnético creciente que está dirigido hacia la página. (*d*) Existe un campo magnético decreciente que está dirigido hacia la página. (*e*) Existe un campo magnético decreciente que está dirigido desde la página hacia fuera. SSM

6 • Indicar el sentido de la corriente inducida en el circuito de la derecha de la figura 28.37 cuando a la resistencia del circuito de la izquierda repentinamente se le hace (*a*) crecer y (*b*) disminuir.

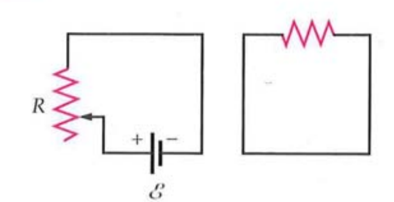


FIGURA 28.37 Problema 6

7 • Las dos espiras circulares de la figura 28.38 tienen sus planos paralelos entre sí. Cuando se mira desde A hacia B existe en A una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj. Dar el sentido de la corriente de la espira B y establecer si las espiras se atraen o repelen entre sí, si la corriente en la espira A está (*a*) creciendo y (*b*) decreciendo. SSM

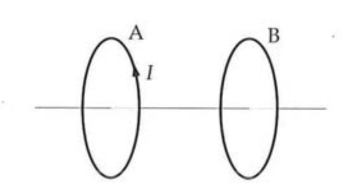


FIGURA 28.38 Problema 7

8 • Un imán en forma de barra se mueve con velocidad constante a lo largo del eje de una espira como se indica en la figura 28.39. (*a*) Hacer un esquema cualitativo del flujo ϕ_m que atraviesa la espira en función del tiempo. Indicar el tiempo t_1 en que la mitad del imán está introducida en la espira. (*b*) Hacer una gráfica de la corriente *I* que hay en la espira en función del tiempo, considerando *I* positivo, cuando tiene sentido contrario al de las agujas del reloj vista la espira desde la izquierda.

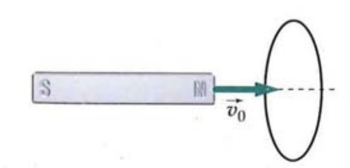


FIGURA 28.39 Problema 8

9 • Una barra magnética está montada en el extremo de un muelle enrollado en espiral de modo que oscila con movimiento armónico simple a lo largo del eje de una espira, como se muestra en la figura 28.40. (*a*) Representar cualitativamente el flujo ϕ_m que atraviesa la espira en función del tiempo. Indicar el tiempo t_1 en que el imán está a mitad de camino atravesando la espira. (*b*) Representar la intensidad de corriente *I* en la espira en función del tiempo, eligiendo como positivo el sentido de *I* cuando coincide con el sentido contrario al de las agujas del reloj, visto desde arriba.

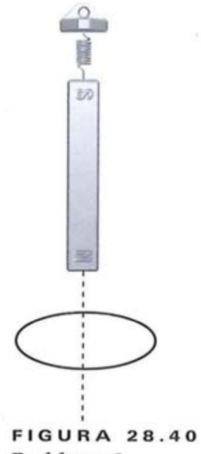
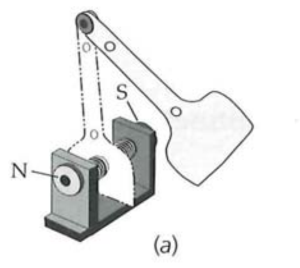


FIGURA 28.40 Problema 9

10 • Fabricamos un péndulo con una fina pieza plana de aluminio de tal forma que su "lenteja" pasa entre los polos de un imán permanente que genera un campo magnético intenso. En el apartado (*a*) de la figura 28.41, la lámina de metal es continua, mientras que en el apartado (*b*) se han realizado ranuras. El péndulo con ranuras oscila muchas veces, mientras que el que no las tiene se para en una oscilación completa. Explicar el porqué.



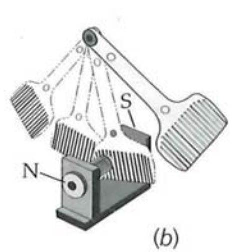


FIGURA 28.41 Problema 10 *(Gentileza de PASCO Scientific Co.)*

11 • Una barra magnética se deja caer dentro de un tubo largo vertical. Si el tubo es metálico, el imán alcanza rápidamente una velocidad límite, pero si el tubo es de cartón, no ocurre así. ¿Por qué?

12 • Una pequeña espira cuadrada está en el plano de esta página y un campo magnético se dirige hacia ella. Si se mueve la espira en la dirección positiva del eje *x*. Hallar la dirección de la corriente inducida, si es que se genera, cuando (*a*) el campo magnético es uniforme, (*b*) el valor de éste crece con *x*, y (*c*) el valor del campo decrece con *x*.

13 • Si la corriente de un inductor se dobla, la energía almacenada (*a*) permanecerá igual, (*b*) se doblará, (*c*) se cuadruplicará, (*d*) será la mitad.

14 • Dos solenoides de igual longitud y radio contienen idénticos núcleos de hierro en su interior. Sin embargo, el solenoide A tiene el triple de vueltas que el B. (*a*) ¿Qué solenoide tiene mayor autoinducción? (*b*) ¿Cuál es la relación entre sus respectivas autoinducciones?

15 • Verdadero o falso:

(*a*) La fem inducida en un circuito es proporcional al flujo magnético que atraviesa el circuito.

(*b*) Puede existir una fem inducida en un instante en el que el flujo a través del circuito es cero.

(*c*) La inductancia de un solenoide es proporcional a la variación con el tiempo de la corriente que circula por él.

(*d*) La densidad de energía magnética en un punto del espacio es proporcional al cuadrado del campo magnético en dicho punto.

(*e*) La inductancia de un solenoide es proporcional a la corriente que pasa por él. SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

16 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El bateador de un equipo de béisbol acaba de leer este capítulo y piensa cuánto voltaje eléctrico se podría obtener con la acción de golpear la pelota con su bate metálico de aluminio. Estimar la fuerza electromotriz inducida que se obtiene en el movimiento entre los extremos del bate. ¿Deberá el jugador aislar con madera el bate para evitar recibir una descarga peligrosa?

17 • Comparar las energías almacenadas por los campos eléctrico y magnético de la Tierra cerca de su superficie.

18 •• Un profesor de Física intenta la siguiente práctica demostrativa sobre la fuerza electromotriz inducida. Dos estudiantes sostienen un largo hilo conductor conectado a un voltímetro. El hilo está sin tensar, formando una gran arco. Cuando el profesor da la orden de comenzar, los estudiantes empiezan a girar verticalmente el hilo como si estuvieran jugando a saltar la comba. Los estudiantes están separados 3,0 m y la comba del hilo tiene 1,5 m (podemos idealizar el problema considerando que el hilo forma una semicircunferencia perfecta de 1,5 m de diámetro). La fem que se pueda inducir se medirá con el voltímetro. (*a*) Estímese un valor razonable para la máxima velocidad angular que los estudiantes pueden hacer girar la comba. (*b*) Con esta velocidad, estimar la máxima fem inducida en el hilo. *Ayuda: ¿qué campo crea fuerza electromotriz inducida?*

19 •• (*a*) Estimar la máxima fuerza electromotriz en movimiento entre los extremos del ala de un avión comercial en vuelo. (*b*) Estimar el campo eléctrico entre dichos extremos.

FLUJO MAGNÉTICO

20 • Un campo magnético uniforme de magnitud 2000 G es paralelo al eje x. Una espira cuadrada de lado 5 cm forma un ángulo θ con el eje z, como muestra la figura 28.44. Determinar el flujo magnético a través de la espira cuando (*a*) $\theta = 0$, (*b*) $\theta = 30°$, (*c*) $\theta = 60°$, y (*d*) $\theta = 90°$

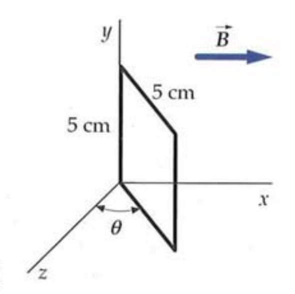


FIGURA 28.42 Problema 20

21 • Una bobina circular tiene 25 vueltas y un radio de 5 cm. Se encuentra en el ecuador, donde el campo magnético terrestre es 0,7 G norte. Determinar el flujo magnético a través de la bobina cuando (*a*) su plano es horizontal, (*b*) su plano es vertical y su eje apunta al norte, (*c*) su plano es vertical y su eje apunta al este, y (*d*) su plano es vertical y su eje forma un ángulo de 30° con el norte. SSM

22 • Un campo magnético de 1,2 T es perpendicular a una bobina cuadrada de 14 vueltas. La longitud de cada lado de la bobina es 5 cm. (*a*) Determinar el flujo magnético a través de la bobina. (*b*) Determinar el flujo magnético para el caso en que el campo magnético forma un ángulo de 60° con la normal al plano de la bobina.

23 • Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es perpendicular a la base de una semiesfera de radio R. Calcular el flujo magnético que atraviesa la superficie esférica de la semiesfera.

24 • Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de longitud 25 cm, radio 1 cm y 400 vueltas, que transporta una corriente de 3 A.

25 • Resolver el problema 20 para el caso de un solenoide de longitud 30 cm, radio 2 cm y 800 vueltas que transporta una corriente de intensidad 2 A.

26 •• Una bobina circular de 15 vueltas de 4 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme de 4000 G en la dirección positiva de x. Determinar el flujo que atraviesa la bobina cuando el vector unitario normal al plano de la bobina es (*a*) $\hat{i}$, (*b*) $\hat{j}$, (*c*) $(\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$, (*d*) $\hat{k}$, y (*e*) $0{,}60\hat{i} + 0{,}80\hat{j}$.

27 •• Un solenoide de n vueltas por unidad de longitud y radio R_1 transporta una corriente I. (*a*) Una bobina circular grande de radio $R_2 > R_1$ y N vueltas rodea el solenoide en un punto alejado de sus extremos. Determinar el flujo magnético que atraviesa la bobina. (*b*) Una bobina circular pequeña de radio $R_3 < R_1$ y N vueltas está introducida completamente dentro del solenoide, lejos de sus extremos, con su eje paralelo al del solenoide. Determinar el flujo magnético a través de esta pequeña bobina. SSM

28 ••• (*a*) Calcular el flujo magnético que atraviesa la espira rectangular mostrada en la figura 28.43. (*b*) Obtener la solución del problema para a = 5,0 cm, b = 10 cm, d = 2,0 cm y I = 20 A,

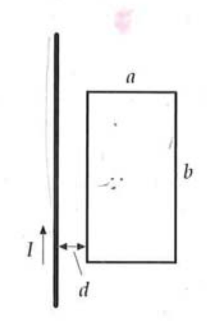


FIGURA 28.43 Problema 28

29 ••• Un conductor largo y cilíndrico de radio R transporta una corriente I que está uniformemente distribuida en su área transversal. Determinar el flujo magnético por unidad de longitud a través del área indicada en la figura 28.46.

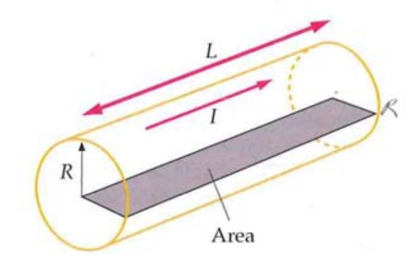


FIGURA 28.44 Problema 29

FEM INDUCIDA Y LEY DE FARADAY

30 • El flujo que atraviesa una espira viene dado por la fórmula $\phi_m = (t^2 - 4t) \times 10^{-1}$ Wb, donde t se da en segundos. (*a*) Hallar la fem inducida $\mathcal{E}$ en función del tiempo. (*b*) Hallar ϕ_m y $\mathcal{E}$ para $t = 0$, t = 2,0 s, t = 4,0 s, y t = 6,0 s.

31 • El flujo a través de la espira viene dado por $\phi_m = (0{,}10t^2 - 0{,}40t)$, donde ϕ_m se expresa en webers y t en segundos. (*a*) Dibujar gráficos del flujo magnético y de la fuerza electromotriz inducida como función del tiempo. (*b*) ¿En qué instante el flujo es mínimo? (*c*) ¿En qué instante el flujo es cero? ¿Qué fuerzas electromotrices son inducidas en ese instante?

32 • Un solenoide de longitud 25 cm y radio 0,8 cm consta de 400 vueltas y se encuentra en un campo magnético externo de 600 G que forma un ángulo de 50° con el eje del solenoide. (*a*) Determinar el flujo magnético a través del solenoide. (*b*) Determinar el módulo de la fem inducida en el solenoide si el campo magnético externo se reduce a cero en 1,4 s.

33 •• Una bobina circular de 100 vueltas tiene un diámetro de 2 cm y una resistencia de 50 Ω. El plano de la bobina es perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 1 T. El campo sufre una inversión de sentido repentina. (*a*) Determinar la carga total que pasa a través de la bobina. Si la inversión emplea un tiempo de 0,1 s, hallar (*b*) la corriente media que circula por dicho circuito y (*c*) la fem media en el mismo. SSM

34 •• En el ecuador, una bobina de 1000 vueltas, 300 cm² de área de sección recta y 15 Ω de resistencia se orienta de modo que su plano es perpendicular al campo magnético terrestre de 0,7 G. Si se hace girar 180° la bobina, ¿cuánta carga fluirá a su través?

35 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un *circuito integrador* de corriente mide la corriente en función del tiempo e integra esta corriente para determinar la carga que pasa por él. (Como $I = dq/dt$, el circuito integrador calcula la integral de la corriente, es decir $Q = \int I\,dt$.) Una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 5 cm se conecta a un integrador de corriente. La resistencia total del circuito es 20 Ω. El plano de la bobina se orienta inicialmente de modo que sea perpendicular al campo magnético terrestre en un punto determinado. Cuando la bobina gira 90°, la carga que pasa a través del integrador se mide y resulta ser igual a 9,4 mC. Calcular el valor del campo magnético terrestre en dicho punto.

FEM DE MOVIMIENTO

36 • Una varilla de 30 cm de longitud se mueve a 8 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de 500 G. Su velocidad es perpendicular a la longitud de la varilla. Hallar (*a*) la fuerza magnética ejercida sobre un electrón de la varilla, (*b*) el campo electrostático E existente en la varilla, y (*c*) la diferencia de potencial V entre sus extremos.

37 • Una barra de 30 cm de largo se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético de 500 G. La velocidad de la barra es perpendicular a su longitud. Determinar la velocidad de la barra si la diferencia de potencial entre sus extremos es de 6,00 V.

38 •• En la figura 28.45, sea $B = 0{,}8$ T, $v = 10$ m/s, $\ell = 20$ cm, y $R = 2$ Ω. Hallar (*a*) la fem inducida en el circuito, (*b*) la corriente en el circuito y (*c*) la fuerza necesaria para mover la varilla con velocidad constante suponiendo un rozamiento despreciable. Hallar (*d*) la potencia suministrada por la fuerza hallada en el apartado (*c*), y (*e*) la producción de calor por efecto Joule I^2R por unidad de tiempo.

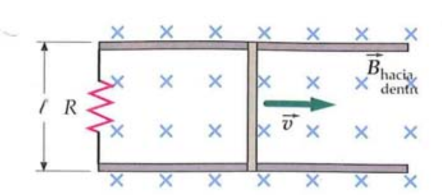


FIGURA 28.45 Problema 38

39 •• Una espira rectangular de 10 cm por 5 cm y con una resistencia de 2,5 Ω se mueve por una región de un campo magnético uniforme $B = 1{,}7$ T (figura 28.46) con velocidad constante $v = 2{,}4$ cm/s. El extremo delantero de la espira entra en la región del campo magnético en el instante $t = 0$. (*a*) Hallar el flujo que atraviesa la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico del mismo. (*b*) Hallar la fem y la corriente inducida en la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico de ambas. Despreciar cualquier autoinducción de la espira y ampliar los gráficos desde $t = 0$ hasta $t = 16$ s.

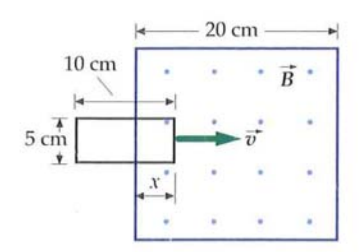


FIGURA 28.46 Problema 39

40 •• Un campo magnético uniforme de 1,2 T es paralelo al eje $+z$. Una barra conductora de longitud 15 cm es paralela al eje y y oscila en la dirección del eje x con un desplazamiento que viene dado por la ecuación $x = (2{,}0 \text{ cm}) \cos(120\pi t)$, donde 120π tiene unidades de rad/s. (*a*) Hallar una expresión en función del tiempo para la diferencia de potencial entre los extremos de la barra. (*b*) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial entre estos extremos?

41 •• En la figura 28.47, la barra posee una resistencia R y los raíles son horizontales y de resistencia despreciable. Una batería de fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna despreciable se conecta entre los puntos a y b de tal modo que la corriente en la barra está dirigida hacia abajo. La barra se encuentra en reposo en el instante $t = 0$. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre la barra en función de la velocidad v y escribir la segunda ley de Newton para la barra cuando su velocidad es v. (*b*) Demostrar que la barra alcanza una velocidad límite y determinar la expresión correspondiente. (*c*) ¿Cuál es el valor de la intensidad de corriente cuando la barra alcanza su velocidad límite? SSM

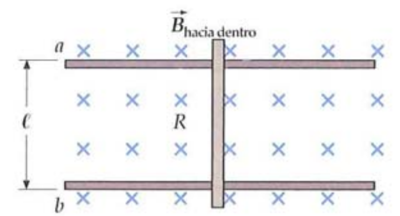


FIGURA 28.47 Problema 41

42 • Un campo magnético uniforme es perpendicular al plano de una espira de radio 5,00 cm y resistencia de 0,400 ohms. El valor del campo crece 40,0 mT/s. Hallar (*a*) el valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira, (*b*) la corriente inducida, y (*c*) el calor producido por efecto Joule en la espira.

43 •• En la figura 28.48, una barra conductora de masa m y resistencia despreciable se desliza sin rozamiento a lo largo de dos raíles paralelos de resistencia despreciable, separados por una distancia ℓ y conectados por una resistencia R. Los raíles están sujetos a un plano largo e inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Como se indica en la figura, el campo magnético está dirigido hacia arriba. (*a*) Demostrar que existe una fuerza dirigida hacia arriba sobre el plano inclinado dada por $F = (B^2\ell^2 v \cos^2\theta)/R$. (*b*) Demostrar que la velocidad terminal de la barra es $v_t = mgR \operatorname{sen}\theta/(B^2\ell^2\cos^2\theta)$.

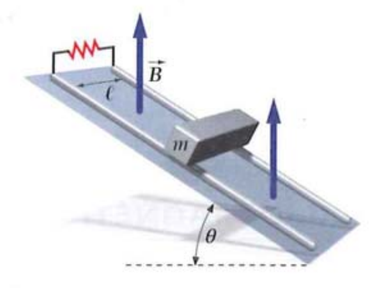


FIGURA 28.48 Problema 43

44 ••• Una barra conductora de longitud ℓ gira a velocidad angular constante ω alrededor de un extremo en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme B (figura 28.49). (*a*) Demostrar que la diferencia de potencial entre los extremos de la barra es $\frac{1}{2}B\omega\ell^2$. (*b*) Sea θ el an-

gulo formado por la barra que gira y la línea discontinua, el cual viene dado por $\theta = \omega t$; demostrar que el área barrida por la barra durante el tiempo t es $\frac{1}{2}\ell^2\theta$. (*c*) Calcular el flujo ϕ_m que atraviesa el área del apartado anterior y aplicar la ley de Faraday $\mathcal{E} = -d\phi_m/dt$ para demostrar que la fuerza electromotriz generada en el movimiento de la barra es $\frac{1}{2}B\,\omega\ell^2$.

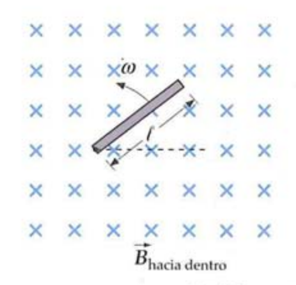


FIGURA 28.49 Problema 44

GENERADORES Y MOTORES

45 • Una bobina rectangular de 2,00 X 1,50 cm tiene 300 vueltas y gira en una región del espacio con campo magnético 0,400 T. (A) ¿Cuál es el máximo de fuerza electromotriz inducida cuando la bobina gira a 60 rev/s? (*b*) ¿Cuál debe ser la velocidad angular para generar un máximo de fuerza electromotriz de 110 V? SSM

46 • Si la bobina del problema anterior gira a 60 rev/s en un campo magnético y el máximo de fuerza electromotriz generado es de 24 V, ¿cuál es el valor del campo magnético?

INDUCTANCIA

47 • Por una bobina con una autoinducción de 8 H circula una corriente de 3 A, y ésta varía a razón de 200 A/s. (*a*) Hallar el flujo magnético que atraviesa la bobina. (*b*) Hallar la fem inducida en la misma.

48 •• Dos solenoides de radios 2 cm y 5 cm son coaxiales. Cada uno de ellos tiene 25 cm de longitud y tienen, respectivamente, 300 y 1000 vueltas. Determinar su inductancia mutua.

49 •• Un hilo conductor largo y aislado con una resistencia lineal de 18 Ω/m se utiliza para construir la resistencia de un circuito. En primer lugar, el alambre se dobla por la mitad y después se enrolla en forma cilíndrica como indica la figura 28.50. El diámetro de esta forma cilíndrica es de 2 cm, su longitud de 25 cm y la longitud total del alambre de 9 m. Determinar la resistencia y la inductancia de esta resistencia. SSM

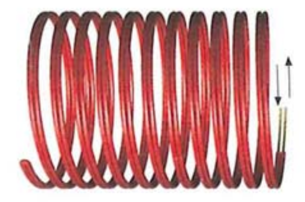


FIGURA 28.50 Problema 49

50 •• Un hilo de longitud l y radio a está doblado en el interior de una autoinducción en forma de hélice cuya sección transversal es de radio r. El hilo está muy próximo al inductor pero sin entrar en contacto. Demostrar que la autoinductancia de este inductor es $L = \frac{1}{4}\mu_0 r\ell/a$.

51 • Con el resultado del problema 50, calcular la autoinducción de un inductor de 10 cm de hilo conductor de 1,0 mm de diámetro dentro de una bobina cuyo radio es de 0,25 cm.

52 ••• El circuito 2 de la figura 28.51 posee una resistencia total de 300 Ω. Cuando el interruptor S del circuito 1 está cerrado, a través del galvanómetro del circuito 2 fluye una carga total de 2×10^{-4} C. Después de un largo tiempo, la corriente del circuito 1 es de 5 A. ¿Cuál es la inductancia mutua entre las dos bobinas?

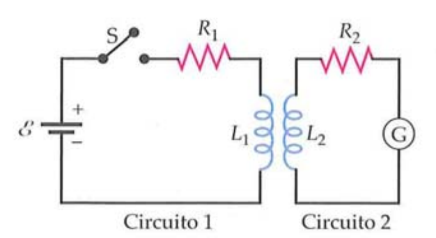


FIGURA 28.51 Problema 52

53 ••• Demostrar que la inductancia de un toroide de sección rectangular como el que indica la figura 28.52 viene dada por $L = \dfrac{\mu_0 N^2 H \ln(b/a)}{2\pi}$, donde N es el número total de vueltas, a es el radio interior, b el radio exterior y H la altura del toroide. SSM

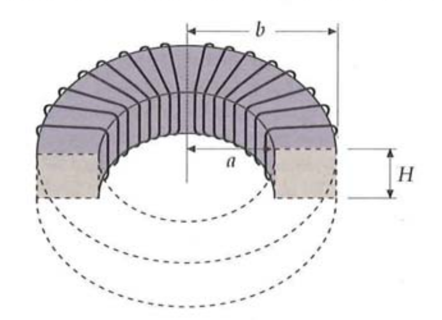


FIGURA 28.52 Problema 53

ENERGÍA MAGNÉTICA

54 • Se conecta una bobina cuya autoinducción es 2 H y de resistencia 12 Ω a una batería de 24 V de resistencia interna despreciable. (*a*) ¿Cuál es la corriente final? (*b*) ¿Cuánta energía se almacena en la bobina cuando se alcanza el valor final de la corriente?

55 • En una onda electromagnética plana, tal como una onda luminosa, los valores de los campos eléctrico y magnético están relacionados por $E = cB$, en donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de la luz. Demostrar que en este caso las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales. SSM

56 •• Por un solenoide de 2000 vueltas, 4 cm² de área y una longitud de 30 cm, circula una corriente de 4 A. (*a*) Calcular la energía magnética almacenada mediante la expresión $U = \frac{1}{2}LI^2$. (*b*) Dividir el valor obtenido en el apartado (*a*) por el volumen del solenoide para hallar la energía magnética por unidad de volumen de éste. (*c*) Hallar B en el solenoide. (*d*) Calcular la densidad de energía magnética a partir de $u_m = B^2/(2\mu_0)$ y compararla con la obtenida en el apartado (*b*).

57 •• Un cable largo y cilíndrico de radio $a = 2$ cm transporta una corriente $I = 80$ A uniformemente distribuida en el área de su sección transversal. Determinar la energía magnética total por unidad de longitud dentro del alambre.

58 •• Un toroide de radio medio 25 cm y radio de sección transversal 2 m está enrollado con un cable superconductor de 1000 m de longitud por el que circula una corriente de 400 A. (*a*) ¿Cuál es el número de vueltas de la bobina? (*b*) ¿Cuál es el campo magnético en el radio medio? (*c*) Suponiendo B constante en toda el área de la bobina, calcular la densidad de energía magnética y la energía total almacenada en el toroide.

*CIRCUITOS *RL*

59 • Una bobina de 8 Ω de resistencia y una autoinducción de 4 H se conecta repentinamente a una diferencia de potencial constante de 100 V. Supongamos que el instante de la conexión es $t = 0$ y en él la corriente es nula. Hallar la corriente I y su variación respecto al tiempo dI/dt en los instantes (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 0{,}1$ s, (*c*) $t = 0{,}5$ s y (*d*) $t = 1{,}0$ s. SSM

60 • En el circuito de la figura 28.53 el interruptor ha estado en la posición *a* durante tiempo prolongado y la corriente por la bobina es de 2,00 A. Para $t = 0$, el interruptor se cambia rápidamente a la posición *b*. Si la resistencia total de la rama constituida por el resistor y la bobina es $R + r$, hallar la corriente cuando (*a*) $t = 0{,}500$ ms y (*b*) $t = 10{,}0$ ms.

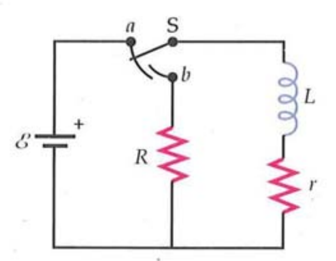


FIGURA 28.53 Problema 60

61 •• En el circuito de la figura 28.29 supongamos que $\mathscr{E}_0 = 12$ V, $R = 3\ \Omega$ y $L = 0{,}6$ H. El interruptor se cierra en el instante $t = 0$ s. En el instante $t = 0{,}5$ s, hallar (*a*) el ritmo con que la batería suministra la potencia, (*b*) el efecto calorífico de Joule por unidad de tiempo, y (*c*) la velocidad con que la energía se está almacenando en la bobina. SSM

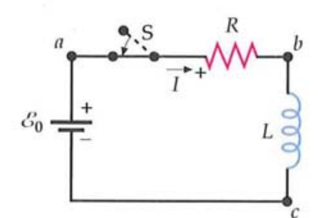


FIGURA 28.54 Problemas 61, 62 y 69

62 •• ¿Cuánto tiempo (medido en constantes de tiempo) debe transcurrir antes de que la corriente en un circuito *RL*, que era inicialmente cero, alcance (*a*) el 90%, (*b*) el 99% y (*c*) el 99,9% de su valor final?

63 •• Una bobina de inductancia 4 mH y resistencia 150 Ω se conecta a través de una batería de fem 12 V y resistencia interna despreciable. (*a*) ¿Cuál es el incremento inicial de la corriente por unidad de tiempo? (*b*) ¿Cuál es el incremento por unidad de tiempo cuando la corriente alcanza la mitad de su valor final? (*c*) ¿Cuál es la corriente final? (*d*) ¿Cuánto tiempo tardará la corriente en alcanzar el 99% de su valor final? SSM

64 •• Un gran electroimán posee una inductancia de 50 H y una resistencia de 8 Ω. Si se conecta a una fuente de potencia de corriente continua de 250 V, determinar el tiempo que tarda la corriente en alcanzar (*a*) 10 A y (*b*) 30 A.

65 •• **HOJA DE CÁLCULO** Dado el circuito de la figura 28.55, suponer que el interruptor S se ha cerrado durante un largo tiempo, de modo que existen corrientes estacionarias en el inductor y que su resistencia es despreciable. (*a*) Determinar la intensidad de corriente suministrada por la batería, la intensidad que circula por la resistencia de 100 Ω y la intensidad que circula por el inductor. (*b*) Determinar el voltaje inicial entre los extremos del inductor cuando se abre el interruptor *S*. (*c*) Utilizando una hoja de cálculo, representar gráficamente la corriente y el voltaje en función del tiempo durante el periodo de tiempo en el que el interruptor está abierto. SSM

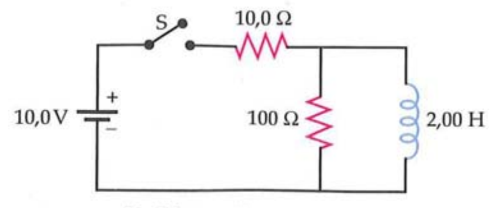


FIGURA 28.55 Problema 65

66 •• En el circuito de la figura 28.56, el inductor tiene resistencia interna despreciable y el interruptor S se abre durante un tiempo suficientemente largo. Si se cierra en un instante dado: (*a*) Determinar la corriente en la batería, en la resistencia de 100 ohms y en el inductor inmediatamente después de que el interruptor se cierra. Tras mantenerlo cerrado un tiempo largo, abrimos el interruptor. (*b*) Determinar la corriente en la batería, en la resistencia de 100 ohms y en la autoinducción cuando transcurre suficiente tiempo desde que se cierra el interruptor. (*c*) Hallar la corriente en la batería, en la resistencia de 100 ohms y en el inductor en el instante en el que se abre el interruptor. (*d*) Determinar la corriente en la batería, resistencia e inductor cuando el interruptor permanece abierto durante largo tiempo.

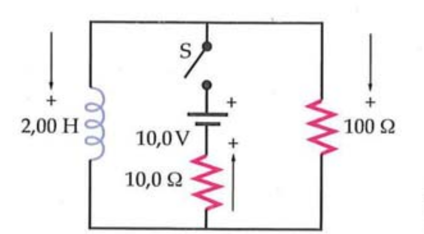


FIGURA 28.56 Problema 66

67 •• Una inductancia *L* y dos resistencias *R* se conectan en serie con una batería como indica la figura 28.57. Un tiempo largo después de cerrar el interruptor S_1, la intensidad de la corriente es de 2,5 A. Cuando la batería queda fuera del circuito al abrir el interruptor S_1 y cerrar S_2, la corriente cae a 1,5 A en 45 ms. (*a*) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito? (*b*) Si $R = 0{,}4\ \Omega$, ¿cuánto vale *L*?

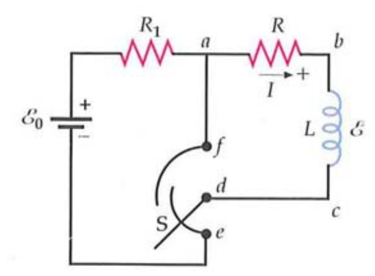


FIGURA 28.57 Problema 67

68 •• Se conectan en serie una bobina de autoinducción 5,00 mH y resistencia interna 15,0 ohms, una batería ideal de 12,0 V y un interruptor (figura 28.58). En $t = 0$, el interruptor está cerrado. Determinar el tiempo necesario para que la variación de energía disipada en la autoinducción sea igual a la variación de la energía magnética almacenada en la bobina.

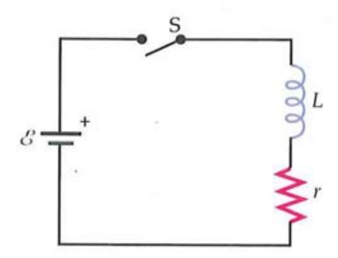


FIGURA 28.58 Problema 68

69 ••• En el circuito de la figura 28.54, sea $\mathscr{E}_0 = 12$ V, $R = 3\ \Omega$, y $L = 0{,}6$ H. El interruptor está cerrado en el instante $t = 0$. Desde el instante $t = 0$ a $t = t$, hallar (*a*) la energía total suministrada por la batería, (*b*) la energía total disipada en la resistencia y (*c*) la energía almacenada en la bobina. (*Sugerencia: hallar la velocidad de variación en función del tiempo e integrar.*) SSM

PROBLEMAS GENERALES

70 • Una bobina de 100 vueltas tiene un radio de 4 cm y una resistencia de 25 Ω. (*a*) ¿A qué velocidad deberá variar un campo magnético perpendicular a la bobina para producir en ella una corriente de 4 A? (*b*) ¿Cómo debe variar el campo magnético con el tiempo si éste forma un ángulo de 20° con la normal al plano de la bobina?

71 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La bobina rectangular de un generador de corriente alterna de dimensiones a y b tiene N vueltas. Esta bobina se conecta a unos anillos colectores (figura 28.59) y gira con una velocidad angular ω en el interior de un campo magnético uniforme B. (*a*) Demostrar que la diferencia de potencial entre los dos anillos es $\mathscr{E} = NBab\omega \text{ sen } \omega t$. (*b*) Si $a = 1$ cm, $b = 2$ cm, $N = 1000$ y $B = 2$ T, ¿con qué frecuencia angular ω deberá hacerse girar la bobina para generar una fem cuyo máximo valor sea 110 V? SSM

72 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Antes de 1960, la intensidad del campo magnético se medía con un gausímetro que disponía de una pequeña bobina de muchas vueltas que giraba alrededor de un eje perpendicular al campo magnético a gran velocidad y que estaba conectada a un voltímetro de ac por medio de anillos colectores como los que se muestran en la figura 28.59. Supongamos que esta bobina tiene 400 vueltas y un área de 1,4 cm^2. La bobina gira a razón de 180 rpm. Si la intensidad del campo magnético es 0,45 T, determinar la máxima fem inducida en la bobina y la orientación que ésta debe tener respecto al campo para que tenga lugar la fem máxima.

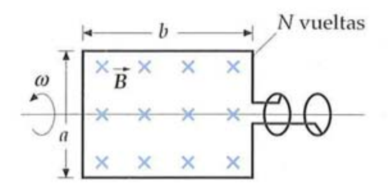


FIGURA 28.59 Problemas 71 y 72

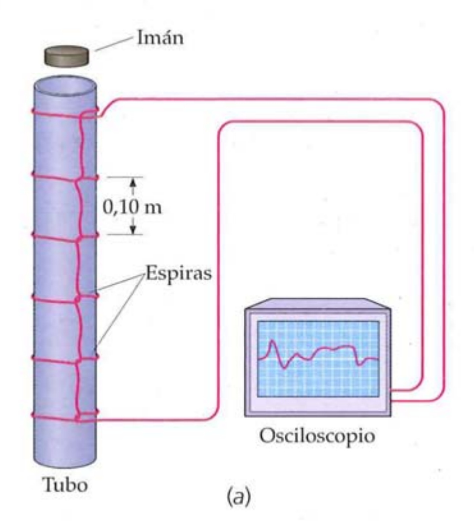
73 •• Demostrar que en el caso de dos bobinas L_1 y L_2 conectadas en serie, de tal modo que ninguno de los flujos de una de ellas atraviese a la otra, la autoinducción efectiva viene dada por $L_{ef} = L_1 + L_2$. (Decir que no hay flujo de acoplamiento entre ellas equivale a decir que la inductancia mutua entre las bobinas es cero.)

74 •• Demostrar que la inductancia efectiva de dos inductores L_1 y L_2 conectados en paralelo, de tal forma que el flujo de cualquiera de ellos no pase a través del otro, viene dado por $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ (Decir que no existe flujo de conexión entre ellos equivale a decir que la inducción mutua es cero.)

75 •• Un circuito está formado por una batería de 12 V, un interruptor y una bombilla conectados todos ellos en serie. La corriente mínima de funcionamiento de la bombilla es de 0,10 A y consume 2,0 W cuando el interruptor lleva cerrado tiempo suficiente. Se pone una autoinducción en serie con los demás elementos del circuito. Si la bombilla comienza a brillar 3,5 ms después de cerrar el interruptor, ¿cuál es el valor de la autoinducción del inductor? Despreciar el tiempo de calentamiento del filamento de la bombilla y asumir que su máximo brillo se observa cuando la corriente alcanza el valor umbral de 0,1 A.

76 •• Sea una bobina con 100 000 vueltas que gira alrededor de un eje en el plano que corta a la bobina por su centro. La bobina es perpendicular al campo magnético terrestre en una región del espacio donde la intensidad de este campo es 300 G. Las espiras de la bobina son de 0,25 cm de radio y el hilo total de la bobina tiene una resistencia eléctrica despreciable. (*a*) Si el giro de la bobina es de 150 rev/s, ¿cuál es el máximo de corriente que circulará por una resistencia de 1500 ohms conectada a los terminales de la bobina? (*b*) La media del cuadrado de la corriente es igual a la mitad del cuadrado de la corriente máxima. ¿Cuál será la potencia media por la resistencia? *Ayuda: para mantener la bobina girando se tiene que consumir energía.*

77 •• Con el sistema de la figura 28.60*a* mostramos un experimento diseñado para medir la aceleración de la gravedad. Un tubo de plástico largo es rodeado por un hilo formando espiras separadas entre sí 10 cm. Un imán con intenso campo magnético se deja caer desde el extremo superior del tubo. Según va cayendo el imán atravesando cada una de las espiras, el voltaje aumenta y después se hace rápidamente cero, pasa a tener un valor negativo grande y vuelve otra vez de forma continua a acercarse a cero. La forma de la señal recogida se muestra en le figura 28.60*b*. (*a*) Explicar el resultado del experimento. (*b*) ¿Por qué el tubo no puede ser construido con un material conductor? (*c*) Explicar cualitativamente la forma de la señal recogida en la figura 28.60*b*. (*d*) En la tabla de la página siguiente se recogen los tiempos en que el voltaje se hace cero según cae el imán y atraviesa cada espira. Utilizar estos datos para calcular g. SSM



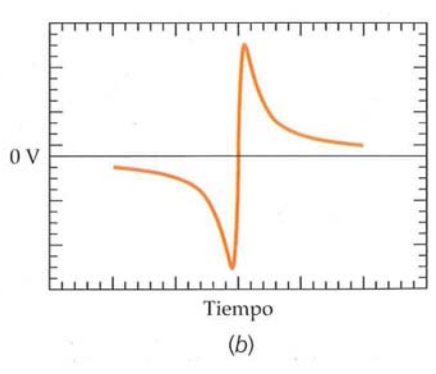


FIGURA 28.60 Problema 77

Número de espira	Tiempo en que $V = 0$
1	0,011189
2	0,063133
3	0,10874
4	0,14703
5	0,18052
6	0,21025
7	0,23851
8	0,26363
9	0,28853
10	0,31144
11	0,33494
12	0,35476
13	0,37592
14	0,39107

78 •• La bobina rectangular de la figura 28.61 tiene 80 vueltas y sus dimensiones son 25 cm de anchura y 30 cm de longitud. Está localizada en un campo magnético $B = 1{,}4$ T dirigido hacia fuera de la página como se indica, ocupando sólo la mitad de la bobina la región del campo magnético. La resistencia de la bobina es de 24 Ω. Determinar el módulo y sentido de la corriente inducida si la bobina se mueve con una velocidad de 2 m/s (*a*) hacia la derecha, (*b*) hacia arriba, (*c*) hacia la izquierda y (*d*) hacia abajo.

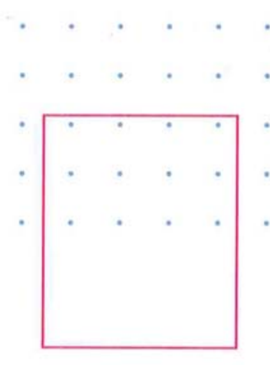


FIGURA 28.61 Problema 78

79 •• Un solenoide largo posee n vueltas por unidad de longitud y transporta una corriente dada $I = I_0$ sen ωt. El solenoide tiene una sección transversal circular de radio R. Determinar el campo eléctrico inducido en un radio r medido desde el eje del solenoide para (*a*) $r < R$ y (*b*) $r > R$. SSM

80 ••• Un cable coaxial se compone de dos cilindros conductores de paredes muy delgadas cuyos radios son r_1 y r_2 (figura 28.62). La corriente I circula en un sentido por el cilindro interior y en sentido contrario por el exterior. (*a*) Utilizar la ley de Ampère para hallar B y demostrar que $B = 0$ excepto en la región comprendida entre los conductores. (*b*) Demostrar que la densidad de energía magnética en la región comprendida entre los cilindros es $u_m = \frac{1}{2}(\mu_0/4\pi)I^2/(\pi r^2)$. (*c*) Hallar la energía magnética de un elemento de volumen de la corteza cilíndrica de longitud ℓ y volumen $dV = \ell_2 pr\, dr$ e integrar el resultado para demostrar que la energía magnética total en el volumen de longitud ℓ comprendido entre los cilindros es $U_m = (\mu_0/4\pi)I^2\ell \ln(r_2/r_1)$. (*d*) Utilizar el resultado del apartado (*c*) para demostrar que la autoinducción por unidad de longitud es $L/\ell = (\mu_0/2\pi)\ln(r_2/r_1)$.

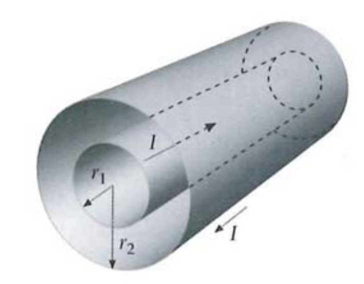


FIGURA 28.62 Problema 80

81 ••• Un cable coaxial está formado por dos cáscaras cilíndricas de pequeño grosor cuyos radios son radios r_1 y r_2 (figura 28.63). Las corrientes en ambas cáscaras circulan con direcciones opuestas pero son de igual intensidad. Calcular el flujo a través del área rectangular de lados l y $r_1 - r_1$ entre los dos conductores, tal como queda dibujado en la figura 28.63. Utilizar la relación entre flujo y corriente ($\phi_m = LI$) para demostrar que la autoinductancia por unidad de longitud viene dada por la expresión $L/\ell = (\mu_0/2\pi)\ln(r_2/r_1)$.



FIGURA 28.63 Problema 81

82 ••• HOJA DE CÁLCULO La figura 28.64 muestra una espira rectangular de alambre de 0,30 m de anchura y 1,50 m de longitud, en el plano vertical y perpendicular a un campo magnético uniforme $B = 0{,}40$ T dirigido hacia dentro tal como se indica en la figura. La porción de espira que no se encuentra en el campo magnético tiene 0,10 m de longitud. La resistencia de la espira es 0,20 Ω y su masa 0,05 kg. La espira se deja libre desde el reposo en el tiempo $t = 0$. (*a*) ¿Cuál es el módulo y sentido de la corriente inducida cuando la velocidad de la espira hacia abajo es v? (*b*) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre la espira por causa de esta corriente? (*c*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la espira? (*d*) Escribir la segunda ley de Newton aplicada a la espira. (*e*) Deducir una expresión para la velocidad de la espira en función del tiempo. (*f*) Integrar la expresión obtenida en el apartado (*e*) para calcular el desplazamiento en función del tiempo. (*g*) Utilizando una hoja de cálculo, representar gráficamente la posición y de la espira en función del tiempo para valores de y entre 0 y 1,4 m (correspondiente al momento en que la espira abandona el campo magnético). ¿En qué instante t es $y = 1{,}4$ cm? Comparar el resultado con el que se habría obtenido si $B = 0$.

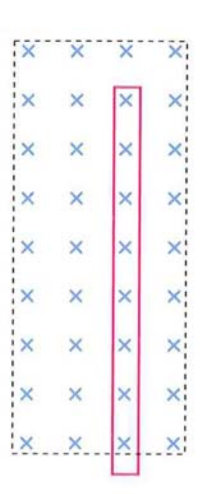


FIGURA 28.64 Problema 82

83 ••• Una bobina de N vueltas y área A cuelga de un hilo que proporciona un momento de torsión cuya constante es k. Los dos extremos de la bobina se conectan entre sí, teniendo una resistencia R y un momento de inercia I. El plano de la bobina es vertical y paralelo a un campo magnético uniforme horizontal cuando el hilo no está girado (es decir, para $\theta = 0$). Se gira la bobina y se la libera desde un ángulo pequeño de $\theta = \theta_0$. Demostrar que la orientación de la bobina sufrirá un movimiento oscilatorio armónico amortiguado según la ley de evolución temporal dada por la función $\theta(t) = \theta_0 \exp^{-\beta t} \cos \omega t$, donde $\tau = RI/(NBA)^2$, $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y $\omega' = \omega_0\sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^{-2}}$.



CAPÍTULO

29

ESTA RADIOYENTE INTENTA SINTONIZAR SU EMISORA DE RADIO FAVORITA. PARA ELLO, VA MODIFICANDO LA FRECUENCIA RESONANTE DE UN CIRCUITO ELÉCTRICO OSCILANTE QUE SE ENCUENTRA EN EL SINTONIZADOR. DE ESTA FORMA, ÚNICAMENTE LA FRECUENCIA SELECCIONADA QUEDA AMPLIFICADA. *(© Roger Ressmeyer/Corbis.)*

Circuitos de corriente alterna

- 29.1 Corriente alterna en una resistencia
- 29.2 Circuitos de corriente alterna
- *29.3 El transformador
- *29.4 Circuitos *LC* y *LCR* sin generador
- *29.5 Fasores
- *29.6 Circuitos *LCR* con generador

? ¿Qué componente del circuito se modifica cuando mueve el dial? Ampliemos nuestros conocimientos sobre las funciones del sintonizador de radio. (Véase el ejemplo 29.11.)

Más del 99 por ciento de la energía eléctrica utilizada hoy en día se produce mediante generadores eléctricos de corriente alterna, la cual tiene la gran ventaja sobre la corriente continua de que la energía eléctrica puede transportarse a grandes distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas para reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Luego puede transformarse, con pérdidas mínimas de energía, en tensiones más bajas y seguras, con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario.* El funcionamiento de los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente se basa en la inducción magnética. En Norteamérica, la potencia eléctrica se suministra mediante una corriente sinusoidal de 60 Hz, mientras que en prácticamente todo el resto del mundo la frecuencia es de 50 Hz. Hay muchos aparatos, como las radios, los equipos de televisión y los hornos de microondas que detectan o generan corrientes alternas de frecuencias mucho más altas.

La corriente alterna se genera fácilmente mediante inducción magnética en los generadores de ac, diseñados para producir una fem sinusoidal.

* La corriente continua con alto voltaje se usa, en algunas ocasiones, para transmitir potencia eléctrica entre dos puntos distantes. Sin embargo, la corriente alterna se usa siempre para transmitir potencia eléctrica desde un punto a dos o más puntos distantes.

En este capítulo, veremos que, cuando es sinusoidal la salida de un generador, es también sinusoidal la corriente en un inductor, un condensador o una resistencia, aunque generalmente no estén en fase con la fem del generador. Cuando tanto la fem como la corriente son sinusoidales, pueden relacionarse fácilmente entre sí sus valores máximos. El estudio de las corrientes sinusoidales es importante porque incluso las corrientes que no lo son pueden analizarse en función de sus componentes sinusoidales utilizando el análisis de Fourier.

29.1 CORRIENTE ALTERNA EN UNA RESISTENCIA

La figura 29.1 muestra un generador simple de corriente alterna. Un análisis de este tipo de generador se presenta en el capítulo 28. La fem generada en este sistema viene dada por la ecuación que sigue inmediatamente a la 28.10.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t \qquad 29.1$$

donde ω es la velocidad angular de la bobina. (La ecuación 28.10 presenta la fem proporcional a sen ωt en lugar de ωt. La diferencia entre la opción seno y la de coseno está en la elección del origen de tiempos, es decir, cuando $t = 0$.) Si la bobina de N vueltas tiene área A, y el campo magnético es uniforme y su módulo es B, el máximo de la fem viene dado por ωNBA. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, todos ellos producen fem sinusoidales, bien por inducción o por movimiento de los circuitos (fem en movimiento). En los diagramas de circuitos, un generador de corriente alterna se representa por el símbolo ⊙.

La figura 29.2 muestra un circuito simple de corriente alterna que consiste en un generador ideal y una resistencia. (Se dice que un generador es ideal si su resistencia interna, su autoinducción y capacitancia o impedancia capacitiva son despreciables.) La caída de potencial a través de la resistencia V_R es igual a la fem $\mathcal{E}$ del generador. Si el generador produce una fem dada por la ecuación 29.1, se tiene que

$$V_R = V_{R\,\text{máx}} \cos \omega t$$

Aplicando la ley de Ohm, tenemos

$$V_R = IR \qquad 29.2$$

Por lo tanto,

$$V_{R\,\text{máx}} \cos \omega t = IR \qquad 29.3$$

y la corriente en la resistencia es

$$I = \frac{V_{R\,\text{máx}}}{R} \cos \omega t = I_{\text{máx}} \cos \omega t \qquad 29.4$$

donde

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{R\,\text{máx}}}{R} \qquad 29.5$$

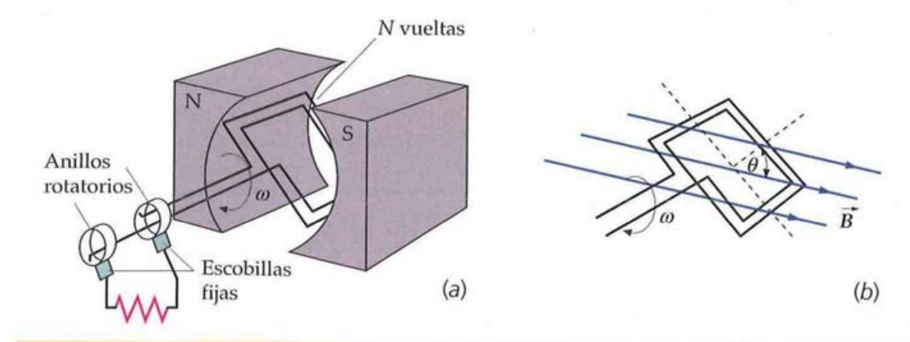


FIGURA 29.1 (*a*) Generador de ac. Una bobina que gira con frecuencia angular constante ω en un campo magnético $\vec{B}$ genera una fem sinusoidal. La energía procedente de un salto de agua o de una turbina de vapor se utiliza para hacer girar la bobina y producir energía eléctrica. La fem se suministra a un circuito externo mediante las escobillas en contacto con los anillos. (*b*) En este instante, la normal al plano de la espira forma un ángulo θ con el campo magnético, y el flujo que atraviesa la superficie plana de la espira es $BA \cos \theta$.

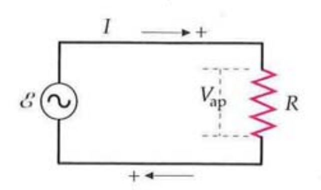
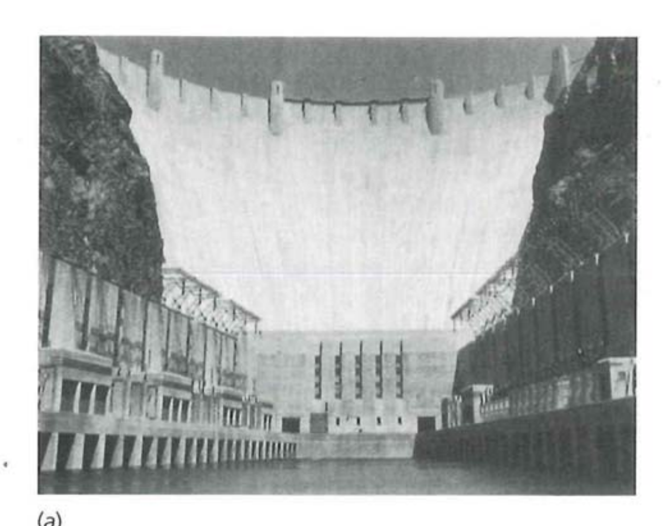
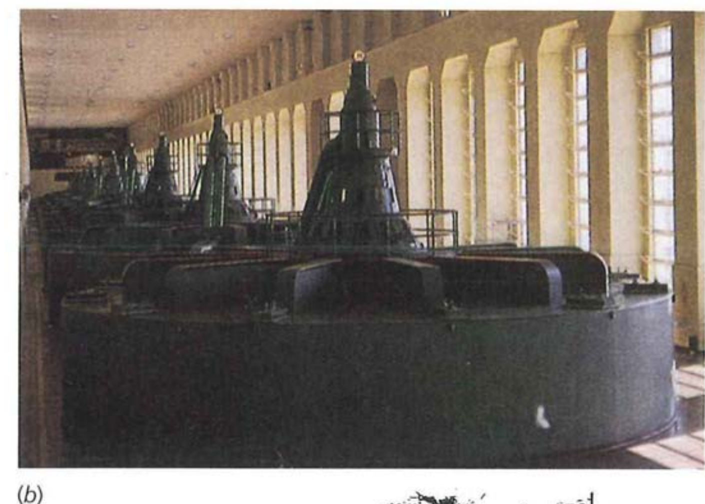


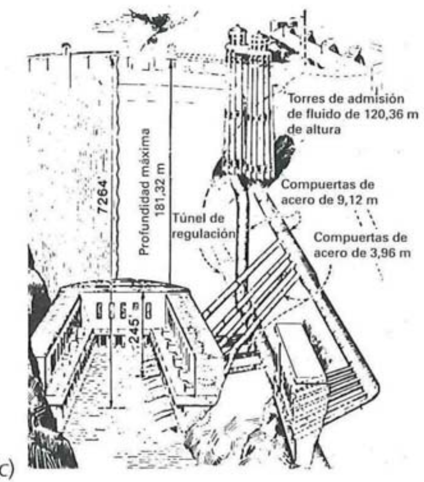
FIGURA 29.2 Generador de ac en serie con una resistencia R.



(a)



(b)



(c)

(*a*) La energía mecánica del salto de agua activa las turbinas (*b*) para la generación de electricidad. (*c*) Dibujo esquemático de la presa de Hoover que muestra las torres de entrada y las tuberías que transportan el agua a los generadores en la parte baja. *((a) Gentileza de U.S. Department of the Interior, Department of Reclamation. (b) © Lee Langum/ Photo Researchers, Inc.)*

Obsérvese que la corriente que circula por la resistencia está en fase con la tensión aplicada a la misma, como puede verse en la figura 29.3.

La potencia disipada en la resistencia varía con el tiempo. Su valor instantáneo es

$$P = I^2R = (I_{\text{máx}} \cos \omega t)^2 R = I^2_{\text{máx}} R \cos^2 \omega t \qquad 29.6$$

En la figura 29.4, puede verse una representación de la potencia en función del tiempo. Varía desde cero hasta su valor máximo $I^2_{\text{máx}}$. Normalmente, nos interesa la potencia media a lo largo de uno o más ciclos:

$$P_{\text{m}} = (I^2R)_{\text{m}} = I^2_{\text{máx}} R (\cos^2 \omega t)_{\text{m}}$$

El valor medio de $\cos^2\omega t$ en uno o más periodos es $\frac{1}{2}$. Esto puede verse fácilmente a partir de la identidad $\cos^2 \omega t + \text{sen}^2 \omega t = 1$. La representación del $\text{sen}^2 \omega t$ tiene el mismo aspecto que la del $\cos^2 \omega t$, pero está desplazada en 90°. Ambas tienen el mismo valor medio en uno o más periodos y, como su suma es 1, el valor medio de cada una de ellas debe ser $\frac{1}{2}$. La potencia media disipada en la resistencia es, por lo tanto,

$$P_{\text{m}} = (I^2R)_{\text{m}} = \frac{1}{2} I^2_{\text{máx}} R \qquad 29.7$$

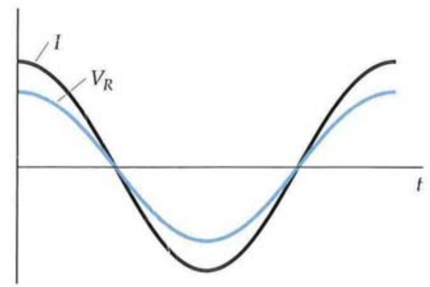


FIGURA 29.3 La caída de potencial a través de la resistencia está en fase con la corriente.

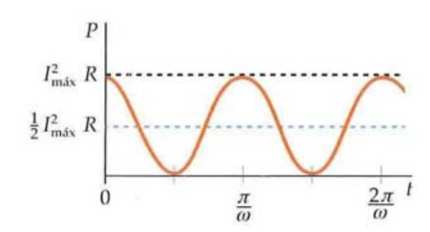


FIGURA 29.4 Representación gráfica de la potencia disipada en la resistencia de la figura 29.2 en función del tiempo. La potencia varía desde cero a un valor máximo $I^2_{\text{máx}} R$. La potencia media es la mitad de la potencia máxima.

VALORES EFICACES

La mayoría de los amperímetros y voltímetros de ac están diseñados para medir **valores eficaces** de la corriente o de la tensión en lugar de los valores máximos o de pico. Su valor es la raíz cuadrada del valor cuadrático medio respectivo. Así, el valor eficaz de una corriente es

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{(I^2)_{\text{m}}} \qquad 29.8$$

DEFINICIÓN: CORRIENTE EFICAZ

Para una corriente sinusoidal, el valor medio de I^2 es

$$(I^2)_m = \left[(I_{máx}\cos\omega t)^2\right]_m = \frac{1}{2}I^2_{máx}$$

Sustituyendo $\frac{1}{2}I^2_{máx}$ en lugar de $(I^2)_m$ en la ecuación 29.11, se obtiene

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_{máx} \approx 0{,}707I_{máx} \qquad 29.9$$

RELACIÓN ENTRE LOS VALORES MÁXIMO Y EFICAZ DE LA CORRIENTE

El valor eficaz de cualquier magnitud que varía sinusoidalmente con el tiempo es igual al valor máximo de dicha magnitud dividido por $\sqrt{2}$.

Sustituyendo $(I_{ef})^2$ en lugar de $\frac{1}{2}I^2_{máx}$ en la ecuación 29.10, se obtiene para la potencia disipada en la resistencia el valor

$$P_m = (I_{ef})^2R \qquad 29.10$$

El valor eficaz de la corriente es igual al valor de la corriente continua constante que produciría el mismo calentamiento Joule que la corriente alterna.

> ! La corriente eficaz es igual a la corriente continua estacionaria que disiparía el mismo calor que la corriente alterna real.

Para el circuito sencillo de la figura 29.2, la potencia media aportada por el generador es:

$$P_m = (\mathcal{E}I)_m = \left[\left(\mathcal{E}_{máx}\cos\omega t\right)\left(I_{máx}\cos\omega t\right)\right]_m = \mathcal{E}_{máx}I_{máx}(\cos^2\omega t)_m$$

o bien,

$$P_m = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{máx}I_{máx}$$

Utilizando $I_{ef} = I_{máx}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_{máx}/\sqrt{2}$, puede expresarse así

$$P_m = \mathcal{E}_{ef}I_{ef} \qquad 29.11$$

POTENCIA MEDIA SUMINISTRADA POR UN GENERADOR

La corriente eficaz está relacionada con la caída de potencial eficaz de la misma forma que la corriente máxima está relacionada con la caída de potencial máxima. Puede verse esto dividiendo cada miembro de la ecuación 29.5 por $\sqrt{2}$, y utilizando $I_{ef} = I_{máx}/\sqrt{2}$ y $V_{R\,ef} = V_{R\,máx}/\sqrt{2}$.

$$I_{ef} = \frac{V_{R\,ef}}{R} \qquad 29.12$$

Las ecuaciones 29.10, 29.11 y 29.12 tienen la misma forma que las ecuaciones correspondientes a los circuitos de corriente continua, sustituyendo en estas últimas I por I_{ef} y V_R por $V_{R\,ef}$. Así pues, si utilizamos valores eficaces para la corriente y la caída de potencial, podemos calcular la potencia y el calor generado empleando las mismas ecuaciones obtenidas en corriente continua.

PROBLEMA PRÁCTICO 29.1

Se conecta una resistencia de 12 W a una caída de potencial sinusoidal que tiene un valor máximo de 48 V. Hallar (*a*) la corriente eficaz, (*b*) la potencia media y (*c*) la potencia máxima.

La potencia de ac suministrada a las viviendas en los Estados Unidos tiene una frecuencia de 60 Hz y un voltaje eficaz de 120 V. Este voltaje se mantiene, independientemente de la corriente que circule. Si se enchufa una estufa de 1600 W, consumirá una corriente de

$$I_{ef} = \frac{P_m}{V_{ef}} = \frac{1600\text{ W}}{120\text{ V}} = 13{,}3\text{ A}$$

Todos los aparatos enchufados a las tomas de corriente de un único circuito de 120 V están conectados en paralelo. Si se enchufa un tostador de 500 W en otro punto del

mismo circuito, extraerá una corriente de 500 W/120 V = 4,17 A, de modo que la corriente total a través de la asociación en paralelo será próxima a los 17,5 A. Las tomas de corriente domésticas suelen ser de unos 15 A y forman parte de un circuito que utiliza hilos que pueden soportar el paso de corrientes de entre 15 y 20 A, teniendo cada circuito varias tomas de corriente. Una corriente más elevada que la que puede soportar el circuito lo puede calentar demasiado, con riesgo de producirse fuego. Cada circuito dispone de un dispositivo controlador de corriente (con funciones similares a los fusibles de las casas antiguas) que salta, cortando el paso de la corriente, cuando ésta excede de los 15 o 20 A, que son los posibles límites del circuito.

Para algunas aplicaciones de alta potencia, como secadores eléctricos de ropa o calentadores de agua, se utilizan líneas independientes de potencia a 240 V. Para un consumo de potencia determinado, se requiere sólo aproximadamente la mitad de corriente a 240 V que a 120 V, pero la tensión de 240 V es mucho más peligrosa que la de 120 V.

Ejemplo 29.1 Señal en forma de diente de sierra

Determinar (*a*) la corriente media y (*b*) la corriente eficaz para la onda en forma de diente de sierra que se muestra en la figura 29.5. En la región $0 < t < T$, la corriente viene dada por $I = (I_0/T)t$.

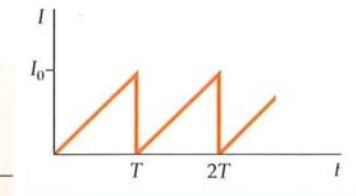


FIGURA 29.5

PLANTEAMIENTO El valor medio de cualquier magnitud en un intervalo de tiempo T es la integral de dicha magnitud en todo ese intervalo dividido por T. Utilizaremos esta definición tanto para la corriente media, I_m, como para la media de la corriente al cuadrado, $(I^2)_m$.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular I_m integrando I de $t = 0$ a $t = T$ y dividiendo por T:

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_0}{T}t\,dt = \frac{I_0}{T^2}\frac{T^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}I_0}$$

(*b*) 1. Determinar $(I^2)_m$ integrando I^2:

$$(I^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T I^2\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{I_0}{T}\right)^2\int_0^T t^2\,dt = \frac{I_0^2}{T^3}\frac{T^3}{3} = \frac{1}{3}I_0^2$$

2. La corriente eficaz es la raíz cuadrada del resultado anterior:

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m} = \boxed{\frac{I_0}{\sqrt{3}}}$$

COMPROBACIÓN Tanto la corriente media como la eficaz son menores que I_0, tal como era de esperar.

29.2 CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

El comportamiento de la corriente alterna en inductores y condensadores es muy diferente del que se tiene con corriente continua. Por ejemplo, cuando un condensador está en serie en un circuito de cc, la corriente se interrumpe por completo cuando al condensador está totalmente cargado, es decir, actúa como un circuito abierto. Pero si la corriente es alterna, la carga fluye continuamente entrando y saliendo alternativamente de las placas del condensador. Veremos que si la frecuencia de la corriente alterna es alta, un condensador casi no impide la circulación de la corriente, es decir, se comporta como un cortocircuito. Por el contrario, una bobina normalmente tiene una resistencia pequeña y, por lo tanto, es esencialmente un cortocircuito para la corriente continua. Pero cuando la corriente que circula por la bobina está cambiando continuamente, se genera una fuerza contraelectromotriz que es proporcional al ritmo de variación de la corriente, dI/dt. Para altas frecuencias, la fuerza contraelectromotriz es grande y el inductor actúa como un circuito abierto.

INDUCTORES EN CIRCUITOS DE ac

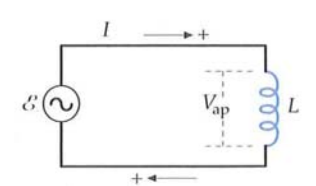


FIGURA 29.6 Generador de ac en serie con una bobina cuya inductancia es L. La flecha indica el sentido positivo a lo largo del cable. Obsérvese que para un valor positivo de dI/dt, la caída de potencial V_L en los extremos de la bobina es positiva. Es decir, si se atraviesa la bobina en el sentido de la flecha, se va en el sentido decreciente del potencial.

La figura 29.6 muestra una bobina inductora en serie con un generador de corriente alterna. Cuando la corriente crece en el inductor, se crea en éste una fuerza contraelectromotriz de valor $L\,dI/dt$ debido a la variación de flujo. Normalmente,

esta fem es mucho mayor que la caída IR debida a la resistencia de la bobina y, por lo tanto, podemos despreciar esta resistencia. La caída de voltaje a través del inductor V_L viene dada entonces por

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \qquad 29.13$$

CAÍDA DE POTENCIAL A TRAVÉS DE UN INDUCTOR IDEAL

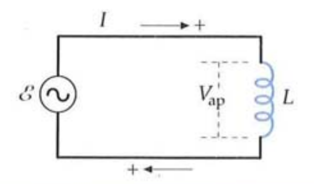


FIGURA 29.6 *(repetido)* Generador de ac en serie con una bobina cuya inductancia es L. La flecha indica el sentido positivo a lo largo del cable. Obsérvese que para un valor positivo de dI/dt, la caída de potencial V_L en los extremos de la bobina es positiva. Es decir, si se atraviesa la bobina en el sentido de la flecha, se va en el sentido decreciente del potencial.

En este circuito, la caída de potencial V_L a través del inductor es igual a la fem $\mathcal{E}$ del generador. Esto es,

$$V_L = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{máx} \cos \omega t = V_{L\,máx} \cos \omega t$$

donde $V_{L\,máx} = \mathcal{E}_{máx}$. Sustituyendo V_L en la ecuación 29.16, se obtiene

$$V_{L\,máx} \cos \omega t = L\frac{dI}{dt} \qquad 29.14$$

Reordenando, se llega a

$$dI = \frac{V_{L\,máx}}{L} \cos \omega t \, dt \qquad 29.15$$

El valor de la corriente I se obtiene integrando ambos miembros de esta ecuación:

$$I = \frac{V_{L\,máx}}{L} \int \cos \omega t \, dt = \frac{V_{L\,máx}}{\omega L} \operatorname{sen} \omega t + C \qquad 29.16$$

donde la constante de integración C es la componente de cc de la corriente. Escogiendo la componente de cc de la corriente igual a cero, resulta

$$I = \frac{V_{L\,máx}}{\omega L} \operatorname{sen} \omega t = I_{máx} \operatorname{sen} \omega t \qquad 29.17$$

donde

$$I_{máx} = \frac{V_{L\,máx}}{\omega L} \qquad 29.18$$

La corriente $I = I_{máx}$ sen ωt está desfasada 90° respecto al voltaje a través del inductor, $V_L = V_{L\,máx}$ cos ωt. En la figura 29.7, que muestra I y V_L en función del tiempo, podemos ver que el valor máximo del voltaje ocurre 90° (o sea, un cuarto de periodo) antes que el correspondiente valor máximo de la corriente. Se dice que la caída de voltaje a través del inductor *adelanta a la corriente en 90°*. Podemos comprender esto físicamente. Cuando I es cero, pero está decreciendo, dI/dt es mínimo, de modo que la fem inducida por la bobina V_L pasa por un valor máximo. Un cuarto de ciclo después, I es máximo. En ese momento, dI/dt es cero, de modo que V_L es cero. Usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$, donde $\theta = \omega t$, la ecuación 29.17 puede expresarse como

$$I = I_{máx} \cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) \qquad 29.19$$

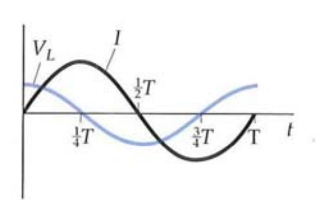


FIGURA 29.7 La corriente y la tensión a través de la bobina de la figura 29.6 en función del tiempo. La tensión máxima aparece un cuarto de periodo antes que se presente el máximo de la corriente. Así pues, se dice que la tensión adelanta a la corriente en un cuarto de periodo o 90°.

La relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en el caso de una bobina, puede expresarse de una forma semejante a la ecuación 29.12 correspondiente a una resistencia. A partir de la ecuación 29.18, tenemos

$$I_{máx} = \frac{V_{L\,máx}}{\omega L} = \frac{V_{L\,máx}}{X_L} \qquad 29.20$$

donde

$$X_L = \omega L \qquad 29.21$$

DEFINICIÓN: REACTANCIA O IMPEDANCIA INDUCTIVA

se denomina **reactancia inductiva** (o también impedancia inductiva). Como $I_{ef} = I_{máx}/\sqrt{2}$ y $V_{L\,ef} = V_{L\,máx}/\sqrt{2}$, la corriente eficaz viene dada por

$$I_{ef} = \frac{V_{L\,ef}}{X_L} \qquad 29.22$$

Al igual que la resistencia, la reactancia inductiva tiene unidades de ohm. Como puede verse en la ecuación 29.22, cuanto mayor sea la reactancia para una caída de potencial dada, menor es la corriente máxima. A diferencia de la resistencia, la reactancia inductiva depende de la frecuencia de la corriente: cuanto mayor es la frecuencia, mayor es la reactancia.

La potencia *instantánea* cedida a la bobina por el generador es

$$P = V_L I = (V_{L\,máx} \cos\omega t)(I_{máx} \operatorname{sen}\omega t) = V_{L\,máx} I_{máx} \cos\omega t \operatorname{sen}\omega t$$

y la potencia *media* correspondiente es nula. Puede verse utilizando la identidad trigonométrica

$$2 \cos\omega t \operatorname{sen}\omega t = \operatorname{sen} 2\omega t$$

El valor de sen $2\omega t$ oscila dos veces durante cada ciclo siendo negativo la mitad del tiempo y positivo la otra mitad. Por lo tanto, en término medio, la bobina no disipa ninguna energía. (Esto resulta cierto sólo si puede despreciarse la resistencia de la bobina.)

Ejemplo 29.2 Reactancia inductiva

La caida de potencial entre los extremos de una bobina de 40 mH es sinusoidal, con una amplitud de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente eficaz cuando la frecuencia es (*a*) 60 Hz y (*b*) 2000 Hz.

PLANTEAMIENTO Calculamos la reactancia inductiva para cada frecuencia y utilizamos la ecuación 29.20 para determinar la corriente máxima.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La corriente eficaz es igual a la caída de potencial eficaz dividida por la reactancia inductiva. La caída de potencial es igual a la fem:

$$I_{ef} = \frac{V_{L\,ef}}{X_L}$$

2. Calcular la reactancia inductiva a 60 Hz:

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60{,}0\text{ Hz})(40{,}0 \times 10^{-3}\text{ H}) = \boxed{15{,}1\ \Omega}$$

3. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente eficaz a 60 Hz:

$$I_{1\,ef} = \frac{120\text{ V}}{15{,}1\ \Omega} = \boxed{7{,}95\text{ A}}$$

(*b*) 1. Calcular la reactancia inductiva a 2000 Hz:

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = (2\pi)(2000\text{ Hz})(40{,}0 \times 10^{-3}\text{ H}) = \boxed{503\ \Omega}$$

2. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente eficaz a 2000 Hz:

$$I_{2\,ef} = \frac{120\text{ V}}{503\ \Omega} = \boxed{0{,}239\text{ A}}$$

COMPROBACIÓN La corriente eficaz a 2000 Hz es alrededor del 3% de la correspondiente a 60 Hz. Este resultado es el que cabía esperar porque el inductor tiene un comportamiento similar a un circuito abierto según aumenta la frecuencia.

CONDENSADORES EN CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Cuando un condensador se conecta entre los terminales de un generador de ac (figura 29.8), la caída de voltaje a través del condensador es

$$V_C = \frac{Q}{C} \qquad 29.23$$

donde Q es la carga de la placa con carga positiva del condensador en las condiciones mostradas en la figura 29.8.

En este circuito, la diferencia de potencial V_C a través del condensador es igual a la fem $\mathcal{E}$ del generador. Esto es,

$$V_C = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos\omega t = V_{C\,\text{máx}} \cos\omega t$$

donde $V_{C\,\text{máx}} = \mathcal{E}_{\text{máx}}$. Sustituyendo V_C en 29.26, obtenemos que Q es

$$Q = V_C C = V_{C\,\text{máx}} C \cos\omega t = Q_{\text{máx}} \cos\omega t$$

La corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_{\text{máx}} \operatorname{sen}\omega t = -I_{\text{máx}} \operatorname{sen}\omega t$$

donde

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_{\text{máx}} \qquad 29.24$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = -\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$, en donde $\theta = \omega t$, se tiene

$$I = -\omega Q_{\text{máx}} \operatorname{sen}\omega t = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) \qquad 29.25$$

La caída de potencial V_C a través de un condensador está en fase con la carga Q (ecuación 29.23); así, de forma semejante al caso del inductor, el voltaje a través del condensador está desfasado 90º con respecto a la corriente del circuito. En la figura 29.9, puede verse que el valor máximo del voltaje se presenta 90º o un cuarto de periodo después de aparecer el valor máximo de la corriente. Así pues, la caída de tensión en un condensador está retrasada respecto a la corriente en 90º. De nuevo, la explicación física es sencilla. La carga Q es proporcional a la caída de potencial V_C. La máxima variación del crecimiento de la carga $dQ/dt = I$ debe ocurrir cuando la carga Q sea nula y, por lo tanto, V_C sea cero. Al aumentar la carga sobre la placa del condensador, la corriente disminuye hasta que, un cuarto de periodo después, la carga es máxima y la corriente es cero. Entonces, la corriente se hace negativa cuando la carga Q disminuye.

Una vez más, podemos relacionar la corriente con la caída de potencial de un modo semejante al de la ecuación 29.5 correspondiente a una resistencia. A partir de la ecuación 29.24, se tiene

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_{\text{máx}} = \omega C V_{C\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{1/(\omega C)} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_C}$$

y análogamente,

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{C\,\text{ef}}}{X_C} \qquad 29.26$$

donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad 29.27$$

DEFINICIÓN: REACTANCIA O IMPEDANCIA CAPACITIVA

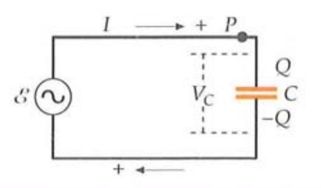


FIGURA 29.8 Generador de ac en serie con un condensador de capacidad C. El sentido positivo a lo largo del circuito es tal que cuando la corriente es positiva, la carga Q de la placa superior del condensador aumenta, de modo que la corriente y la carga se relacionan por $I = dQ/dt$.

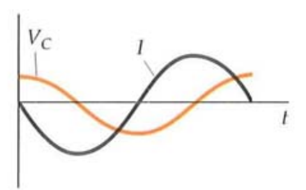


FIGURA 29.9 Corriente y tensión en un condensador como el de la figura 29.8 en función del tiempo. La tensión máxima se produce un cuarto de periodo después de presentarse la corriente máxima. Así, se dice que la tensión se retrasa respecto a la corriente en 90º.

es la denominada **reactancia capacitiva** del circuito (a menudo llamada también impedancia capacitiva). Como la resistencia y la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva se expresa en ohms y, al igual que la reactancia inductiva, depende de la frecuencia de la corriente. En este caso, cuanto mayor es la frecuencia, menor es la reactancia. Como sucede con una bobina, la potencia media que un generador de ac suministra a un condensador es cero. Esto se debe a que en un condensador la caída de potencial es proporcional a cos ωt y la corriente lo es a sen ωt, de forma que $(\cos \omega t \operatorname{sen} \omega t)_m = 0$. Así pues, igual que las bobinas, los condensadores ideales no disipan energía.

Como la carga no puede pasar a través del espacio que existe entre las placas de un condensador, puede parecer extraño que aparezca una corriente alterna de forma permanente en el circuito de la figura 29.8. Supongamos que elegimos que el tiempo sea cero en el momento en que la caída de voltaje V_C entre las placas del condensador es cero y está aumentando. (En este mismo instante, la carga Q de la placa superior del condensador también es cero y crece.) Al aumentar V_C, fluye carga positiva desde la placa inferior a la superior, hasta que Q alcanza su valor máximo $Q_{\text{máx}}$ un cuarto de periodo después. Entonces, Q continua cambiando, haciéndose cero en el instante correspondiente a medio periodo, $-Q_{\text{máx}}$ en los tres cuartos de periodo, y cero (de nuevo) después de completarse el ciclo, un periodo después. La carga $Q_{\text{máx}}$ atraviesa el generador cada cuarto de periodo. Si duplicamos la frecuencia, reducimos el periodo a la mitad y, por lo tanto, el tiempo que tarda $Q_{\text{máx}}$ en atravesar el generador, de modo que duplicamos la amplitud de la corriente $I_{\text{máx}}$. De aquí que, cuanto mayor sea la frecuencia, menor es el impedimento que el condensador pone al flujo de cargas.

Ejemplo 29.3 Reactancia capacitiva

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador de ac que proporciona una caída de potencial de amplitud (valor máximo) de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (*a*) 60 Hz y (*b*) 6000 Hz.

PLANTEAMIENTO La reactancia capacitiva es $X_C = 1/(\omega C)$ y el máximo de corriente es $I_{\text{máx}} = V_{C,\text{máx}}/X_C$.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular la reactancia capacitiva a 60 Hz y a 6000 Hz:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(60{,}0\ \text{Hz})(20{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{133\ \Omega}$$

$$I_{1\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_{C1}} = \frac{100\ \text{V}}{133\ \Omega} = \boxed{0{,}752\ \text{A}}$$

(*b*) Calcular la reactancia o impedancia capacitiva (capacitancia) a 6000 Hz y utilizar este valor para calcular la corriente máxima a 6000 Hz:

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(6000\ \text{Hz})(20{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{1{,}33\ \Omega}$$

$$I_{2\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_{C2}} = \frac{100\ \text{V}}{1{,}33\ \Omega} = \boxed{75{,}2\ \text{A}}$$

COMPROBACIÓN La corriente a 60 Hz es el 1% de la corriente a 6000 Hz. Este resultado es lógico porque el condensador se va convirtiendo progresivamente en un circuito abierto según disminuye la frecuencia.

OBSERVACIÓN Es preciso hacer notar que la reactancia capacitiva es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal forma que para una frecuencia creciente en dos órdenes de magnitud, la reactancia capacitiva decrece en esos mismos dos órdenes. La corriente, tal como era de esperar, es directamente proporcional a la frecuencia.

* 29.3 EL TRANSFORMADOR

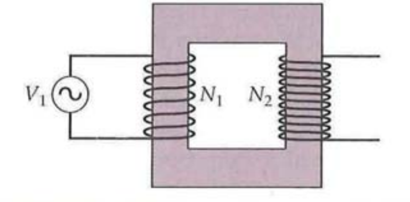


FIGURA 29.10 Transformador con N_1 vueltas en el primario y N_2 vueltas en el secundario.

Un transformador es un dispositivo utilizado para elevar o disminuir el voltaje en un circuito sin una apreciable pérdida de potencia. La figura 29.10 muestra un transformador simple compuesto por dos bobinas de hilo conductor arrolladas sobre un núcleo de hierro común. La bobina que se conecta a la fuente de entrada se denomina **primario** y la otra, **secundario**. Puede utilizarse cualquiera de los dos arrollamientos de un transformador para primario o secundario. Su funcionamiento se basa en el hecho de que una corriente alterna en un circuito inducirá una fem alterna en otro circuito próximo debido a la inductancia mutua entre ambos. La función del núcleo de hierro consiste en aumentar el campo magnético creado por una corriente determinada y guiar dicho campo de tal forma que prácticamente todo el flujo magnético que atraviese uno de los arrollamientos atraviese el otro. Si no se perdiera potencia alguna, el producto del voltaje por la corriente en el circuito secundario sería igual al producto del voltaje por la corriente en el circuito primario. Así, si el voltaje del circuito secundario es mayor que el del primario, la corriente en el secundario será menor y viceversa. Las pérdidas de potencia proceden del calentamiento por efecto Joule en las pequeñas resistencias de ambos arrollamientos o en las espiras de corriente dentro del núcleo* y a la histéresis que se presenta en los núcleos de hierro. Despreciaremos estas pérdidas y consideraremos un transformador ideal con un rendimiento del 100 por ciento, en el que toda la potencia suministrada al arrollamiento primario aparece en el secundario. Los transformadores comerciales suelen tener rendimientos comprendidos entre el 90 y el 95 por ciento.

Consideremos un transformador con voltaje V_1 en el primario de N_1 vueltas; el arrollamiento secundario de N_2 vueltas es un circuito abierto. Debido al núcleo de hierro, existe un flujo magnético grande que atraviesa ambos arrollamientos aunque la corriente magnetizante (corriente original en la bobina primaria) I_m en el circuito primario sea muy pequeña. Podemos despreciar las resistencias de los arrollamientos en comparación con sus reactancias inductivas. El primario es entonces un circuito simple formado por un generador de corriente alterna y una inductancia pura como el estudiado en la sección 29.2. La corriente (original I_m) y la tensión en el primario están desfasadas entre sí en 90° y la potencia media disipada en el arrollamiento primario es cero. Si ϕ_{vuelta} es el flujo magnético que atraviesa una espira o vuelta del primario, la caída de tensión en él es igual a la fem, de modo que

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_{vuelta}}{dt} \qquad 29.28$$

Si se considera que no existe ninguna pérdida de flujo en el núcleo de hierro, el flujo que atraviesa cada espira es el mismo en ambos arrollamientos. Así pues, el flujo total que atraviesa el arrollamiento secundario es $N_2\phi_{vuelta}$, y la tensión que aparece en dicho secundario es

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_{vuelta}}{dt} \qquad 29.29$$

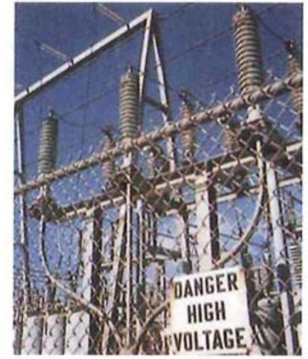
Comparando estas dos últimas ecuaciones, podemos ver que

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \qquad 29.30$$

Si N_2 es mayor que N_1, la tensión en el secundario es mayor que la aplicada al primario y el transformador se designa como *transformador elevador o de alta*. Si N_2 es menor que N_1, la tensión en el secundario es menor que en el primario y el transformador recibe el nombre de *transformador reductor o de baja*.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

(*a*) Transformador situado en un poste eléctrico que reduce la tensión hasta el valor adecuado para su distribución en las casas. (*b*) Subestación eléctrica urbana en donde los transformadores reducen la tensión procedente de las líneas de alta tensión a valores más bajos. (*c*) Un transformador que proporciona corriente alterna de 9 V. ((*a*) *Yaov/Phototake.* (*b*) *Daniel S. Brody/Stock Boston.* (*c*) *Ramón Rivera Moret.*)

* Las corrientes inducidas, llamadas corrientes turbillonarias o de Foucault, pueden reducirse en gran medida utilizando un núcleo de metal laminado que "rompa" las trayectorias de estas corrientes.

Consideremos, a continuación, lo que ocurre cuando colocamos una resistencia R denominada *resistencia de carga* conectada al secundario. Entonces, aparecerá una corriente I_2 en el circuito del secundario que estará en fase con la tensión V_2 aplicada a la resistencia. Esta corriente originará un flujo adicional ϕ_{vuelta} a través de cada espira que será proporcional a N_2I_2. Este flujo se opone al flujo original creado por la corriente original I_m del primario. Sin embargo, la tensión que aparece en el arrollamiento primario está determinada por la fem del generador, que no se ve afectada por el circuito secundario. De acuerdo con la ecuación 29.29, el flujo total en el núcleo de hierro debe variar al ritmo original; es decir, el flujo total en el núcleo de hierro debe ser el mismo que cuando no existía la carga en el secundario. El arrollamiento primario extrae así una corriente adicional I_1 para mantener el flujo original ϕ_{vuelta}. El flujo producido por esta corriente adicional que atraviesa cada espira es proporcional a N_1I_1. Como este flujo es igual a $-\phi'_{\text{vuelta}}$, la corriente adicional I_1 en el primario está relacionada con la corriente I_2 en el secundario por

$$N_1I_1 = -N_2I_2 \qquad 29.31$$

Estas corrientes están desfasadas en 180º y producen flujos que se contrarrestan. Como I_2 está en fase con V_2, la corriente adicional I_1 está en fase con el voltaje del circuito primario. La potencia procedente del generador es $V_{1\,\text{ef}}I_{1\,\text{ef}}$ y la potencia que se extrae del secundario es $V_{2\,\text{ef}}I_{2\,\text{ef}}$. (La corriente I_m no contribuye a la potencia de entrada porque está desfasada en 90º respecto a la tensión del generador.) Si no existiesen pérdidas,

$$V_{1\,\text{ef}}I_{1\,\text{ef}} = V_{2\,\text{ef}}I_{2\,\text{ef}} \qquad 29.32$$

En la mayoría de los casos, la corriente adicional en el primario I_1 es mucho mayor que la corriente original I_m que se obtiene del generador cuando no hay carga. Esto puede demostrarse colocando una lámpara en serie con el primario. La lámpara brilla mucho más cuando existe una carga aplicada al secundario que cuando éste se encuentra abierto. Si puede despreciarse I_m, la ecuación 29.32 relaciona las corrientes totales que recorren los circuitos primario y secundario.

Ejemplo 29.4 El transformador del timbre

Un timbre funciona a 6,0 V con 0,40 A (en valores eficaces). Se conecta a un transformador cuyo primario contiene 2000 vueltas y está conectado a una ac de 120 V de tensión eficaz. (*a*) ¿Cuántas vueltas deberá tener el secundario? (*b*) ¿Cuál es la corriente en el primario?

PLANTEAMIENTO El número de vueltas del secundario se determina a partir de la relación de vueltas, igual a la relación de voltajes. La corriente del primario se deduce igualando las potencias de salida y entrada.

SOLUCIÓN

(*a*) La relación de vueltas se deduce de la ecuación 29.30. Despejar el número de vueltas en el secundario, N_2:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

así

$$N_2 = \frac{V_{2\,\text{ef}}}{V_{1\,\text{ef}}}N_1 = \frac{6{,}0\text{ V}}{120\text{ V}}2000 \text{ vueltas} = \boxed{100 \text{ vueltas}}$$

(*b*) Como suponemos que la transmisión de potencia tiene una eficacia del 100%, las corrientes de entrada y salida están relacionadas por la ecuación 29.32. Despejar la corriente del primario, I_1:

$$V_{2\,\text{ef}}I_{2\,\text{ef}} = V_{1\,\text{ef}}I_{1\,\text{ef}}$$

así

$$I_{1\,\text{ef}} = \frac{V_{2\,\text{ef}}}{V_{1\,\text{ef}}}I_{2\,\text{ef}} = \frac{6{,}0\text{ V}}{120\text{ V}}(0{,}40\text{ A}) = \boxed{0{,}020\text{ A}}$$

COMPROBACIÓN Para disminuir el voltaje, se requiere que haya menos vueltas en el secundario que en el primario. Además, un transformador que disminuya la tensión aumenta la corriente. Nuestros resultados reflejan ambas circunstancias.

Uno de los usos más importantes de los transformadores es el del transporte de energía eléctrica. Para reducir hasta el mínimo posible las pérdidas en forma de calor Joule (I^2R) que tienen lugar en las líneas de transmisión de energía, resulta más económico emplear alto voltaje y baja corriente. Por otro lado, la seguridad en su empleo y otras consideraciones, como el aislamiento, hacen necesario distribuir la energía a los consumidores a voltajes más bajos y, por lo tanto, corrientes más altas. Supóngase, por ejemplo, que cada persona de una ciudad con una población de 50 000 habitantes consume 1,2 kW de potencia eléctrica. (El consumo en algunos países occidentales es realmente más elevado que esta cifra.) A 120 V, la corriente requerida por cada individuo sería

$$I = \frac{1200\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 10\ \text{A}$$

La corriente total para 50 000 personas sería entonces 500 000 A. El transporte de dicha corriente desde los generadores de una central eléctrica hasta una ciudad a muchos kilómetros de distancia requeriría conductores de tamaño enorme y la pérdida de potencia dada por I^2R sería sustancial. Así pues, en lugar de transportar la potencia a 120 V, se utilizan transformadores de alta tensión en la central para elevar el voltaje a unos valores muy elevados, tales como 600 000 V. Así se reduce la corriente necesaria a

$$I = \frac{120\ \text{V}}{600\,000\ \text{V}}(500\,000\ \text{A}) = 100\ \text{A}$$

Para reducir luego el voltaje a unos niveles más seguros durante su transporte dentro de la ciudad, se sitúan estaciones transformadoras a la entrada de la misma para bajar su valor hasta 10 000 V, por ejemplo. Luego, en las proximidades de los bloques de viviendas se instalan nuevos transformadores que reducen otra vez el voltaje hasta 120 V-240 V para su distribución en el interior de las casas. Debido a esta facilidad para aumentar o disminuir el voltaje de la corriente alterna mediante transformadores, se utiliza habitualmente este tipo de corriente y no corriente continua.

Ejemplo 29.5 Pérdidas en una línea de transmisión

Una línea de transmisión de energía eléctrica tiene una resistencia de 0,02 Ω/km. Calcular la pérdida de potencia I^2R si se ha de transmitir una potencia de 200 kW desde una central generadora a una ciudad distante 10 km de aquélla a (*a*) 240 V y (*b*) 4,4 kV.

PLANTEAMIENTO En primer lugar, observemos que la resistencia total de 10 km de alambre es $R = (0{,}02\ \Omega/\text{km})(10\ \text{km}) = 0{,}2\ \Omega$. La corriente necesaria para transmitir 200 kW se calcula a partir de $P = IV$ y la pérdida de potencia mediante I^2R. En la solución, los voltajes y corrientes son valores eficaces y la potencia valor medio.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Determinar la corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 240 V:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{240\ \text{V}} = 833\ \text{A}$$

2. Calcular la pérdida de potencia:

$$I^2R = (833\ \text{A})^2(0{,}20\ \Omega) = \boxed{1{,}4 \times 10^2\ \text{kW}}$$

(*b*) 1. Determinar la corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 4,4 kV:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{4{,}4\ \text{kV}} = 45{,}4\ \text{A}$$

2. Calcular la pérdida de potencia:

$$I^2R = (45{,}4\ \text{A})^2(0{,}20\ \Omega) = \boxed{0{,}41\ \text{kW}}$$

COMPROBACIÓN La pérdida de potencia con 4 kV supone menos del 1% de la correspondiente a 240 V. Este resultado es consistente con el hecho de aumentar la tensión para realizar la transmisión eléctrica.

OBSERVACIÓN Es preciso hacer notar que en una línea de transmisión de 240 V, casi el 70% de la potencia se pierde en calor de forma irreversible y la caída de tensión IR en dicha transmisión es de 167 V, de forma que la potencia por la línea se transmite a 73 V. Por el contrario, con una transmisión a 4,4 kV, solamente alrededor del 0,2% de la potencia se pierde en la transmisión, y la caída de potencial IR a través de la misma es solamente de 9 V, con una caída de potencial en la potencia transmitida del 0,2%. Todo esto ilustra las ventajas de la transmisión de potencia eléctrica con alto voltaje.

* 29.4 CIRCUITOS *LC* Y *LCR* SIN GENERADOR

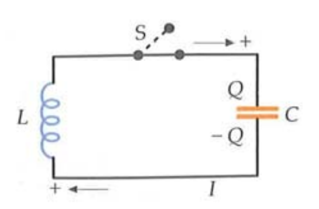


FIGURA 29.11 Circuito *LC*. Cuando se cierra el interruptor, el condensador inicialmente cargado se descarga a través de la bobina, produciendo una fuerza contraelectromotriz.

La figura 29.11 muestra un circuito simple con inductancia y capacitancia, pero sin resistencia. Le llamaremos **circuito *LC***. Supongamos que en la placa superior del condensador existe una carga inicial Q_0 y que el interruptor está abierto. Una vez cerrado el interruptor en $t = 0$, la carga empieza a circular por la bobina. Sea Q la carga de la placa superior del condensador y antihorario el sentido positivo alrededor del circuito. Entonces

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff al circuito, se tiene

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad 29.33$$

Sustituyendo I por $-dQ/dt$, resulta

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0 \qquad 29.34$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la correspondiente a la aceleración de una masa situada en un muelle (ecuación 14.2):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

El comportamiento de un circuito *LC* es, por lo tanto, análogo al de una masa unida a un muelle, siendo L análogo a la masa m, Q análogo a la posición x, y $1/C$ análogo a la constante del muelle k. Además, la corriente I es también análoga a la velocidad v, puesto que $\omega = dx/dt$ e $I = dQ/dt$. En mecánica, la masa de un objeto describe su inercia. Cuanto mayor sea la masa, más difícil será cambiar la velocidad del objeto. De forma semejante, la inductancia L puede considerarse como la inercia de un circuito de ac. Cuanto más grande es la inductancia, más difícil resulta variar la corriente I.

Si dividimos por L cada término de la ecuación 29.34 y reordenamos, se tiene

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \qquad 29.35$$

que es análogo a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad 29.36$$

En el capítulo 14, se vio que podíamos expresar la solución de la ecuación 29.36 correspondiente al movimiento armónico simple en la forma

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular, A es la amplitud y δ es la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales. Por lo tanto, la solución de la ecuación 29.35 es

$$Q = A\cos(\omega t - \delta)$$

Con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 29.37$$

Se halla la corriente derivando esta solución:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A\ \text{sen}(\omega t - \delta)$$

Si se escoge que las condiciones iniciales sean $Q = Q_{máx}$ e $I = 0$ en $t = 0$, la constante de fase δ es cero y $A = Q_{máx}$. Las soluciones son entonces

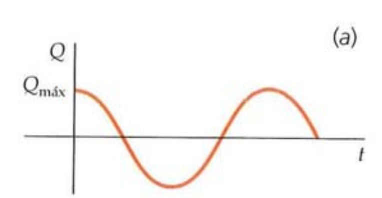
$$Q = Q_{máx} \cos \omega t \qquad 29.38$$

y

$$I = -\omega Q_{máx}\ \text{sen}\ \omega t = -I_{máx}\ \text{sen}\ \omega t \qquad 29.39$$

donde $I_{máx} = \omega Q_{máx}$.

En la figura 29.12, se han dibujado los gráficos de Q e I en función del tiempo. La carga oscila entre los valores $+Q_{máx}$ y $-Q_{máx}$ con frecuencia angular $\omega = 1/\sqrt{LC}$. La corriente oscila entre $+\omega Q_{máx}$ y $-\omega Q_{máx}$ con la misma frecuencia, pero desfasada 90° respecto a la carga (véase el problema 29.33). La corriente es máxima cuando la carga es cero, y nula cuando la carga es máxima.



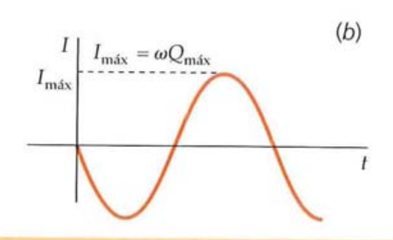


FIGURA 29.12 Gráficos de (*a*) Q en función de t y (*b*) I en función de t para el circuito LC de la figura 29.11.

En nuestro estudio de las oscilaciones de una masa unida a un muelle, vimos que la energía total es constante pero que oscila entre la energía cinética y la potencial. En nuestro circuito LC, también tenemos dos clases de energía, la eléctrica y la magnética. La energía eléctrica almacenada en el condensador es

$$U_e = \frac{1}{2}QV_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Sustituyendo Q por $Q_{máx}$ cos ωt, tenemos para la energía eléctrica

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q_{máx}^2}{C}\cos^2\omega t \qquad 29.40$$

Esta energía eléctrica oscila entre su valor máximo $Q_{máx}^2/(2C)$ y cero a una frecuencia angular de 2ω (véase el problema 29.33). La energía magnética almacenada en la bobina es

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \qquad 29.41$$

Sustituyendo $I = -\omega Q_{máx}$sen ωt (ecuación 29.39), resulta

$$U_m = \frac{1}{2}L\omega^2 Q_{máx}^2\ \text{sen}^2\omega t = \frac{1}{2}\frac{Q_{máx}^2}{C}\ \text{sen}^2\ \omega t \qquad 29.42$$

donde hemos utilizado $\omega^2 = 1/LC$. La energía magnética también oscila entre su valor máximo de $Q_{máx}^2/2C$ y cero a una frecuencia angular de 2ω. La suma de las energías eléctrica y magnética es la energía total, que es constante en el tiempo:

$$U_{total} = U_e + U_m = \frac{1}{2}\frac{Q_{máx}^2}{C}\cos^2\omega t + \frac{1}{2}\frac{Q_{máx}^2}{C}\ \text{sen}^2\ \omega t = \frac{1}{2}\frac{Q_{máx}^2}{C}$$

que es la energía almacenada inicialmente en el condensador.

Ejemplo 29.6 Oscilador *LC*

Se carga a 20 V un condensador de 2,0 μF y luego se conecta una bobina de 6,0 μH. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? (*b*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

PLANTEAMIENTO En (*b*), la corriente es máxima cuando dQ/dt es máxima, de forma que la amplitud de la corriente es $\omega Q_{máx}$. Además, $Q = Q_{máx}$ cuando $V = V_{máx}$, donde V es la tensión a través del condensador.

SOLUCIÓN

(*a*) La frecuencia de la oscilación depende únicamente de los valores de la capacidad y de la inductancia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(6{,}0 \times 10^{-6}\,\text{H})(2{,}0 \times 10^{-6}\,\text{F})}}$$

$$= \boxed{4{,}6 \times 10^4\ \text{Hz}}$$

(*b*) 1. El valor máximo de la corriente está relacionado con el valor máximo de la carga:

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_{\text{máx}} = \frac{Q_{\text{máx}}}{\sqrt{LC}}$$

2. El máximo de carga en el condensador se relaciona con la caída de tensión a través de él:

$$Q_{\text{máx}} = CV_{\text{máx}}$$

3. Utilizar el valor de $Q_{\text{máx}}$ para calcular $I_{\text{máx}}$:

$$I_{\text{máx}} = \frac{CV_{\text{máx}}}{\sqrt{LC}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{L/C}}$$

$$= \frac{(20\ \text{V})}{\sqrt{(6{,}0\ \mu\text{H})/(2{,}0\ \mu\text{F})}} = \boxed{12\ \text{A}}$$

PROBLEMA PRÁCTICO 29.2 Se carga un condensador de 5 μF y luego se descarga a través de una bobina. ¿Cuál deberá ser la inductancia de la bobina para que la corriente oscile con una frecuencia de 8 kHz?

Si incluimos una resistencia en serie con el condensador y la bobina, como muestra la figura 29.13, tenemos un **circuito *LCR***. La ley de las mallas de Kirchhoff nos da

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \qquad 29.43a$$

o sea

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0 \qquad 29.43b$$

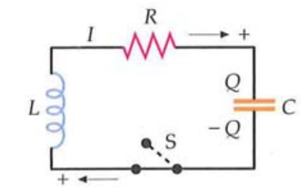


FIGURA 29.13 Circuito *LCR*.

donde hemos utilizado $I = dQ/dt$ al igual que antes. Las ecuaciones 29.43*a* y 29.43*b* son análogas a la ecuación correspondiente al oscilador armónico amortiguado (véase ecuación 14.38):

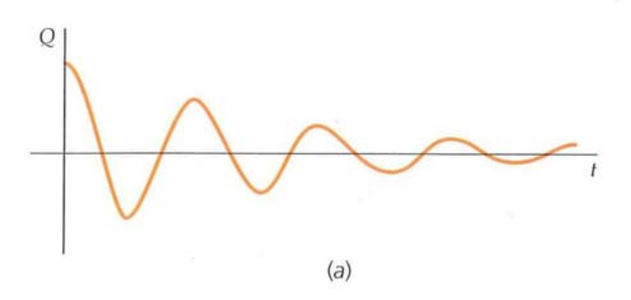
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

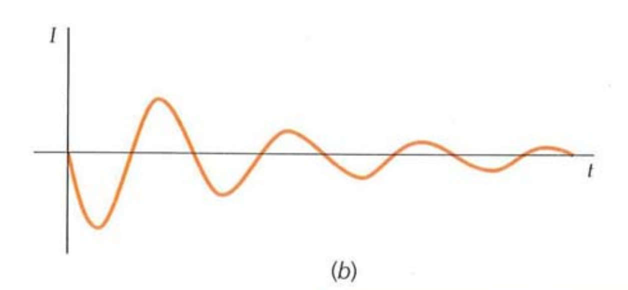
El primer término, $L\,dI/dt = L\,d^2Q/dt^2$, es análogo a la masa multiplicada por la aceleración, $m\,dv/dt = m\,d^2x/dt^2$; el segundo, $IR = R\,dQ/dt$, es análogo al término de amortiguamiento, $bv = b\,dx/dt$; y el tercero, Q/C, es análogo a la fuerza restauradora kx. En la oscilación de una masa unida a un muelle, la constante de amortiguamiento b origina una disipación de energía mecánica en forma de calor. En un circuito *LCR*, la resistencia R es análoga a la constante de amortiguamiento b y produce una disipación de energía eléctrica.

Si la resistencia es pequeña, la carga y la corriente oscilan con una frecuencia (angular)* que es muy próxima a $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, (**frecuencia natural** del circuito), pero las oscilaciones se amortiguan; es decir, los valores máximos de la carga y de la corriente disminuyen en cada oscilación. Podemos comprender este hecho mediante un análisis cualitativo basado en consideraciones energéticas. Si multiplicamos cada término de la ecuación 29.43*a* por la corriente I, se tiene

$$LI\frac{dI}{dt} + I^2R + I\frac{Q}{C} = 0 \qquad 29.44$$

* Como vimos en el capítulo 14 al tratar las oscilaciones mecánicas, habitualmente omitimos la palabra angular cuando su ausencia no es causa de confusión.





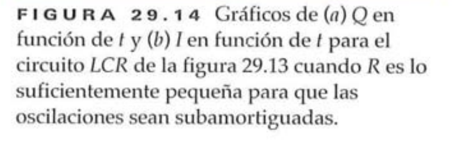


FIGURA 29.14 Gráficos de (*a*) Q en función de t y (*b*) I en función de t para el circuito LCR de la figura 29.13 cuando R es lo suficientemente pequeña para que las oscilaciones sean subamortiguadas.

La energía magnética en el inductor viene dada por $\frac{1}{2}LI^2$ (véase la ecuación 28.21). Obsérvese que

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}LI^2\right)}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

donde $LI\,dI/dt$ es el primer término de la ecuación 29.44. Si $LI\,dI/dt$ es una cantidad positiva, representa la variación temporal de la energía potencial eléctrica que se trasforma en energía magnética. Si, por el contrario, $LI\,dI/dt$ es negativa, esta cantidad determina la variación temporal de la energía magnética que se convierte en energía potencial eléctrica. Es preciso hacer notar que $LI\,dI/dt$ es positiva o negativa dependiendo de que I y dI/dt tengan el mismo o diferente signo. El segundo término de la ecuación 29.44 es I^2R, el cual corresponde a la potencia eléctrica disipada en la resistencia. Esta última cantidad siempre es positiva. Obsérvese que

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}Q^2/C\right)}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = I\frac{Q}{C}$$

donde IQ/C es el tercer término de la ecuación 29.44. Este término debe interpretarse como la variación en el tiempo de la energía potencial eléctrica en el condensador, la cual puede ser positiva o negativa. La suma de las energías eléctrica y magnética no es constante en este circuito porque en la resistencia se está disipando continuamente energía. En la figura 29.14, se ven los gráficos de Q en función de t y de I en función de t cuando la resistencia R es pequeña. Si se aumenta R, las oscilaciones se amortiguan cada vez más hasta que se alcanza un valor crítico de R para el que no existe ninguna oscilación. En la figura 29.15, se ve el gráfico de Q en función de t cuando el valor de R es mayor que el valor correspondiente al amortiguamiento crítico.

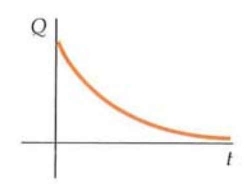


FIGURA 29.15 Gráfico de Q en función de t para el circuito LCR de la figura 29.13 cuando R es tan grande que las oscilaciones están sobreamortiguadas.

* 29.5 FASORES

Hasta ahora, los circuitos que hemos estudiado contenían un generador ac ideal y únicamente un elemento pasivo (es decir, resistencia, inducción o condensador). En estos circuitos, la diferencia de voltaje (o caída de tensión) entre los extremos de dichos elementos pasivos era igual a la fem del generador. En circuitos que contienen un generador ideal ac y dos o más elementos adicionales conectados en serie, la suma de las diferencias de potencial entre todos los elementos (entre el primer extremo del primer elemento y el segundo extremo del último) es igual a la fem del generador; en esto coinciden con los circuitos de corriente continua. Sin embargo, en un circuito ac, las caídas de tensión entre los extremos de cada elemento no tienen por qué estar en fase, con lo que la suma de los valores eficaces no tiene por qué coincidir con el valor eficaz del generador.

Con vectores de dos dimensiones, denominados **fasores**, se pueden representar las relaciones de fase entre la corriente y la diferencia de potencial a través de resistencias, inductores o condensadores. En la figura 29.16, el voltaje a través de una resistencia se ha representado por un vector V_R cuyo valor o módulo es $I_{\text{máx}}R$ y que forma un ángulo θ con el eje x. Esta tensión está en fase con la corriente. En general, una corriente estacionaria en un circuito de ac varía con el tiempo como

$$I = I_{\text{máx}}\cos\theta = I_{\text{máx}}\cos(\omega t - \delta) \qquad 29.45$$

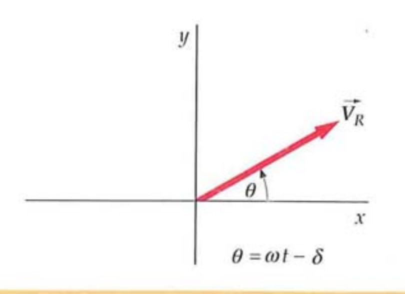


FIGURA 29.16 La tensión aplicada a una resistencia puede representarse mediante un vector $\vec{V}_R$, denominado fasor, que tiene de módulo el valor $I_{\text{máx}}R$, y que forma un ángulo $\theta = \omega t - d$ con el eje x. El fasor rota con una frecuencia angular ω. La tensión $V_R = IR$ es la componente x de $\vec{V}_R$.

siendo ω la frecuencia angular y δ cierta constante de fase. La caída de tensión en una resistencia viene dada entonces por

$$V_R = IR = I_{\text{máx}} R \cos(\omega t - \delta) \qquad 29.46$$

El valor instantáneo de la caída de tensión en una resistencia es así igual a la componente x del vector fasor $\vec{V}_R$,que gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω. La corriente I puede expresarse como la componente x de un fasor $\vec{I}$ que tenga la misma orientación que $\vec{V}_R$.

Cuando se conectan juntos varias componentes en un circuito en serie, sus tensiones se suman. Cuando se conectan en paralelo, sus corrientes se suman. Pero la suma algebraica de senos y cosenos de diferentes amplitudes y fases resulta complicado e incómodo. Es mucho más fácil efectuar la suma de vectores.*

Los fasores se emplean de la forma siguiente. Se expresa cualquier tensión o corriente como $A\cos(\omega t - \delta)$, que a su vez se considera como A_x, la componente x de un fasor A que forma un ángulo $(\omega t - \delta)$ con el eje x. En lugar de sumar dos tensiones o corrientes algebraicamente, como $A\cos(\omega t - \delta_1) + B\cos(\omega t - \delta_2)$, se representan estas magnitudes como fasores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y se halla la suma vectorial de los fasores, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, geométricamente. La tensión o corriente resultante es entonces la componente x del fasor resultante, $C_x = A_x + B_x$. La representación geométrica muestra de forma clara las amplitudes y fases relativas de los fasores.

Consideremos un circuito que contiene una bobina L, un condensador C y una resistencia R, conectados en serie todos ellos. Por todos pasará la misma corriente, que se representa como la componente x del fasor de corriente $\vec{I}$. La caída de potencial a través de la resistencia se representa por el fasor $\vec{V}_R$, siendo su módulo $I_{\text{máx}}R$ y su fase la del fasor de la intensidad $\vec{I}$. La caída de potencial en la bobina V_L se representa con el fasor $\vec{V}_L$. Análogamente, la caída de potencial en el condensador V_L se representa mediante un fasor $\vec{V}_C$ que tiene módulo $I_{\text{máx}}XC$ y que se retrasa respecto a la corriente en 90°. En la figura 29.17, pueden verse los tres fasores $\vec{V}_R$, $\vec{V}_L$, $\vec{V}_C$, y $\vec{V}_{\text{ap}}$. Según transcurre el tiempo, los tres fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω, de modo que no varían las posiciones relativas de los vectores. En un instante cualquiera, el valor instantáneo de la caída de tensión en cualquiera de estos elementos es igual a la componente x del fasor correspondiente.

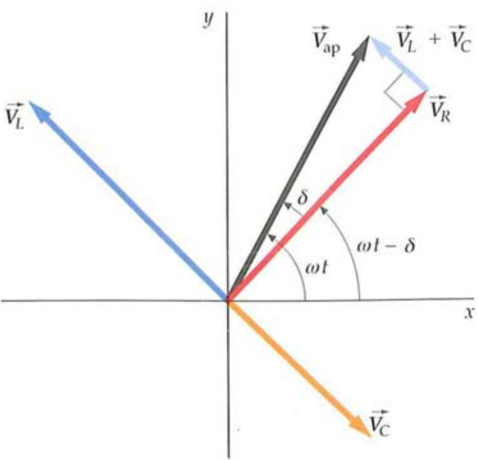


FIGURA 29.17 Representaciones de los fasores de las tensiones V_R, V_L y V_C. Cada vector gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω. En un instante cualquiera, la tensión aplicada a un elemento es igual a la componente x del fasor correspondiente, y la tensión a través de la asociación *LCR* en serie, que es igual a la suma de las tensiones, es igual a la componente x del vector suma $\vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$.

* 29.6 CIRCUITOS *LCR* CON GENERADOR

CIRCUITO *LCR* EN SERIE

La figura 29.18 muestra un circuito *LCR* en serie alimentado por un generador de ac sinusoidal. Si la caída de potencial aplicada por el generador a la asociación *LCR* en serie viene dada por $V_{\text{ap}} = V_{\text{ap máx}} \cos \omega t$, la ley de las mallas de Kirchhoff nos da

$$V_{\text{ap máx}} \cos \omega t - L\frac{dI}{dt} - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

Utilizando $I = dQ/dt$ y ordenando los términos, se tiene

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_{\text{ap máx}} \cos \omega t \qquad 29.47$$

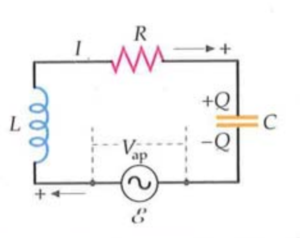


FIGURA 29.18 Circuito *LCR* en serie con un generador de ac.

Esta ecuación es análoga a la ecuación 14.53 correspondiente a la oscilación forzada de una masa en un muelle:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

(En la ecuación 14.53 se expresó la constante de fuerza k en función de la masa m y de la frecuencia angular natural ω_0 utilizando $k = m\omega_0^2$. En la ecuación 29.47, la capacidad podría expresarse de forma semejante en función de L y de la frecuencia natural utilizando $1/C = L\omega_0^2$.)

*También resulta más fácil utilizar números complejos.

Abordaremos la solución de la ecuación 29.47 cualitativamente, del mismo modo que hicimos con la ecuación 14.53 correspondiente a un oscilador forzado. La corriente en el circuito consta de una parte transitoria que depende de las condiciones iniciales (tales como la fase inicial del generador y la carga inicial del condensador) y una corriente estacionaria que es independiente de dichas condiciones. Ignoraremos la corriente transitoria, que disminuye exponencialmente con el tiempo y es finalmente despreciable, y nos concentraremos en la corriente estacionaria. Ésta se obtiene resolviendo la ecuación 29.47:

$$I = I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \delta) \qquad 29.48$$

donde el ángulo de fase δ viene dado por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad 29.49$$

CONSTANTE DE FASE EN UN CIRCUITO EN SERIE *LCR*

La corriente máxima es

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{ap máx}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_{\text{ap máx}}}{Z} \qquad 29.50$$

CORRIENTE MÁXIMA EN UN CIRCUITO EN SERIE *LCR*

donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad 29.51$$

IMPEDANCIA DE CIRCUITO EN SERIE *LCR*

A veces la magnitud $X_L - X_C$ se llama **reactancia total**, y se reserva la denominación de **impedancia** para Z. Combinando estos resultados, tenemos

$$I = \frac{V_{\text{ap máx}}}{Z} \cos(\omega t - \delta) \qquad 29.52$$

También puede obtenerse la ecuación 29.52 mediante un diagrama sencillo utilizando las representaciones de los fasores. En la figura 29.19, se indican los fasores que representan las caídas de tensión en la resistencia, la bobina y el condensador. La componente x de cada uno de estos vectores es igual a la caída de tensión instantánea en el correspondiente elemento. Como la suma de las componentes x es igual a la componente x de la suma de los vectores, la suma de las componentes x es igual a la suma de las caídas de tensión en todos los elementos, cantidad que, según la regla de las mallas de Kirchhoff, es igual a la caída de potencial aplicada instantánea.

Si representamos la caída de potencial aplicada a la asociación en serie $V_{\text{ap}} = V_{\text{ap máx}} \cos \omega t$, como un fasor $\vec{V}_{\text{ap}}$ que tiene el módulo $V_{\text{ap máx}}$, tenemos

$$\vec{V}_{\text{ap}} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C \qquad 29.53$$

Y en función de los módulos

$$V_{\text{ap máx}} = |\vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C| = \sqrt{V_{R\,\text{máx}}^2 + (V_{L\,\text{máx}} - V_{C\,\text{máx}})^2}$$

Pero $V_R = I_{\text{máx}}R$, $V_L = I_{\text{máx}}X_L$ y $V_C = I_{\text{máx}}X_C$. Así pues,

$$V_{\text{ap máx}} = I_{\text{máx}}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{\text{máx}}Z$$

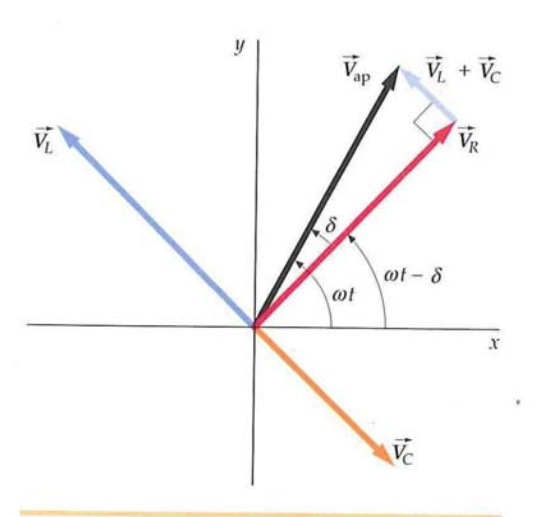


FIGURA 29.19 Relaciones de fase entre las tensiones de un circuito en serie *LCR*. La tensión que se aplica a la resistencia está en fase con la corriente. La tensión que aparece en la bobina V_L adelanta a la corriente en 90°. La tensión en las placas del condensador se retrasa respecto a la corriente en 90°. La suma de los vectores que representan estas tensiones da un vector que forma un ángulo δ con la corriente y representa la fem aplicada. En el caso indicado en la figura, V_L es mayor que V_C y la corriente está retrasada en δ respecto a la tensión aplicada.

El fasor $\vec{V}_{ap}$ forma un ángulo δ con $\vec{V}_R$, como se ve en la figura 29.19, donde se puede observar que

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{|\vec{V}_L + \vec{V}_C|}{|\vec{V}_R|} = \frac{I_{\text{máx}}X_L - I_{\text{máx}}X_C}{I_{\text{máx}}R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

de acuerdo con la ecuación 29.49. Como $\vec{V}_{ap}$ forma un ángulo ωt con el eje x, $\vec{V}_R$ forma un ángulo $\omega t - \delta$ con el eje x. Esta tensión está en fase con la corriente, que por lo tanto, vendrá dada por

$$I = I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \delta) = \frac{V_{\text{ap máx}}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

Esta expresión es la ecuación 29.52. La relación entre la reactancia Z y la resistencia R y la reactancia total $X_L - X_C$ puede recordarse utilizando el triángulo rectángulo indicado en la figura 29.20.

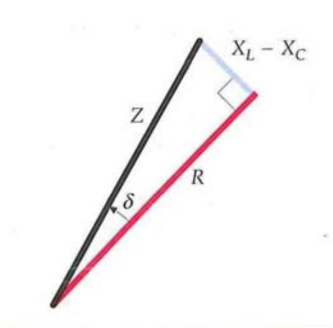


FIGURA 29.20 Triángulo que relaciona la reactancia capacitiva más la inductiva, la resistencia, la impedancia y el ángulo de fase en un circuito *LCR*.

RESONANCIA

Cuando X_L y X_C son iguales, la reactancia total es cero, la reactancia Z tiene su valor mínimo igual a R, e $I_{\text{máx}}$ tiene su valor máximo. Además, el ángulo de fase δ es cero, lo que significa que la corriente está en fase con la tensión aplicada. El valor de ω que hace iguales a X_L y a X_C se obtiene a partir de

$$X_L = X_C$$

$$\omega_{\text{res}} L = \frac{1}{\omega_{\text{res}} C}$$

o sea,

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Cuando la frecuencia de la tensión aplicada ω es igual a la frecuencia natural ω_0, la reactancia alcanza su valor más pequeño, $I_{\text{máx}}$ el valor más grande y el circuito se dice que está en **resonancia**. Por lo tanto, la frecuencia natural ω_0 se llama también **frecuencia de resonancia**. Esta condición de resonancia en un circuito *LCR* forzado es semejante a la de un oscilador armónico simple forzado.

Señalamos anteriormente que ni las bobinas ni los condensadores disipan energía. La potencia media suministrada a un circuito en serie *LCR* es, por lo tanto, igual a la potencia media suministrada a la resistencia. La potencia instantánea que se suministra a la resistencia es

$$P = I^2R = [I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \delta)]^2 R$$

Promediando sobre uno o varios ciclos y sabiendo que $(\cos^2\theta)_m = \frac{1}{2}$, obtenemos para la potencia media

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2 R = (I_{ef})^2 R \qquad 29.54$$

A partir del triángulo de la figura 29.20, podemos ver que $R/Z = \cos\delta$, y como $I_{\text{máx}} = V_{\text{ap máx}}/Z$, resulta

$$P_m = \frac{1}{2} V_{\text{ap máx}} I_{\text{máx}} \cos\delta = V_{\text{ap ef}} I_{ef} \cos\delta \qquad 29.55$$

La cantidad $\cos\delta$ se denomina **factor de potencia** del circuito *LCR*. En la resonancia, δ es cero y el factor de potencia vale 1.

La potencia también puede expresarse en función de la frecuencia angular ω. Utilizando $I_{ef} = V_{\text{ap ef}}/Z$, la ecuación 29.54 toma la forma

$$P_m = (I_{ef})^2 = (V_{\text{ap ef}})^2 \frac{R}{Z^2}$$

A partir de la definición de reactancia Z, tenemos

$$Z^2 = (X_L - X_C)^2 + R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2$$

$$= \frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + R^2$$

$$= \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2$$

donde hemos utilizado $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Utilizando esta expresión de Z^2, obtenemos para la potencia media en función de ω:

$$P_m = \frac{(V_{\text{ap ef}})^2 R\omega^2}{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \qquad 29.56$$

En la figura 29.21, se muestra una gráfica de la potencia media suministrada por el generador al circuito en función de la frecuencia del generador para dos valores diferentes de la resistencia R. Estas curvas, denominadas **curvas de resonancia**, son las mismas que las curvas de potencia en función de la frecuencia en el caso de un oscilador amortiguado y forzado (véase la sección 14.5). La potencia media es máxima cuando la frecuencia del generador es igual a la frecuencia de resonancia. Cuando la resistencia es pequeña, la curva de resonancia es estrecha; cuando es grande, la curva se ensancha. Puede caracterizarse una curva de resonancia por la **anchura de resonancia** $\Delta\omega$. Como se indica en la figura 29.21, la anchura de la resonancia es la diferencia de frecuencias entre los dos puntos de la curva en que la potencia es la mitad de su valor máximo. Cuando la anchura es pequeña en comparación con la frecuencia de resonancia, la resonancia es aguda, es decir, la curva correspondiente es estrecha.

En el capítulo 14, se definió el factor Q de un oscilador mecánico por la expresión $Q = \omega_0 m/b$, donde m es la masa del oscilador y b la constante de amortiguamiento. Vimos entonces que $Q = 2\pi E/|\Delta E|$, donde E es la energía total del sistema y ΔE la energía disipada en un ciclo. El **factor Q** de un circuito LCR puede definirse de un modo semejante. Como L es análogo a la masa m y R es análogo a la constante de amortiguamiento b, el factor Q de un circuito LCR viene dado por

$$Q_{\text{factor}} = 2\pi\left(\frac{E}{|\Delta E|}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad 29.57$$

Cuando la resonancia es razonablemente estrecha (es decir, cuando Q es mayor que 2 o 3), el factor Q puede obtenerse por la siguiente aproximación

$$Q_{\text{factor}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \qquad 29.58$$

FACTOR *Q* PARA UN CIRCUITO *LCR*

Los circuitos resonantes se utilizan en los receptores de radio, en donde se varía la frecuencia de resonancia del circuito variando la inductancia o la capacidad. Se produce la resonancia cuando la frecuencia natural del circuito se iguala a una de las frecuencias de las ondas de radio recogidas por la antena. En la resonancia, aparece una corriente relativamente grande en el circuito de la antena. Si el factor Q del circuito es suficientemente alto, las corrientes debidas a las frecuencias de otras estaciones que no están en resonancia serán despreciables en comparación con la correspondiente a la frecuencia de la estación a que se ha sintonizado el circuito.

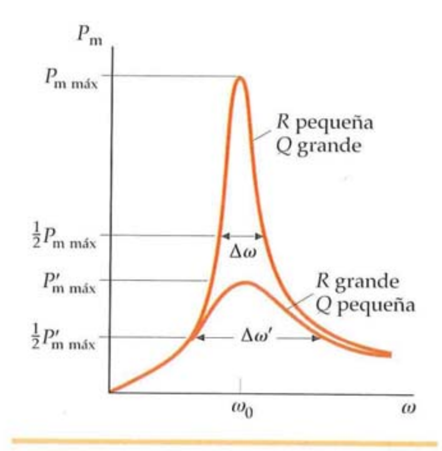


FIGURA 29.21 La potencia es máxima cuando la frecuencia ω del generador es igual a la frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ del circuito. Si la resistencia es pequeña, el factor Q es grande y la resonancia es aguda. Se mide la anchura $\Delta\omega$ de las curvas de resonancia entre aquellos puntos en que la potencia es la mitad de su valor máximo.

Ejemplo 29.7 Circuito *LCR* con un generador

Un circuito en serie *LCR* con $L = 2$ H, $C = 2\ \mu$F y $R = 20\ \Omega$ está conectado a un generador ideal de frecuencia variable y con una fem máxima de 100 V. Hallar (*a*) la frecuencia de resonancia f_0, (*b*) el valor del factor *Q*, (*c*) la anchura de la resonancia Δf y (*d*) la corriente máxima en la resonancia.

PLANTEAMIENTO La frecuencia de resonancia se determina a partir de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y el valor del factor *Q* a partir de $Q_{factor} = \omega_0 L/R$.

SOLUCIÓN

(*a*) La frecuencia de resonancia es $f_0 = \omega_0/2\pi$:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2{,}0\text{ H})(2{,}0\times10^{-6}\text{ F})}} = \boxed{80\text{ Hz}}$$

(*b*) Utilizar este resultado para calcular el factor *Q*:

$$Q_{factor} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(80\text{ Hz})(2{,}0\text{ H})}{20\ \Omega} = \boxed{50}$$

(*c*) Utilizar el valor del factor *Q* para determinar la anchura de la resonancia Δf:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_{factor}} = \frac{80\text{ Hz}}{50} = \boxed{1{,}6\text{ Hz}}$$

(*d*) En resonancia, la impedancia es justamente *R* e $I_{máx}$ es $V_{ap\,máx}/R$:

$$I_{máx} = \frac{V_{ap\,máx}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{máx}}{R} = \frac{100\text{ V}}{20\ \Omega} = \boxed{5{,}0\text{ A}}$$

COMPROBACIÓN En la resonancia, la impedancia inductiva y la capacitiva son iguales $X_L = \omega_0 L = 2\pi(80\text{ Hz})(2{,}0\text{ H}) = 1{,}0\text{ k}\Omega$. La resistencia es de 20 ohms. Como la resistencia es mucho mayor que la impedancia inductiva, el factor *Q* es grande y la resonancia muy intensa (pico estrecho y alto). Los resultados de la parte (*a*) y (*b*) reúnen estas condiciones.

OBSERVACIÓN La anchura de la resonancia es sólo de 1,6 Hz, valor muy pequeño, menor que el 2% de la frecuencia de resonancia, 80 Hz; es decir, el pico de resonancia es muy agudo.

Ejemplo 29.8 Corriente, fase y potencia de un circuito *LCR* con generador

Inténtelo usted mismo

Si el generador del ejemplo 29.7 tiene una frecuencia de 60 Hz, determinar (*a*) la corriente máxima $I_{máx}$, (*b*) la constante de fase δ, (*c*) el factor de potencia y (*d*) la potencia media suministrada.

PLANTEAMIENTO La corriente máxima es el cociente entre la tensión aplicada máxima dividida por la impedancia total del circuito. La constante de fase δ viene dada por tg $\delta = (X_L - X_C)/R$. Para determinar la potencia media suministrada, puede utilizarse la ecuación 29.54 o la 29.55.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Expresar la corriente máxima en función de $V_{ap\,máx}$ máxima y de la impedancia.	$I_{máx} = \frac{V_{ap\,máx}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{máx}}{Z}$
2. Calcular las reactancias capacitiva e inductiva y la reactancia total.	$X_C = 1326\ \Omega$, $X_L = 754\ \Omega$ por tanto, $X_L - X_C = -572\ \Omega$
3. Calcular la impedancia total Z.	$Z = 573\ \Omega$
4. Para calcular $I_{máx}$, utilizar los resultados de los pasos 2 y 3.	$I_{máx} = \boxed{0{,}17\text{ A}}$
(*b*) Utilizar los resultados de los pasos 2 y 3 del apartado (*a*) para calcular δ.	$\delta = \text{arctg}\,\frac{X_L - X_C}{R} = \boxed{-88{,}0°}$

(*c*) Utilizar el valor de δ para calcular el factor de potencia. $\cos\delta = \boxed{0{,}035}$

(*d*) Calcular la potencia media suministrada mediante la ecuación 29.54. $P_m = \frac{1}{2}I^2_{máx}R = \boxed{0{,}29\text{ W}}$

COMPROBACIÓN Comprobamos el resultado que hemos obtenido de la potencia media utilizando el factor de potencia que hemos determinado en el apartado (*c*). Así, tenemos que $P_m = \frac{1}{2}V_{ap\,máx}I_{máx}\cos\delta = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{máx}I_{máx}\cos\delta = 0{,}29$ W, lo cual está de acuerdo con el resultado obtenido en el apartado (*d*).

OBSERVACIÓN La frecuencia del generador de 60 Hz está muy por debajo de la frecuencia de resonancia de 80 Hz. (Recuérdese que la anchura de la resonancia calculada en el ejemplo 29.7 es sólo de 1,6 Hz.) En consecuencia, la reactancia total es mucho mayor en módulo que la resistencia. Esto ocurre siempre lejos de la resonancia. Igualmente, la corriente máxima de 0,175 A es muy inferior al valor $I_{máx}$ en la resonancia, que resultó ser 5,0 A. Finalmente, en la figura 29.19 vimos que una constante de fase negativa significa que la corriente adelanta al voltaje del generador.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 29.1

Un circuito se compone de un generador ideal de frecuencia constante, una resistencia, un condensador y un inductor con núcleo de hierro dulce móvil. Es necesario hacer notar que si se introduce un poco más el núcleo de hierro en la bobina, la corriente eficaz crece ligeramente. Antes de mover el núcleo hacia adentro, la frecuencia de resonancia del circuito era (*a*) más baja que la frecuencia del generador, (*b*) igual, (*c*) más alta.

Ejemplo 29.9 Circuito *LCR* en serie resonante con un generador — *Inténtelo usted mismo*

Hallar las tensiones máximas en la resistencia, la bobina y el condensador para la resonancia en el caso del circuito del ejemplo 29.7.

PLANTEAMIENTO El voltaje máximo a través de la resistencia es igual al producto de $I_{máx}$ por R. De igual modo, el voltaje máximo a través de la bobina o el condensador es $I_{máx}$ por la reactancia correspondiente. En el ejemplo 29.7 se determinó que $I_{máx} = 5$ A y $f_0 = 80$ Hz.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Calcular $V_{R\,máx} = I_{máx}R$.	$V_{R\,máx} = I_{máx}R = \boxed{100\text{ V}}$
2. Expresar $V_{L\,máx}$ en función de $I_{máx}$ y X_L.	$V_{L\,máx} = I_{máx}X_L = I_{máx}\omega_0 L = \boxed{5{,}0\text{ kV}}$
3. Expresar $V_{C\,máx}$ en función de $I_{máx}$ y X_C.	$V_{C\,máx} = I_{máx}X_C = \dfrac{I_{máx}}{\omega_0 C} = \boxed{5{,}0\text{ kV}}$

COMPROBACIÓN La impedancia capacitiva, o capacitancia, y la inductiva, o inductancia, son iguales, tal como ocurre en una resonancia. (Por ello, igualando ambas se obtiene la frecuencia de resonancia.)

OBSERVACIÓN La figura 29.22 muestra el diagrama de fasores para los voltajes a través de la resistencia, el condensador y el inductor. El voltaje máximo aplicado a la resistencia corresponde al valor relativamente seguro de 100 V, igual a la fem máxima del generador. Sin embargo, las tensiones máximas que aparecen aplicadas a la bobina y al condensador tienen el valor peligrosamente elevado de 5000 V. Estas tensiones están desfasadas entre sí en 180°. En la resonancia, la tensión que aparece en la bobina en un instante cualquiera es la misma que la que aparece en el condensador, pero con valor negativo, de forma que su suma es siempre cero, haciendo que la tensión en la resistencia sea siempre igual a la fem instantánea del circuito.

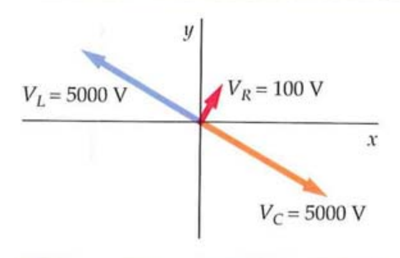


FIGURA 29.22

Ejemplo 29.10 Circuito *RC* como filtro "pasa-baja"

Una resistencia R y un condensador C se encuentran en serie con un generador, que tiene una tensión dada por $\sqrt{2}\,V_{ap\,ef}\cos\omega t$, como se ve en la figura 29.23. Hallar la tensión eficaz de salida en el condensador, $V_{sal\,ef}$ en función de la frecuencia ω.

PLANTEAMIENTO El voltaje eficaz a través del condensador es el producto de la corriente eficaz por la reactancia capacitiva. La corriente eficaz se deduce del voltaje aplicado por el generador y de la impedancia de la asociación RC en serie.

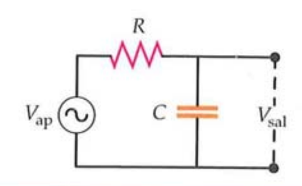


FIGURA 29.23 El voltaje máximo de salida disminuye cuando la frecuencia aumenta.

SOLUCIÓN

1. El voltaje a través del condensador es igual al producto de I_{ef} por X_C: $\quad V_{sal\,ef} = I_{ef}X_C$
2. La corriente eficaz depende del voltaje eficaz aplicado y de la impedancia: $\quad I_{ef} = \dfrac{V_{ap\,ef}}{Z}$
3. En este circuito, sólo R y X_C contribuyen a la impedancia total: $\quad Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$
4. Sustituir estos valores y $X_C = 1/(\omega C)$ para determinar el voltaje eficaz de salida:

$$V_{sal\,ef} = I_{ef}X_C = \frac{V_{ap\,ef}X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{V_{ap\,ef}}{\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{X_C^2}}} = \boxed{\frac{V_{ap\,ef}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}$$

COMPROBACIÓN Las dimensiones del resultado del paso 4 son las correctas. La dimensión de ω es $1/T$ y la de RC es T; en consecuencia, ωRC no tiene dimensiones.

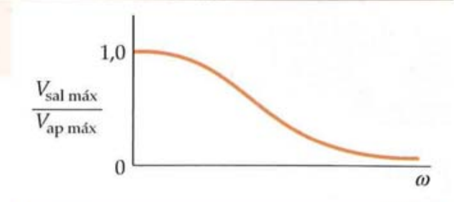
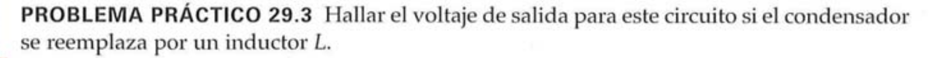


FIGURA 29.24

OBSERVACIÓN Este circuito recibe el nombre de filtro pasa-baja *RC*, porque se transmiten con mayor amplitud las frecuencias bajas que las altas. En efecto, el voltaje de salida es igual al aplicado en el límite de $\omega \to 0$, pero se aproxima a cero para $\omega \to \infty$, como muestra el gráfico de la figura 29.24 en la que se representa la relación entre el voltaje de salida y el aplicado por el generador.



PROBLEMA PRÁCTICO 29.3 Hallar el voltaje de salida para este circuito si el condensador se reemplaza por un inductor L.

Ejemplo 29.11 Sintonizador de frecuencia modulada *Póngalo en su contexto*

Supongamos que se nos ha encargado construir un sintonizador de radio, para lo cual debemos utilizar los conocimientos de Física que nos ha aportado el presente capítulo. Sabemos que el dial de FM marca frecuencias de megahertzs, y nos gustaría determinar qué porcentaje de la variación del coeficiente L de un inductor nos permitiría sintonizar todo el rango de frecuencias de FM. Comenzamos en el centro del espectro de dicho rango y determinamos el porcentaje de incremento o decremento que necesitamos en la inductancia. Un inductor variable estándar puede ser un solenoide con núcleo de hierro; al introducir el núcleo, aumentamos la impedancia inductiva. El dial de FM va desde 88 MHz hasta 108 MHz.

PLANTEAMIENTO Podemos relacionar la inductancia con la frecuencia de resonancia mediante la expresión $\omega = 2\pi f$ y $\omega = 1\sqrt{LC}$. Entonces, si obtenemos el cambio porcentual de la frecuencia, podremos determinar el porcentaje en el cambio de la inductancia. La capacidad C no varía.

SOLUCIÓN

1. La frecuencia angular resonante ω se relaciona con la inductancia L:

$\omega = 1/\sqrt{LC}$

y

$\omega = 2\pi f$

por lo tanto,

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2. Despejando L, se obtiene:

$L = a/f^2$

donde

$a = (4\pi^2 C)^{-1}$

3. Expresamos la variación relativa de L en función de la frecuencia: cuando L es máximo, f es mínimo y viceversa. La frecuencia media, f_m, está a medio camino entre las frecuencias máxima y mínima, y L_m es la inductancia para $f = f_m$:

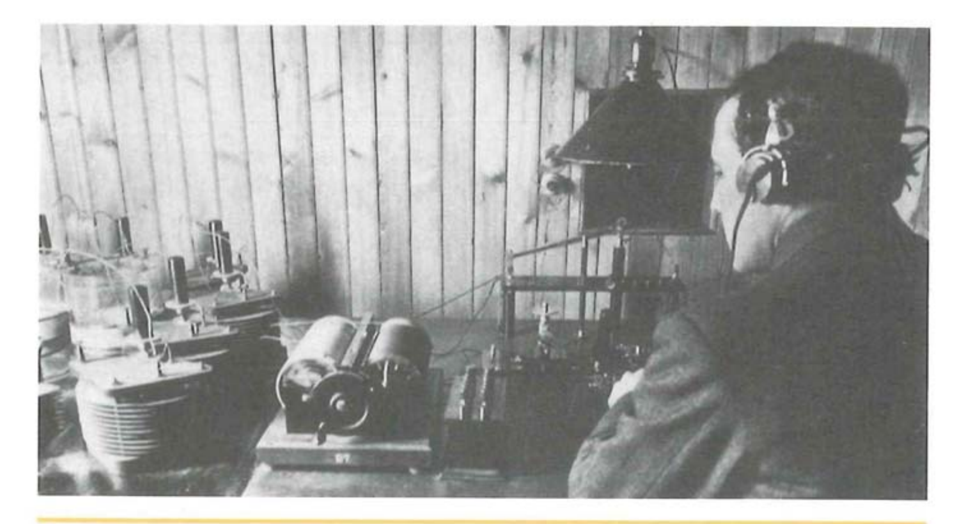
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L_{máx} - L_{mín}}{L_m} = \frac{a/f^2_{máx} - a/f^2_{mín}}{a/f^2_m}$$

$$= f^2_m\left(\frac{1}{f^2_{máx}} - \frac{1}{f^2_{mín}}\right) = 98^2\left(\frac{1}{108^2} - \frac{1}{88^2}\right)$$

$$= -0{,}417$$

4. El signo menos es irrelevante, aunque puede servirnos para indicarnos que cuando la inductancia aumenta, la frecuencia de resonancia disminuye. Expresemos el resultado del paso 3 como un porcentaje:

La inductancia varía alrededor del $\boxed{\text{42 por ciento.}}$



Una radio a bordo de un barco hacia 1920. A la izquierda del operador pueden verse las bobinas y las placas del condensador del circuito sintonizador. *(© George H. Clark Radioana Collection-Archive Center, National Museum of American History.)*

CIRCUITO *LCR* EN PARALELO

En la figura 29.25, se muestran una resistencia R, un condensador C y una bobina L conectados en paralelo a un generador de ac. La corriente total I procedente del generador se divide en tres corrientes, la I_R que pasa por la resistencia, la I_C por el condensador y la I_L por la bobina. La tensión instantánea V_{ap} es la misma para los tres elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión y el fasor $\vec{I}_R$ tiene módulo $V_{máx}/R$. Como la caída de tensión que aparece en un inductor adelanta a la corriente que circula por el inductor en 90°, esta última se retrasa respecto a la tensión en 90° y el fasor I_L tiene módulo $V_{máx}/X_L$. Análogamente, la corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90°, y el fasor $\vec{I}_C$ tiene módulo $V_{máx}/X_C$. Estas corrientes se han representado mediante fasores en la figura 29.26. La corriente total I es la componente x del vector suma de las corrientes individuales, como se indica en la figura. Su módulo es

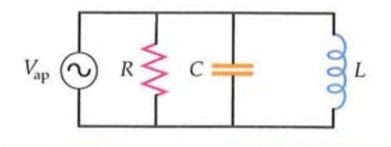


FIGURA 29.25 Circuito *LCR* en paralelo.

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V_{máx}}{R}\right)^2 + \left(\frac{V_{máx}}{X_L} - \frac{V_{máx}}{X_C}\right)^2} = \frac{V_{máx}}{Z} \qquad 29.59$$

estando relacionada la reactancia Z con la resistencia y las impedancias capacitiva e inductiva por

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2 \qquad 29.60$$

En la resonancia, las corrientes en el inductor y en el condensador están desfasadas 180°, de forma que la corriente total está en un mínimo, que corresponde a la corriente que atraviesa la resistencia. A partir de la ecuación 29.59, vemos que esto ocurre cuando Z es máxima, y, por lo tanto, $1/Z$, mínima. Además de la ecuación 29.60 vemos que si $X_L = X_C$, $1/Z$ alcanza el valor mínimo $1/R$. Igualando X_L y X_C, podemos obtener la frecuencia de resonancia, ω, cuyo valor es la frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

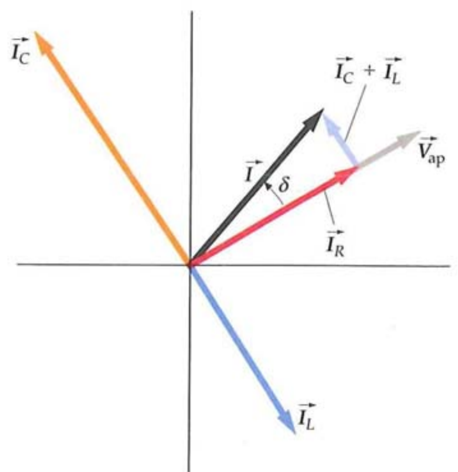


FIGURA 29.26 Diagrama de fasores correspondiente a la tensión y a las corrientes del circuito *LCR* en paralelo de la figura 29.25. La tensión es la misma para todos los elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión. La corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90°, mientras que la de la bobina se retrasa en 90°. La diferencia de fase δ entre la corriente total y la tensión depende de los valores relativos de las intensidades o corrientes, que dependen de los valores de la resistencia y de las reactancias capacitiva e inductiva.

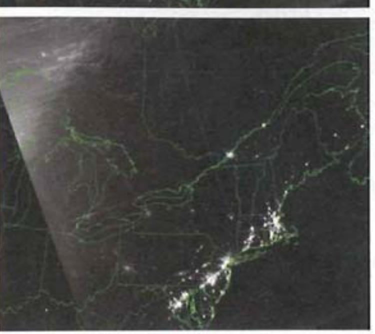
La red eléctrica: energía para el público en general

Todo el mundo depende de los sistemas y redes de distribución de corriente eléctrica. Se necesitan generadores, subestaciones en las que existen transformadores y líneas de transmisión de energía eléctrica de muy alta tensión para poder transmitir la corriente eléctrica de un lugar a otro.[1] En 2002, 150 000 millas de líneas de transmisión de alta tensión y más de 10 000 subestaciones formaban la red eléctrica de los Estados Unidos.[2] Las redes crecen y aumentan su complejidad[3] en todo el mundo.[4,5] Desafortunadamente, los posibles fallos crecen cuando las redes también lo hacen.

La mayoría de los fallos de las redes son a pequeña escala, normalmente causados por el microclima local, por fallos de equipamiento[6] o por la intervención de animales.[7] Pero estos fallos locales pueden servir de experiencia para corregir otros a gran escala como apagones y cortes más generales. Las primeras causas de cortes de corriente son las sobretensiones en transformadores y en líneas. Los daños en la propagación se evitan mediante interruptores que cierran una línea y actúan como supresores de los picos de tensión del sistema considerado como un todo. Rara vez se producen cortes a nivel local cuando la demanda de energía es superior a la producción.

Algunas veces los mismos mecanismos utilizados para prevenir las averías y daños producidos por un corte local de corriente pueden causar averías y cortes en cadena. El 9 de noviembre de 1965, un sistema de control se activó en una central hidroeléctrica al sur de Ontario. La corriente de aquella línea produjo un cambio brusco en cinco líneas de transmisión lo cual causó un colapso múltiple.[8] A causa de esta pérdida brusca de carga, los generadores aceleraron su ritmo de trabajo, lo cual significó que la potencia que suministraban estaba fuera de control con respecto a la de otras líneas proveedoras. Al cabo de pocos minutos, se activaron en cadena sucesivos controles (relés) y, como consecuencia, muchos generadores dejaron de funcionar quedando aislados y en cuatro segundos se activaron los relés en todo el noreste de los Estados Unidos. En cinco minutos, los generadores quedaron fuera de control y unos 30 millones de personas se quedaron sin corriente eléctrica durante varias horas.





Estas dos imágenes de satélite muestran cómo un fallo en la distribución de energía eléctrica afectó a muchas ciudades de EE.UU. y Canadá durante el jueves 14 de agosto de 2003. La imagen de arriba se tomó unas 20 horas antes del apagón mientras que la de abajo 7 horas después de éste. *(Gentileza de Chis Elridge/ Fuerza aérea de EE UU.)*

Este colapso eléctrico tuvo como consecuencia la creación del Consejo Nacional de Seguridad Eléctrica.[9] Se tomaron inmediatas medidas preventivas para asegurar la coordinación de la producción eléctrica,[10,11] y evitar así colapsos generalizados, aunque éstos todavía siguen ocurriendo. En julio de 1977, cayó un rayo sobre una línea de transmisión en unos relés de Nueva York y, debido a una lenta respuesta del operador del sistema, la ciudad quedó sin electricidad durante tres días.[13] El 14 de agosto de 2003, una desafortunada combinación de hechos, tales como una alta demanda, un cortocircuito en una línea por la caída de un enorme árbol y una inadecuada comunicación produjo un colapso eléctrico[12] en el noreste de los Estados Unidos y Canadá, que dejo a 50 millones de personas sin electricidad durante algunos días.[14]

Para prevenir futuros cortes de corriente eléctrica, se está investigando continuamente en mejorar la tecnología de la red eléctrica. Una mejora importante consiste en desarrollar programas informáticos de control para cada una de las partes que componen la red global; con ellos se pretende lograr una mayor flexibilidad[15] y rapidez de actuación ante las posibles contingencias. Otras mejoras son la utilización de líneas con una mayor capacidad, transformadores más eficaces y programas de mantenimiento más sensibles y expeditivos.[16,17]

1 *The Electricity Delivery System.* United States Department of Energy, Office of Electricity Delivery and Energy Reliability, Feb. 2006. http://www.energetics.com/gridworks/pdfs/factsheet.pdf As of Nov. 2006.
2 Ibid.
3 Harris, J. L., et al., "Peak Demand and Energy Projection Bandwidths 2005–2014 Regional and National." National Energy Reliability Council, Sept. 14, 2005. ftp://www.nerc.com/pub/sys/all_updl/docs/pubs/Final_NERC_2005-2014_REGIONAL_BANDWIDTH_REPORT.pdf As of Nov. 2006.
4 "Towards National Power Grid." [sic] Power Grid Corporation of India Limited. http://www.powergridindia.com/pgnew/01-0001-003.asp As of Nov. 2006.
5 Chow, J., Kopp, R., and Portney, P., "Energy Resources and Global Development." *Science*, Nov. 28, 2003, Vol. 302, pp. 1528–1531.
6 Chowdhury, A., et al., "MAPP Bulk Transmission System Outage Report." Mid-Continent Area Power Pool, Jun. 2001. http://www.mapp.org/assets/pdf/BTOR19_1.PDF As of Nov. 2006.
7 Orso, J., "Bangor Hit with Power Outage." *La Crosse Tribune*, Jul. 16, 2006.
8 U.S. Federal Power Commission, "Northeast Power Failure: November 9 and 10, 1965." Washington, DC: U.S. Government Printing Office. At http://blackout.gmu.edu/archive/pdf/fpc_65.pdf As of Nov. 2006.
9 Central Maine Power Company, "The Great Northeast Blackout of 1965." http://www.cmpco.com/about/system/blackout.html As of Nov. 2006.
10 California Independent System Operator, "Load Reduction Programs." California Independent System Operator Procedure E-502, Mar. 15, 2005. http://www.caiso.com/docs/2000/06/15/200006151111359621.pdf As of Nov. 2006.
11 "Emergency Manual Load Shedding." California Independent System Operator Procedure E-502, Feb. 17, 2006. http://www.caiso.com/docs/1998/12/02/1998120218100812000.pdf As of Nov. 2006.
12 Boffey, P. M., "Investigators Agree N. Y. Blackout of 1977 Could Have Been Avoided." *Science*, Sept. 15, 1978, Vol. 201, No. 4360, pp. 994–998.
13 Metz, W. D., " New York Blackout: Weak Links Tie Con Ed to Neighboring Utilities." *Science*, Jul. 29, 1977, Vol. 197, No. 4302, pp. 441–442.
14 U.S.–Canada Power System Outage Task Force, "Final Report on the August 14, 2003 Blackout in the United States and Canada: Causes and Recommendations." ftp://www.nerc.com/pub/sys/all_updl/docs/blackout/ch1-3.pdf As of Nov. 2006.
15 Brown, E., "Creating Stability in a World of Unstable Electricity Distribution." *Logos*, Argonne National Laboratories, Spring 2004, Vol. 22, No. 1. At http://www.anl.gov/Media_Center/logos22-1/electricity.htm As of Nov. 2006.
16 Office of Electric Transmission and Distribution, "GridWorks Multi-Year Plan." United States Department of Energy. http://www.oe.energy.gov/DocumentsandMedia/multiyearplan_final.pdf As of Nov. 2006.
17 U.S.–Canada Power System Outage Task Force, "The August 14, 2003 Blackout One Year Later: Actions Taken in the United States and Canada to Reduce Blackout Risk." Natural Resources Canada and the U.S. Department of Energy, Aug. 13, 2004. ftp://www.nerc.com/pub/sys/all_updl/docs/blackout/Blackout-OneYearLater(PRINT).pdf As of Nov. 2006.

Resumen

1. La reactancia es una propiedad de los condensadores e inductores que depende de la frecuencia y es análoga a la resistencia eléctrica.
2. La impedancia es una propiedad dependiente de la frecuencia de un circuito de ac que es análoga a la resistencia de un circuito de cc.
3. Los fasores son vectores bidimensionales que nos permiten representar las relaciones de fase en un circuito.
4. La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia del generador es igual a la frecuencia natural del circuito oscilante.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Generador de ac	Un generador de ac es un aparato que transforma la energía mecánica en energía eléctrica. Para ello, la energía mecánica se utiliza o bien para hacer girar una bobina conductora dentro de un campo magnético, o bien para hacer girar un imán dentro de una bobina conductora.	
fem generada	$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos(\omega t + \delta)$	29.1
2. Corriente		
Corriente eficaz	$I_{\text{ef}} = \sqrt{(I^2)_{\text{m}}}$	29.8
Corriente eficaz y corriente máxima	$I_{\text{ef}} = \frac{I}{\sqrt{2}} I_{\text{máx}}$	29.9
En una resistencia	$I_{\text{ef}} = \frac{V_{R\,\text{ef}}}{R}$ voltaje y corriente en fase	29.12
En un inductor	$I_{\text{ef}} = \frac{V_{L\,\text{ef}}}{\omega L} = \frac{V_{L\,\text{ef}}}{X_L}$ el voltaje adelanta a la corriente en 90º	29.22
En un condensador	$I_{\text{ef}} = \frac{V_{C\,\text{ef}}}{1/\omega C} = \frac{V_{C\,\text{ef}}}{X_C}$ el voltaje se retrasa respecto a la corriente en 90º	29.26
3. Reactancia		
Reactancia inductiva	$X_L = \omega L$	29.21
Reactancia capacitiva	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	29.27
4. Disipación de potencia media		
En una resistencia	$P_{\text{m}} = V_{R\,\text{ef}} I_{\text{ef}} = (I_{\text{ef}})^2 R$	29.10, 29.12
En un inductor o en un condensador	$P_{\text{m}} = 0$	
5. *Transformadores	Un transformador es un dispositivo utilizado para variar las tensiones y corrientes alternas sin pérdida apreciable de energía. Si un transformador tiene N_1 vueltas en el primario y N_2 en el secundario, la tensión que aparece en el arrollamiento secundario está relacionada con la tensión del primario por $V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$	29.30

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
	Si no hay pérdidas de potencia, $$V_{1\,ef}I_{1\,ef} = V_{2\,ef}I_{2\,ef}$$	29.32
6. *Circuitos en serie *LC* y *LCR*	Si se descarga un condensador a través de una bobina, la carga y la tensión del condensador oscilan con frecuencia angular $$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$	29.37
	La corriente en la bobina oscila con la misma frecuencia, pero está desfasada en 90º respecto a la carga. La energía oscila entre la energía eléctrica del condensador y la energía magnética de la bobina. Si el circuito tiene también resistencia, las oscilaciones son amortiguadas debido a que se disipa energía en la resistencia.	
7. *Fasores	Los fasores son vectores de dos dimensiones que representan la corriente $\vec{I}$, y el voltaje a través de una resistencia $\vec{V}_R$, a través de un condensador $\vec{V}_C$, y a través de un inductor $\vec{V}_L$ en un circuito de ac. Estos fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω que es igual a la frecuencia angular de la corriente. $\vec{V}_R$ está en fase con la corriente, $\vec{V}_L$ está adelantado respecto a la corriente en 90º y $\vec{V}_C$ está retrasado 90º respecto a la corriente. La componente x de cada fasor es igual al módulo de la corriente o a la caída correspondiente de voltaje en cualquier instante.	
8. *Circuitos *LCR* en serie		
Potencial aplicado	$$V_{ap} = V_{ap\,máx}\cos\omega t$$	
Corriente	$$I = \frac{V_{ap\,máx}}{Z}\cos(\omega t - \delta)$$	29.52
Impedancia Z	$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$	29.51
Ángulo de fase δ	$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$	29.49
Potencia media	$$P_m = (I_{ef})^2R = V_{ap\,ef}I_{ef}\cos\delta = \frac{(V_{ap\,ef})^2R\omega^2}{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2R^2}$$	29.54, 29.55, 29.56
Factor de potencia	La magnitud cos δ (ecuación 29.55) se denomina factor de potencia del circuito *LCR*. En la resonancia, δ es cero y el factor de potencia es 1. Por lo tanto, $$P_m = V_{ap\,ef}I_{ef}$$	
Resonancia	Cuando la corriente eficaz es máxima, se dice que el circuito está en resonancia. Las condiciones de resonancia son $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$ $X_L = X_C$, por lo tanto, $$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \delta = 0$$	
9. *Factor *Q*	La agudeza de la curva de resonancia se describe mediante el factor *Q*, que se define como $$Q_{factor} = \frac{\omega_0 L}{R}$$	29.57
	Cuando la curva de resonancia es razonablemente estrecha, el factor Q puede obtenerse por la siguiente aproximación $$Q_{factor} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$	29.58

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

29.1 (*c*)

Respuestas a los problemas prácticos

29.1 (*a*) 2,8 A, (*b*) 96 W, (*c*) $1,9 \times 10^2$ W

29.2 79 μH

29.3 $V_{\text{sal ef}} = V_{\text{ent ef}}/\sqrt{1 + (R/L)^2/\omega^2}$. Este circuito es "pasa-alto"

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Una bobina en un generador de corriente alterna (ac) gira a 60 Hz. ¿Cuánto tiempo pasa entre dos picos de la fuerza electromotriz (fem) de la bobina?

2 • Si el voltaje eficaz de un circuito de ac se duplica, el voltaje máximo (*a*) se duplica, (*b*) se reduce a la mitad, (*c*) crece en un factor $\sqrt{2}$, (*d*) disminuye en un factor $\sqrt{2}$, (*e*) no cambia.

3 • Si la frecuencia de la corriente alterna del circuito de la figura 29.27 se duplica, la inductancia de la bobina (*a*) se multiplica por 2, (*b*) no cambia, (*c*) se divide por 2, (*d*) se multiplica por 4. SSM

4 • Si la frecuencia de la corriente alterna del circuito de la figura 29.27 se duplica, la reactancia inductiva de la bobina (*a*) se multiplica por 2, (*b*) no cambia, (*c*) se divide por 2, (*d*) se multiplica por 4.

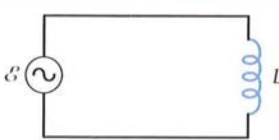
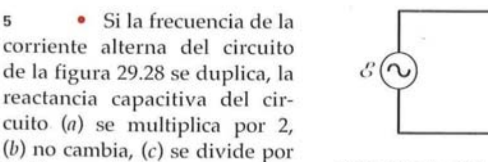


FIGURA 29.27 Problemas 3 y 4

5 • Si la frecuencia de la corriente alterna del circuito de la figura 29.28 se duplica, la reactancia capacitiva del circuito (*a*) se multiplica por 2, (*b*) no cambia, (*c*) se divide por 2, (*d*) se multiplica por 4.



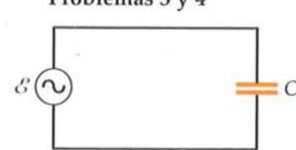


FIGURA 29.28 Problema 5

6 • (*a*) En un circuito constituido por un generador y una bobina, ¿existe algún momento en que la bobina absorbe energía del generador? Si es así, ¿cuándo? ¿Existe algún momento en que la bobina suministra energía al generador? Si es así, ¿cuándo? Razonar ambas respuestas.

7 • (*a*) En un circuito formado por un generador y un condensador, ¿existe algún momento en que el condensador absorbe energía del generador? Si es así, ¿cuándo? ¿Existe algún momento en que el condensador suministra energía al generador? Si es así, ¿cuándo? Explicar ambas respuestas. SSM

8 • (*a*) Demostrar que, en el SI, las unidades del producto de inductancia por capacitancia son de tiempo. (*b*) Demostar que, en el SI, las unidades del cociente entre inductancia y resistencia también son de tiempo.

9 • Cuando la frecuencia del circuito simple de ac de la figura 29.29 crece, la corriente eficaz que circula por la resistencia (*a*) crece, (*b*) no cambia; (*c*) puede aumentar o disminuir según el valor de la frecuencia original, (*d*) puede aumentar o disminuir según el valor de la resistencia, (*e*) disminuye. SSM

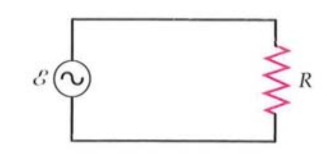


FIGURA 29.29 Problema 9

10 • Si se triplica la inductancia en un circuito constituido por un inductor y un condensador ambos variables, ¿cómo tendría que cambiar la capacitancia para que la frecuencia natural del circuito fuera la misma? (*a*) Triplicarla. (*b*) Dividirla por tres. (*c*) Sin cambios. (*d*) Con los datos aportados no se puede conocer.

11 • Sea un circuito formado por un inductor y un condensador ambos ideales. ¿Cuál es la energía máxima almacenada en el condensador comparada con la de la autoinducción? (*a*) Ambas son iguales al total que almacena el circuito. (*b*) Son iguales y su valor es la mitad de la total. (*c*) Mayor la del condensador que la de la autoinducción. (*d*) Mayor la de la autoinducción que la del condensador. (*e*) No se puede saber, puesto que la relación de energías almacenadas depende de los valores de la capacidad y autoinducción. SSM

12 • Verdadero o falso:

(*a*) Un circuito *LCR* con un factor *Q* elevado tiene una curva de resonancia estrecha.

(*b*) En un circuito *LCR* en serie, si la resistencia se dobla, su frecuencia natural es la misma.

(*c*) En la resonancia, la impedancia de un circuito *LCR* es igual a la resistencia *R*.

(*d*) En la resonancia, la corriente y la tensión del generador están en fase.

13 • Verdadero o falso: en un circuito *LCR* en serie y con generador de corriente alterna,

(*a*) Cerca de la resonancia, el factor de potencia está próximo a cero.

(*b*) El factor de potencia no depende de la resistencia.

(*c*) La frecuencia de resonancia no depende de la resistencia.

(*d*) En la resonancia, el máximo de corriente no depende de la capacitancia e inductancia.

(*e*) Para frecuencias menores que la de resonancia, la capacitancia es mayor que la inductancia.
(*f*) Para frecuencias menores que la de resonancia, la fase de la corriente se adelanta a la de la tensión.

14 • A veces puede ocurrir que dos emisoras de radio se superponen cuando un receptor sintoniza una determinada frecuencia. Esta situación frecuentemente ocurre cuando se viaja entre dos ciudades. Explicar el porqué de esta situación.

15 • Verdadero o falso:

En un circuito *LCR* en serie y con generador de corriente alterna,
(*a*) a frecuencias mucho mayores o mucho menores que la de resonancia, el factor de potencia es próximo a cero.
(*b*) cuanto mayor es la anchura de resonancia, mayor es el factor *Q* de un circuito.
(*c*) cuanto mayor es la resistencia, mayor es la anchura de resonancia de un circuito.

16 • Un transformador ideal tiene N_1 vueltas en el primario y N_2 en el secundario. La potencia media enviada a la resistencia de carga *R* conectada a través del secundario es P_2 cuando la tensión eficaz es V_1. La corriente eficaz en el bobinado del primario se puede expresar de la siguiente forma: (*a*) P_2/V_1, (*b*) $(N_1/N_2)(P_2/V_1)$, (*c*) $(N_2/N_1)(P_2/V_1)$, (*d*) $(N_2/N_1)2(P_2/V_1)$.

17 • Verdadero o falso:
(*a*) Un transformador se usa para cambiar la frecuencia.
(*b*) Un transformador se usa para cambiar la tensión.
(*c*) Si un transformador aumenta la corriente, disminuye la tensión.
(*d*) Un aumento del transformador implica una disminución de la corriente.
(*e*) Los enchufes domésticos habituales en Europa son de 220 V de tensión, casi el doble del voltaje usado en Estados Unidos. Si un viajero europeo desea secarse el cabello en Estados Unidos con su propio secador, deberá utilizar un transformador con más vueltas en su bobinado secundario que en el primario.
(*f*) Los enchufes domésticos habituales en Europa son de 220 V de tensión, casi el doble del voltaje usado en Estados Unidos. Si un viajero americano desea afeitarse con su maquinilla de afeitar en Europa, deberá usar un transformador que aumente la corriente. SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 •• **Aplicación a la ingeniería** Las impedancias de los motores, transformadores y electroimanes poseen una reactancia inductiva. Supongamos que el ángulo de fase de la impedancia total de una gran planta industrial es 25° cuando está en pleno funcionamiento y consume una potencia de 2,3 MW. La energía es suministrada a la factoría por una subestación situada a 4,5 km de la planta. El voltaje eficaz de la línea en la planta es de 40 000 V y la frecuencia 60 Hz. La resistencia de la línea de transmisión de la subestación a la planta es de 5,2 Ω. El coste por kilowatt-hora es 0,07 dólares. La planta paga sólo la energía real utilizada. (*a*) Calcular la resistencia y reactancia inductiva de la carga total de la planta. (*b*) Calcular la corriente eficaz en las líneas de potencia y determinar el voltaje eficaz de la subestación para mantener el voltaje de la planta a 40 000 V. (*c*) ¿Cuánta potencia se pierde en la transmisión? (*d*) Suponer que el ángulo de fase de la impedancia de la planta se reduce a 18° añadiendo una batería de condensadores en serie con la carga. ¿Cuánto dinero se ahorraría con esta modificación durante un mes de trabajo, suponiendo que la planta opera a plena capacidad durante 16 h diarias? (*e*) ¿Cuál debe ser la capacitancia de esta batería de condensadores para lograr este cambio en el ángulo de fase?

CORRIENTE ALTERNA EN RESISTENCIAS, AUTOINDUCCIONES Y CONDENSADORES

19 • Una bombilla de 100 W se conecta a un enchufe con voltaje eficaz de 120 V. Hallar (*a*) I_{ef}, (*b*) $I_{máx}$, y (*c*) la potencia máxima. SSM

20 • Un interruptor de un circuito debe saltar cuando circula una corriente eficaz de 15 A con una tensión eficaz de 120 V. (*a*) ¿Cuál es el mayor valor de $I_{máx}$ que podrá soportar el interruptor? (*b*) ¿Qué potencia media podrá suministrar el circuito en cuestión?

21 • ¿Cuál es la reactancia de una bobina de 1 μH a (*a*) 60 Hz, (*b*) 600 Hz y (*c*) 6 kHz? SSM

22 • Una bobina tiene una reactancia de 100 Ω a 80 Hz. (*a*) ¿Cuál es su inductancia? (*b*) ¿Cuál es su reactancia a 160 Hz?

23 • ¿A qué frecuencia será la reactancia de un condensador de 10,0 μF igual a la reactancia inductiva de una bobina de 1 mH?

24 • ¿Cuál es la reactancia de un condensador de 1 nF a (*a*) 60 Hz, (*b*) 6 kHz, y (*c*) 6 MHz?

25 • Una fem de 10 V de valor máximo y una frecuencia de 20 Hz se aplica a un condensador de 20 μF. Calcular (*a*) $I_{máx}$ y (*b*) I_{ef}. SSM

26 • ¿A qué frecuencia es la reactancia capacitiva de un condensador de 10 μF? (*a*) 1 Ω. (*b*) 100 Ω. (*c*) 0,01 Ω.

27 •• Se conectan dos fuentes de tensión ac en serie con una resistencia $R = 25\ \Omega$. Una de ellas viene dada por $V_1 = (5{,}0\ \text{V})\cos(\omega t - \alpha)$, y la otra por $V_2 = (5{,}0\ \text{V})\cos(\omega t + \alpha)$, siendo $\alpha = \pi/6$. (*a*) Calcular la corriente que atraviesa *R* utilizando una identidad trigonométrica de suma de dos cosenos. (*b*) Usar diagramas de fasores para determinar la corriente en *R*. (*c*) Calcular la corriente en *R* si $\alpha = \pi/4$ y la amplitud de V_2 es ahora de 7 V.

*CIRCUITOS *LCR* SIN GENERADOR

28 • (*a*) Demostrar, partiendo de las definiciones del henry y del farad, que $1/\sqrt{LC}$ tiene unidades de s^{-1} en el sistema internacional SI. (*b*) Demostrar que $\omega_0 L/R$ (expresión del factor *Q*) carece de dimensiones, dadas las de la frecuencia, la autoinducción y la resistencia óhmica.

29 • (*a*) ¿Cuál es el periodo de oscilación de un circuito *LC* compuesto por una bobina de 2 mH y un condensador de 20 μF? (*b*) ¿Qué inductancia se necesita colocar junto a un condensador de 80 μF para construir un circuito *LC* que oscile con una frecuencia de 60 Hz? SSM

30 • Un circuito *LC* tiene una capacidad C_1 y una bobina de inductancia L_1. Un segundo circuito tiene $C_2 = \frac{1}{2}C_1$ y $L_2 = 2\,L_1$, y un tercer circuito tiene $C_3 = 2C_1$ y $L_3 = \frac{1}{2}L_1$. (*a*) Demostrar que los tres circuitos oscilan con la misma frecuencia. (*b*) ¿En qué circuito será más elevada la corriente máxima si la capacidad correspondiente se carga siempre al mismo potencial *V*?

31 •• Se carga a 30 V un condensador de 5 μF y luego se conecta a una bobina de 10 mH. (*a*) ¿Cuánta energía se almacena en el circuito? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del circuito? (*c*) ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito?

32 •• Se puede considerar que una bobina es una inductancia y una resistencia conectadas en serie. Sea una bobina de 1,00 Ω de resistencia y 100 mH de inductancia que se conecta a un condensador de 2 μF cargado a 24 V. (*a*) ¿Cuál es el voltaje inicial entre los extremos de la bobina? (*b*) ¿Cuánta energía se disipa antes de que el circuito deje de oscilar? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del circuito? (Asumir que la resistencia interna es suficientemente pequeña como para que no tenga consecuencias en el valor de la frecuencia del circuito.) (*d*) ¿Cuál es el factor de calidad del circuito?

33 •• Se conectan un condensador y un inductor, tal como muestra la figura 29.30. Cuando el interruptor está abierto, la placa de la izquierda del condensador tiene carga Q_0. Se cierra el interruptor y la carga y la intensidad de corriente varían sinusoidalmente con el tiempo. (*a*) Representar gráficamente la carga Q y la intensidad I en función de t, y explicar por qué la corriente se adelanta a la carga en una diferencia de fase de 90°. (*b*) Usando una identidad trigonométrica, demostrar que la expresión de la intensidad (ecuación 29.39) y la de la carga (29.38) se diferencian en la fase en 90°. SSM

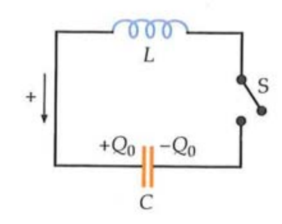


FIGURA 29.30 Problema 33

CIRCUITOS *LR* CON GENERADOR

34 •• Un generador de ac de 60 Hz se conecta en serie con una resistencia R y una bobina de 1,4 H. La tensión eficaz en la resistencia es 30 V y en la bobina 40 V. (*a*) ¿Cuanto vale la resistencia R? (*b*) ¿Cuál es la tensión de entrada de la ac?

35 •• Una bobina tiene una resistencia en cc de 80 Ω y una impedancia de 200 Ω a una frecuencia de 1 kHz. Se puede despreciar la capacidad del arrollamiento de la bobina a esta frecuencia. ¿Cuál es la inductancia de la bobina? SSM

36 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una línea de transmisión simple transporta dos señales de tensión dadas por $V_1 = (10{,}0\text{ V})\cos 100(\omega_1 t)$ y $V_2 = (10{,}0\text{ V})\cos(\omega_2 t)$, donde t se expresa en segundos. Se incluyen en la línea una bobina en serie de 1 H y una resistencia en paralelo de 1 kΩ, como se indica en la figura 29.31. (Asumir que la salida se conecta a una resistencia de carga que extrae una pequeña cantidad de corriente.) (*a*) ¿Cuál es la señal de tensión observada en el terminal de salida de la línea de transmisión? (*b*) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud de baja frecuencia y la amplitud de alta frecuencia?

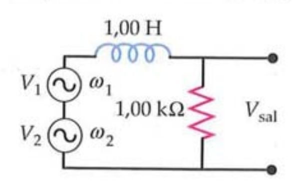


FIGURA 29.31 Problema 36

37 •• Una bobina con resistencia e inductancia se conectan a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces. La potencia media suministrada a la bobina es 60 W y la corriente eficaz es 1,5 A. Hallar (*a*) el factor de potencia, (*b*) la resistencia de la bobina y (*c*) la inductancia de la bobina. (*d*) ¿Adelanta o retrasa la corriente a la tensión? ¿Cuál es el ángulo de fase *d*?

38 •• Un inductor de 36 mH cuya resistencia es de 40 Ω se conecta a una fuente de voltaje $\mathcal{E} = (345\text{ V})\cos(150\,\pi t)$, donde t está en segundos. Determinar la corriente máxima del circuito, el voltaje máximo y el voltaje eficaz a través del inductor, la disipación de potencia media y las energías máxima y media almacenadas en el campo magnético del inductor.

39 •• Una bobina de resistencia R, inductancia L y capacidad despreciable tiene un factor de potencia de 0,866 a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es el factor de potencia para una frecuencia de 240 Hz? SSM

40 •• Una resistencia y una bobina están en paralelo, aplicadas a una fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{máx}\cos\omega t$, como muestra la figura 29.32. Demostrar que (*a*) la corriente que atraviesa la resistencia es $I_R = (\mathcal{E}_{máx}/R)\cos\omega t$, (*b*) la corriente que atraviesa la bobina es $I_L = (\mathcal{E}_{máx}/X_L)\cos(\omega t - 90°)$, y (*c*) la corriente en la fuente de voltaje es $I = I_R + I_L = I_{máx}\cos(\omega t - \delta)$, , siendo $I_{máx} = \mathcal{E}_{máx}/Z$.

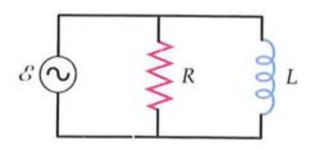


FIGURA 29.32 Problema 40

41 •• La figura 29.33 muestra una resistencia de carga RL = 20 Ω conectada a un filtro de pasa-alta formado por un inductor L = 3,2 mH y una resistencia R = 4 Ω. El voltaje de entrada es $\mathcal{E} = (100\text{ V})\cos(2\pi ft)$. Determinar las intensidades de corriente eficaces en R, L y RL si (*a*) f = 500 Hz y (*b*) f = 2000 Hz. (*c*) ¿Qué fracción de la potencia suministrada por la fuente de voltaje se disipa en la resistencia de carga si la frecuencia es de 500 Hz y si la frecuencia es de 2000 Hz? SSM

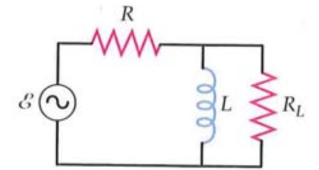


FIGURA 29.33 Problema 41

42 •• Una fuente de ac $\mathcal{E}_1 = (20\text{ V})\cos(2\pi ft)$ en serie con una batería $\mathcal{E}_2$ = 16 V está conectada a un circuito formado por las resistencias R_1 = 10 Ω y R_2 = 8 Ω y un inductor L = 6 mH (figura 29.34). Determinar la potencia disipada en R_1 y R_2 si (*a*) f = 100 Hz, (*b*) f = 200 Hz y (*c*) f = 800 Hz.

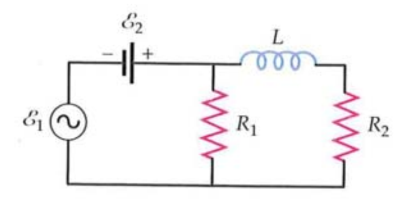


FIGURA 29.34 Problema 42

43 •• Se aplica una tensión eficaz de 100 V a un circuito LCR en serie. La tensión eficaz a través del condensador es de 80 V. ¿Cuál es la tensión eficaz entre los extremos de la resistencia?

FILTROS Y RECTIFICADORES

44 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El circuito de la figura 29.35 se denomina *filtro RC pasa-alta* porque transmite con mayor amplitud las señales de alta frecuencia que las de baja. Si la tensión de entrada es $V_{ent} = V_{máx}\cos(\omega t)$, demostrar que la de salida es $V_{sal} = V_H\cos(\omega t - \delta)$, donde $V_H = V_{ent\,máx}/\sqrt{1 + (\omega RC)^{-2}}$. (Asumir que la salida está conectada a

una impedancia de carga que extrae una parte insignificante de corriente.) Demostrar que este resultado justifica que este circuito constituya un filtro denominado "pasa alta".

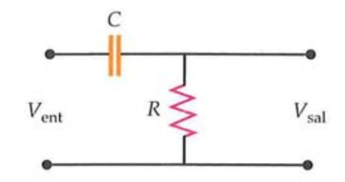


FIGURA 29.35 Problema 44

45 •• (*a*) Expresar la constante de fase δ del problema 44 en función de ω, R y C. (*b*) ¿Cuál es el valor de δ en el límite de $\omega \to 0$? (*c*) ¿Cuál es el valor de δ en el límite de $\omega \to \infty$? (*d*) Explicar las respuestas de las partes (*b*) y (*c*).

46 •• **HOJA DE CÁLCULO** Asumiendo que la resistencia del problema 44 es $R = 20$ kΩ y el condensador tiene una capacidad de $C = 15$ nF, (*a*) ¿a qué frecuencia f se cumple que $V_{sal} = V_{ent}$. (Ésta se conoce como la frecuencia de 3dB, o frecuencia f_{3dB} del circuito.) (*b*) Utilizando una hoja de cálculo, hacer una gráfica de V_{sal} en función de f. Usar una escala logarítmica para cada variable. Extender la escala desde 0,1 f_{3dB} hasta 10 f_{3dB}. (*c*) Hacer una gráfica, también en escala logarítmica de d en función de f. ¿Cuál es el valor de δ para $f = f_{3dB}$?

47 •• Demostrar que si se alimenta al filtro pasa-alta del problema 48 mediante una señal con tensión arbitraria cuya variación temporal sea mucho más lenta que $1/(RC)$, la salida del circuito será proporcional a la derivada del voltaje respecto del tiempo? Este tipo de circuito se denomina *circuito diferencial*. SSM

48 •• Definimos la salida del filtro pasa-alta del problema 44 en la escala de decibelios como $\beta = (20\text{ dB})\log_{10}(V_H/V_{ent\,máx})$. Demostrar que para $V_H = \frac{1}{\sqrt{2}}V_{ent\,máx}$, $\beta = 3{,}0$ dB. A la frecuencia para la que $V_H = \frac{1}{\sqrt{2}}V_{ent\,máx}$ se le denomina f_{3dB} (la frecuencia 3-dB). Demostrar que para $f \ll f_{3dB}$, la salida β cae 6 dB si la frecuencia es la mitad.

49 •• Demostrar que la potencia media disipada en la resistencia del filtro pasa-alta del problema 44 viene dada por

$$P_m = \frac{V^2_{ent\,máx}}{2R[1 + (\omega RC)^{-2}]}.$$ SSM

50 •• Una aplicación del filtro del problema 44 es la de un filtro de ruido, utilizable en circuitos electrónicos (es decir, que se utiliza para bloquear el ruido de baja frecuencia). ¿Qué valor de la capacidad del condensador se necesita para que, utilizando una resistencia $R = 20$ kΩ, el filtro pasa-alta atenúe en un factor 10 una tensión cuya frecuencia de entrada es 60 Hz?

51 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El circuito de la figura 29.36 constituye un filtro pasa-baja. (Asumir que la salida se conecta a una resistencia de carga que extrae una insignificante cantidad de corriente.) (*a*) Si la tensión de entrada es $V_{ent} = V_{ent\,máx}\cos\omega t$, demostrar que la tensión de salida es $V_{sal} = V_L\cos(\omega t - \delta)$, donde $V_L = V_{ent\,máx}/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$. (*b*) Analizar el comportamiento de la tensión de salida en los casos limite de $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$. SSM

52 •• (*a*) Obtener una expresión para la fase del ángulo δ del problema 51 en función de ω, R y C. (*b*) Determinar el valor de δ en los casos límites $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$. Razonar las respuestas.

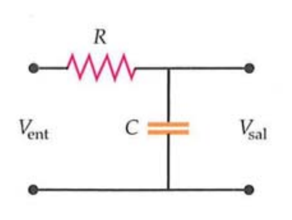


FIGURA 29.36 Problemas 51 y 52

53 •• **HOJA DE CÁLCULO** Utilizando una hoja de cálculo, dibujar una gráfica de V_L en función de $f = \omega/(2\pi)$ y de δ en función de f para el filtro pasa-baja de los problemas 51 y 52. Considerar $R = 10$ kΩ y $C = 5{,}0$ nF.

54 ••• Demostrar que si se alimenta al filtro pasa-baja del problema 51 mediante una señal con tensión arbitraria cuya variación temporal sea mucho más rápida que $1/(RC)$, el voltaje de salida del circuito será proporcional a la integral del voltaje de entrada.

55 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El circuito de la figura 29.37 se denomina circuito trampa. (Asumir que la salida se conecta a una resistencia de carga que extrae una insignificante cantidad de corriente.) (*a*) Demostrar que el filtro trampa de la figura 29.37 rechaza las señales cuya frecuencia sea $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (*b*) ¿Cómo depende de la resistencia R la anchura de la banda de frecuencias rechazada? SSM

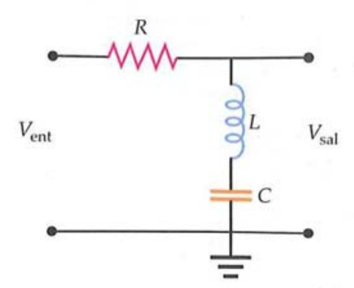


FIGURA 29.37 Problema 55

56 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En la figura 29.38, se muestra un rectificador de media onda que transforma una tensión alterna en continua. El diodo de la figura actúa como una válvula de un solo sentido para la corriente, permitiendo el paso de corriente hacia arriba cuando la tensión entre A y B es mayor que +0,60 V. La resistencia del diodo es infinita cuando el voltaje es menor que +0,6 V. Utilizando los mismos ejes, dibujar dos ciclos de V_{ent} y V_{sal} en función de t considerando que $V_{ent} = V_{ent\,máx}\cos\omega t$.

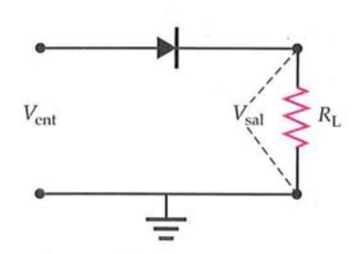


FIGURA 29.38 Problema 56

57 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La salida del rectificador del problema 60 puede ser "suavizada" colocando en su salida un filtro pasa-baja, tal como indica la figura 29.39*a*. La salida resultante es una tensión casi continua con una suave ondulación, como indica la figura 29.39*b*. Si la frecuencia de entrada es $f = \omega / 2\pi = 60$ Hz y la resistencia 1 kΩ, determinar un valor aproximado para C tal que la tensión de salida varíe menos que el 50% del valor medio en un ciclo.

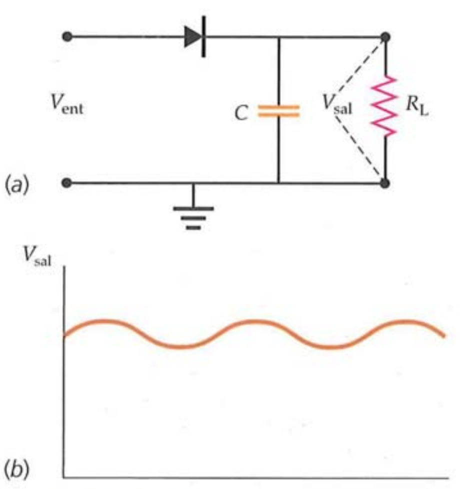




FIGURA 29.39 Problema 57

CIRCUITOS *LC* CON GENERADOR

58 •• La tensión del generador de la figura 29.40 viene dada por $\mathcal{E} = (100\text{ V})\cos(2\pi ft)$. (*a*) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase respecto a la tensión aplicada? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia angular ω a la que se anula la corriente del generador? (*c*) A esta resonancia, ¿cuál es la corriente en la bobina? ¿Cuál es la corriente en el condensador? (*d*) Dibujar un diagrama de fasores que muestre las relaciones generales entre la tensión aplicada, la corriente del generador, la corriente del condensador y la corriente de la bobina para el caso en que la reactancia inductiva sea mayor que la reactancia capacitiva.

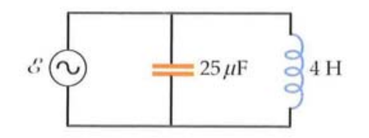


FIGURA 29.40 Problema 58

59 •• La carga del condensador de un circuito *LC* en serie viene dada por $Q = (15\ \mu\text{C})\cos(1250t + \pi/4)$, donde *t* se expresa en segundos. (*a*) Hallar la corriente en función del tiempo. (*b*) Hallar *C* si L = 28 mH. (*c*) Escribir las expresiones correspondientes a la energía eléctrica U_e, la energía magnética U_m y la energía total *U*, en función de *t*.

60 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un método para medir la compresibilidad de un material dieléctrico se usa un circuito *LC* con un condensador de placas paralelas. El dieléctrico se inserta entre las placas y se determina el cambio experimentado por la frecuencia de resonancia cuando las placas del condensador se someten a una compresión. En este dispositivo, la frecuencia de resonancia es 120 MHz cuando entre las placas del condensador se introduce un dieléctrico de espesor 0,1 cm y constante dieléctrica κ = 6,8. Bajo una presión de 800 atm, la frecuencia de resonancia disminuye a 116 MHz. Determinar el módulo de Young del material dieléctrico.

61 ••• La figura 29.41 muestra una bobina *L* y un condensador de placas paralelas de anchura w = 20 cm y espesor 0,2 cm. Un dieléctrico de constante dieléctrica k = 4,8 que llena completamente el espacio entre las placas, puede deslizarse entre ellas. La bobina posee una inductancia L = 2 mH. Cuando la mitad del dieléctrico se encuentra entre las placas del condensador, es decir, cuando $x = \frac{1}{2}w$, la frecuencia de resonancia de esta combinación *LC* es 90 MHz. (*a*) ¿Cuál es la capacidad del condensador sin dieléctrico? (*b*) Determinar la frecuencia de resonancia en función de *x*.

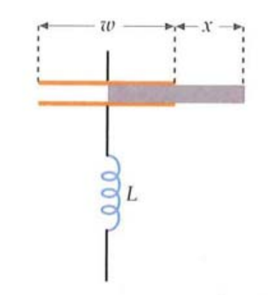


FIGURA 29.41 Problema 61

CIRCUITOS *LCR* CON GENERADOR

62 • Un generador de ac con una fem máxima de 20 V se conecta en serie con un condensador de 20 μF y una resistencia de 80 Ω. No hay ninguna inductancia en el circuito. Hallar (*a*) el factor de potencia, (*b*) la corriente eficaz y (*c*) la potencia media suministrada por el generador. La frecuencia angular del generador es 400 rad/s.

63 •• Demostrar que la fórmula $P_m = R\mathcal{E}_{ef}^2/Z^2$ da el resultado correcto para un circuito que contenga sólo un generador y (*a*) una resistencia, (*b*) un condensador y (*c*) una bobina. En la expresión $P_m = R\mathcal{E}_{ef}^2/Z^2$, P_m es la potencia media suministrada por el generador, $\mathcal{E}_{ef}$ es el valor cuadrático medio de la fem del generador, *R* es la resistencia, *C* la capacidad y *L* la autoinducción. [En la parte (*a*) $C = L = 0$; en la parte (*b*), $R = L = 0$; en la parte (*c*), $R = C = 0$.] SSM

64 •• Un circuito *LCR* en serie con L = 10 mH, C = 2,0 μF y R = 5,0 Ω está conectado a un generador de 100 V de fem máxima y con una frecuencia angular variable ω. Hallar (*a*) la frecuencia de resonancia ω_0 y (*b*) el valor de I_{ef} en la resonancia. Cuando ω = 8000 rad/s, hallar (*c*) X_C y X_L, (*d*) la impedancia, (*e*) corriente eficaz, y (*f*) el ángulo de fase.

65 •• Hallar (*a*) el factor *Q* y (*b*) la anchura de resonancia correspondiente al circuito del problema 64. (*c*) ¿Cuál es el factor de potencia cuando ω = 8000 rad/s? SSM

66 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Las emisoras de radio de FM tienen frecuencias de ondas portadoras que se encuentran separadas por 0,20 MHz. Cuando la radio se sintoniza a la frecuencia de una determinada emisora, tal como 100,1 MHz, la anchura de resonancia del circuito receptor deberá ser mucho menor que 0,2 MHz, de forma que no se reciban las emisoras adyacentes. Si f_0 = 100,1 MHz y Δf = 0,05 MHz, ¿cuál es el factor *Q* de este circuito?

67 •• Una bobina está conectada a un generador de ac de 100 V y 60 Hz. A esta frecuencia, la bobina tiene una impedancia de 10 Ω y una reactancia de 8 Ω. (*a*) ¿Cuál es la corriente que circula por la bobina? (*b*) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? (*c*) ¿Qué capacitancia en serie se requiere para que la corriente y el voltaje estén en fase? (*d*) ¿Cuál es entonces el voltaje medido entre las placas del condensador?

68 •• Un generador de ac de 60 Hz se conecta en serie con una bobina de 0,25 H y un condensador *C*. Se utiliza un voltímetro de ac para medir las tensiones eficaces que aparecen por separado en la bobina y en el condensador. La tensión eficaz que aparece en el condensador es 75 V y la que apaarece en la bobina 50 V. (*a*) Hallar la capacidad *C* y la corriente eficaz del circuito. (*b*) ¿Cuál será el valor medido de la tensión eficaz en el conjunto condensador-bobina?

69 •• En el circuito de la figura 29.42, el generador de ac produce una tensión eficaz de 115 V cuando funciona a 60 Hz. ¿Cuál es la tensión eficaz entre los puntos (*a*) AB, (*b*) BC, (*c*) CD, (*d*) AC y (*e*) *BD*? SSM

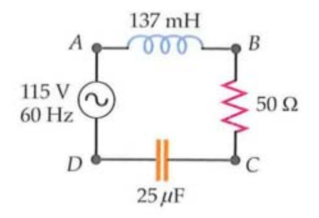


FIGURA 29.42 Problema 69

70 •• Cuando se conecta un circuito *LCR* en serie a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces, la corriente es I_{ef} = 11 A y ésta adelanta a la tensión en 45°. (*a*) Hallar la potencia suministrada al circuito. (*b*) ¿Cuál es la resistencia? (*c*) Si la inductancia es L = 0,05 H, determinar la capacidad *C*. (*d*) Sin cambiar la inductancia, ¿qué capacidad debería tener el condensador para que el factor de potencia fuera 1? (*e*) Sin cambiar la capacidad del condensador, ¿qué inductancia debería tener el inductor para que el factor de potencia fuera 1?

71 •• **HOJA DE CÁLCULO** Representar gráficamente la impedancia Z en función de ω para (*a*) un circuito *RL* en serie, (*b*) un circuito *RC* en serie y (*c*) un circuito *LCR* en serie.

72 •• En un circuito *LCR* en serie conectado a un generador de ac cuya fuerza electromotriz máxima es 200 V, la resistencia es 60,0 Ω y la capacidad 8,00 μF. La autoinducción puede variarse desde 8,00 hasta 40,0 mH mediante la inserción de un núcleo de hierro dentro del solenoide. La frecuencia angular del generador es 2500 rad/s. Si la tensión del condensador no ha de superar los 150 V, hallar (*a*) la corriente máxima y (*b*) el rango de *L* que puede utilizarse con seguridad.

73 •• Un determinado dispositivo eléctrico consume 10 A eficaces y tiene una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 60 Hz, con un voltaje eficaz de 120 V. (*a*) ¿Cuál es la impedancia del aparato? (*b*) ¿A qué asociación en serie de resistencia y reactancia es equivalente este aparato? (*c*) Si la corriente adelanta a la fem, ¿es inductiva o capacitiva la reactancia?

74 •• Un método para medir autoinducciones consiste en conectar la bobina en serie con una capacidad conocida, una resistencia conocida, un amperímetro de ac y un generador de señales de frecuencia variable. La frecuencia del generador de señales se varía y la fem se mantiene constante hasta que la corriente es máxima. (*a*) Si $C = 10\ \mu$F, $\mathcal{E}_{máx} = 10$ V, $R = 100\ \Omega$ e I es máxima para $\omega = 5000$ rad/s, ¿cuánto vale L? (*b*) ¿Cuál es el valor de $I_{máx}$?

75 •• Una resistencia y un condensador están conectados en paralelo a una fem sinusoidal $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{máx}\cos\omega t$, como se ve en la figura 29.43. (*a*) Demostrar que la corriente en la resistencia es $I_R = (\mathcal{E}_{máx}/R)\cos\omega t$. (*b*) Demostrar que la corriente en la rama del condensador es $I_C = (\mathcal{E}_{máx}/XC)\cos(\omega t + 90°)$. (*c*) Demostrar que la corriente total viene dada por la ecuación $I = I_R + I_C = I_{máx}\cos(\omega t + \delta)$, donde $\text{tg}\,\delta = R/X_C$ e $I_{máx} = \mathcal{E}_{máx}/Z$.

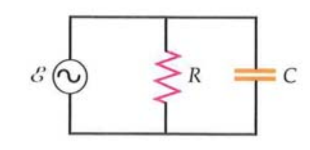


FIGURA 29.43 Problema 75

76 ••• En la figura 29.44, se muestra una representación de la potencia media P_m en función de la frecuencia ω del generador para un circuito *LCR* con un generador. La potencia media P_m viene dada por la ecuación 29.56. La "anchura a la mitad de su valor máximo", $\Delta\omega$, es la anchura de la curva de resonancia entre los dos puntos en que P_m tiene un valor que es la mitad de su valor máximo. Demostrar que en el caso de una resonancia muy aguda $\Delta\omega \approx R/L$ y, por lo tanto, en este caso $Q \approx \omega_0/\Delta\omega$ (ecuación 29.58). *Sugerencia: en la resonancia, el denominador del segundo miembro de la ecuación 29.56 es* $\omega_2 R_2$. *Los puntos a mitad de potencia máxima se presentarán cuando el denominador sea el doble que el que posee cerca de la resonancia, esto es, cuando* $L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2R^2 \approx +\omega_0^2R^2$. *Sean* ω_1 *y* ω_2 *las soluciones de esta ecuación. En el caso de una resonancia aguda,* $\omega_1 \approx \omega_0$ *y* $\omega_2 \approx \omega_0$. *Entonces, aprovechando el hecho de que* $\omega + \omega_0 \approx 2\,\omega_0$, *se tiene que* $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx R/L$.

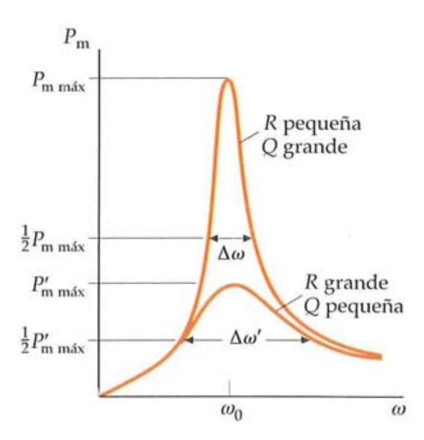


FIGURA 29.44 Problema 76

77 ••• Demostrar por sustitución directa que una solución de $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = 0$ (ecuación 29.43*b*) es $Q = Q_0 e^{-t/\tau}\cos\omega' t$, donde $\tau = 2L/R$, $\omega' = \sqrt{1/(LC) - 1/\tau^2}$, y Q_0 es la carga del condensador a $t = 0$.

78 ••• **Aplicación a la ingeniería** Un método de medida de la susceptibilidad magnética de una muestra utiliza un circuito *LC* formado por un solenoide de núcleo de aire y un condensador. En primer lugar, se determina la frecuencia de resonancia del circuito sin muestra y, a continuación, se repite la medida con la muestra insertada en el solenoide. Supongamos que el solenoide tiene una longitud de 4 cm y un diámetro de 0,3 cm y posee 400 vueltas de alambre fino. Suponer que la muestra que se inserta en el solenoide es también de 4 cm de longitud y llena el espacio de aire. Despreciar los efectos en los extremos del solenoide. (En la práctica, el instrumento se calibra con una muestra de ensayo de susceptibilidad conocida, operando de igual forma que con la incógnita.) (*a*) ¿Cuál es la inductancia del solenoide vacío? (*b*) ¿Cuál debería ser la capacidad del condensador para que la frecuencia de resonancia del circuito sin muestra fuese de 6,0000 MHz? (*c*) Cuando una muestra se inserta en el solenoide, la frecuencia de resonancia disminuye a 5,9989 MHz. Determinar la susceptibilidad de la muestra.

*EL TRANSFORMADOR

79 • Se requiere un voltaje eficaz de 24 V para un dispositivo cuya impedancia es de 12 Ω. (*a*) ¿Cuál debe ser la relación de vueltas en un transformador para que el dispositivo pueda operar con una línea de 120 V? (*b*) Supongamos que el transformador se conecta accidentalmente al revés, es decir, con el arrollamiento del secundario en la línea de 120 V y la resistencia de 12 Ω en el primario. ¿Qué corriente fluirá por el arrollamiento primario? SSM

80 • Un transformador tiene 400 vueltas en el primario y 8 en el secundario. (*a*) ¿Es un transformador elevador o reductor? (*b*) Si se conecta el primario a una tensión eficaz de 120 V, ¿cuál es la tensión en circuito abierto que aparece en el secundario? (*c*) Si la corriente eficaz del primario es 0,1 A, ¿cuál es la corriente del secundario, admitiendo que existe una corriente magnetizante despreciable y que no hay ninguna pérdida de potencia?

81 • El primario de un transformador reductor tiene 250 vueltas y está conectado a 120 V eficaces. El secundario suministra 20 A a 9 V. Calcular (*a*) la corriente en el primario y (*b*) el número de vueltas que posee el secundario, suponiendo un rendimiento del 100%.

82 •• Un oscilador de audio (fuente de ac) con una resistencia interna de 2000 Ω y un voltaje eficaz de salida de 12 V en circuito abierto ha de utilizarse para accionar un altavoz de resistencia 8 Ω. ¿Cuál debe ser la relación de vueltas primario-secundario de un transformador para transferir la máxima potencia al altavoz? Supongamos que un segundo altavoz idéntico está conectado en paralelo con el anterior. ¿Qué potencia debe suministrarse a la asociación de los dos altavoces?

83 • El circuito de distribución de una residencia tiene un voltaje eficaz de 2000 V. Se reduce este voltaje hasta 240 V de tensión eficaz para uso de los residentes. Si el secundario del transformador tiene 400 vueltas, ¿cuántas deberá tener el primario?

PROBLEMAS GENERALES

84 •• Por una resistencia R circula una corriente $I = (5\text{ A})\,\text{sen}\,120\,\pi t + (7\text{ A})\,\text{sen}\,240\,\pi t$. (*a*) ¿Cuál es la corriente eficaz? (*b*) Si la resistencia R es de 12 Ω, ¿qué potencia se disipa en la resistencia? (*c*) ¿Cuál es la tensión eficaz que aparece en la resistencia?

85 •• En la figura 29.45, se indica la tensión V en función del tiempo t correspondiente a una *onda cuadrada*. Si $V_0 = 12$ V, (*a*) ¿cuál es la tensión eficaz de esta onda? (*b*) Si se rectifica esta onda alternativa de modo que sólo permanezcan las tensiones positivas, eliminando las tensiones negativas, ¿cuál será ahora la tensión eficaz de la onda rectificada? SSM

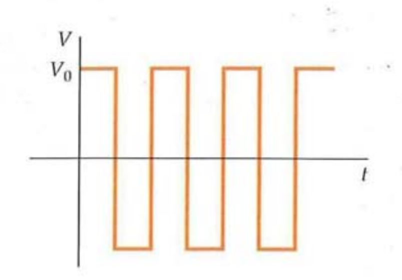


FIGURA 29.45 Problema 85

86 •• ¿Cuáles son los valores medio y eficaz de la corriente en las dos ondas específicas de la figura 29.46?

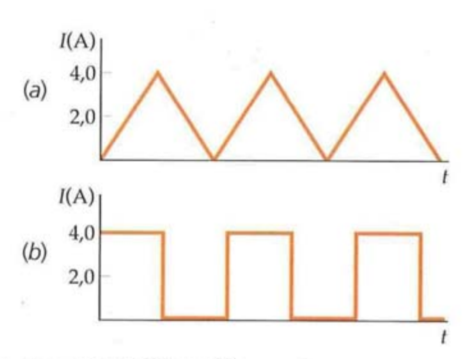


FIGURA 29.46 Problema 86

87 •• En el circuito de la figura 29.47, $\mathcal{E}_1 = (20\text{ V})\cos(2\pi ft)$, $f = 180$ Hz, $\mathcal{E}_2 = 18$ V y $R = 36\ \Omega$. Determinar los valores máximo, mínimo, medio y eficaz de la corriente que circula por la resistencia.

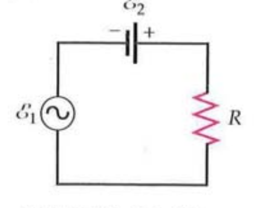
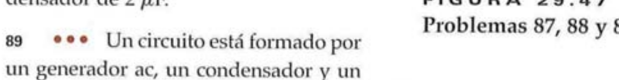


FIGURA 29.47 Problemas 87, 88 y 89

88 •• Repetir el problema 87 si la resistencia R se reemplaza por un condensador de 2 μF.

89 ••• Un circuito está formado por un generador ac, un condensador y un inductor ideal, todos conectados en serie. El generador aporta una tensión $\mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t$. (*a*) Demostrar que la carga en el condensador obedece a la ecuación $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + \dfrac{Q}{C} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t$. (*b*) Demostrar por sustitución directa que esta ecuación satisface $Q = Q_{\text{máx}} \cos \omega t$, donde $Q_{\text{máx}} = -\dfrac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}$. (*c*) Demostrar que la corriente viene dada por la expresión $I = I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \delta)$, donde $I_{\text{máx}} = \dfrac{\omega \mathcal{E}_{\text{máx}}}{L|\omega^2 - \omega_0^2|} = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{|X_L - X_C|}$, $\delta = -90°$ para $\omega < \omega_0$, y $\delta = 90°$ para $\omega > \omega_0$, siendo ω_0 la frecuencia de resonancia. SSM







RED DE 27 ANTENAS PERTENECIENTES AL OBSERVATORIO NACIONAL DE RADIOASTRONOMÍA, UBICADO EN EL DESIERTO CERCA DE SOCORRO EN EL ESTADO DE NUEVO MÉJICO. ESTE CONJUNTO DE ANTENAS CONFIGURAN UNA INSTALACIÓN EN FORMA DE Y. LA INFORMACIÓN OBTENIDA POR ESTE SISTEMA SE PROCESA ELECTRÓNICAMENTE, CONSIGUIÉNDOSE UNA RESOLUCIÓN QUE OCUPA UN ESPACIO DE 22 MILLAS DE ANCHO. *(NRAO/AUI.)*

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

¿No se ha preguntado nunca si una antena irradia ondas en todas direcciones de forma homogénea? (Véase el ejemplo 30.5.)

Las ecuaciones de Maxwell, propuestas por vez primera por el gran físico escocés James Clerk Maxwell, relacionan los vectores de campo eléctrico y magnético $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con sus fuentes, que son las cargas eléctricas y las corrientes. Estas ecuaciones resumen las leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo: las leyes de Coulomb, Gauss, Biot y Savart, Ampère y Faraday. Estas leyes experimentales se cumplen de un modo general excepto la ley de Ampère, que sólo puede aplicarse a las corrientes estacionarias continuas.

Maxwell fue capaz de generalizar la ley de Ampère introduciendo el concepto de corriente de desplazamiento (sección 30.1). Con ello pudo demostrar que las leyes generalizadas de la electricidad y el magnetismo implican la existencia de ondas electromagnéticas.

30.1 CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell desempeñan en el electromagnetismo clásico un papel análogo al de las leyes de Newton en la mecánica clásica. En principio, pueden resolverse todos los problemas de la electricidad y el magnetismo clásicos mediante el empleo de las ecuaciones de Maxwell, de la misma forma que pueden resolverse todos los problemas de la mecánica clásica utilizando las leyes de Newton. Sin embargo, las leyes de Maxwell son considerablemente más complicadas que las de Newton y su aplicación a la mayoría de los problemas exige unos conocimientos matemáticos superiores que escapan de este libro. A pesar de todo, las ecuaciones de Maxwell son de gran importancia teórica. Por ejemplo, Maxwell demostró que estas ecuaciones podían combinarse para originar una ecuación de ondas que debían satisfacer los vectores de campo eléctrico y magnético, $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Estas **ondas electromagnéticas** están originadas por cargas eléctricas aceleradas como, por ejemplo, las cargas eléctricas alternantes presentes en una antena. Estas ondas fueron producidas por primera vez en un laboratorio por Heinrich Hertz en 1887. Maxwell mostró que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el espacio vacío debía ser

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \qquad 30.1$$

VELOCIDAD DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

donde ϵ_0, la permitividad del vacío, es la constante que aparece en las leyes de Coulomb y de Gauss, mientras que μ_0, la permeabilidad del vacío, es la incluida en las leyes de Biot y Savart y de Ampère. Maxwell se dio cuenta con gran entusiasmo de que la medida de la velocidad de la luz coincidía con el valor de $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ y supuso correctamente que la propia luz es una onda electromagnética. Actualmente, el valor de c se define como $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s, el valor de μ_0 como $4\pi \times 10^{-7}$ N/A², y el valor de ϵ_0 según la ecuación 30.1.

La ley de Ampère (ecuación 27.16) relaciona la integral lineal del campo magnético alrededor de una curva cerrada C con la corriente que atraviesa cualquier área limitada por dicha curva:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_S \qquad \text{para cualquier curva cerrada } C \qquad 30.2$$

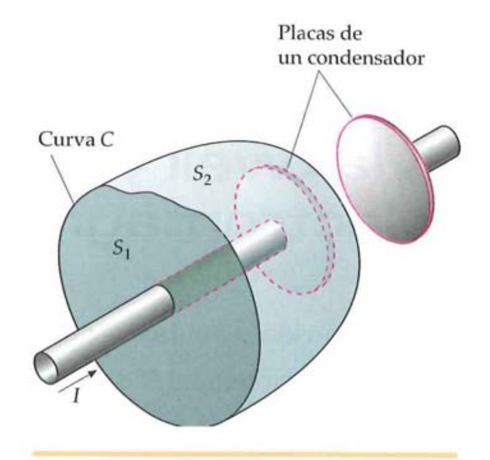


FIGURA 30.1 Dos superficies S_1 y S_2 limitadas por la misma curva C. La corriente I atraviesa la superficie S_1, pero no la S_2. La ley de Ampère, que relaciona la circulación del campo magnético B a lo largo de la curva C con la corriente total que pasa a través de una superficie cualquiera limitada por C, no es válida cuando la corriente no es continua, como sucede al interrumpirse en la placa del condensador, tal como se indica en la figura.

La figura 30.1 muestra dos superficies diferentes, S_1 y S_2, limitadas por la misma curva C, la cual rodea a un alambre que transporta una corriente a una placa de un condensador. La corriente a través de la superficie S_1 es I, pero no existe corriente a través de la superficie S_2 porque la carga se detiene en la placa del condensador. Existe, por lo tanto, una ambigüedad en la frase "la corriente que atraviesa cualquier área limitada por dicha curva". Este problema surge siempre que la corriente es discontinua.

Maxwell demostró que esta ley puede generalizarse incluyendo todas las situaciones si se sustituye la corriente I de la ecuación por la suma de la corriente I y otro término I_d, denominado **corriente de desplazamiento de Maxwell**, definido como

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \qquad 30.3$$

DEFINICIÓN: CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

donde ϕ_e es el flujo del campo eléctrico a través de la misma superficie limitada por la curva C. Entonces, la forma generalizada de la ley de Ampère será

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \qquad 30.4$$

FORMA GENERALIZADA DE LA LEY DE AMPÈRE

Podemos comprender esta generalización considerando de nuevo la figura 30.1. Denominemos corriente generalizada a la suma $I + I_d$*. De acuerdo con el argumento que acabamos de dar, la misma corriente generalizada debe cruzar cualquier superficie limitada por la curva *C*. Las superficies S_1 y S_2 unidas forman una superficie cerrada y la suma de las corrientes generalizadas que atraviesan esta superficie cerrada es igual a la suma de las corrientes generalizadas que salen de ella. Si existe una corriente verdadera neta *I* que entre en el volumen, deberá existir una corriente de desplazamiento neto I_d igual que salga del mismo volumen. En el volumen de la figura existe una corriente neta *I* que entra aumentando la carga en su interior:

$$I = \frac{dQ_{\text{interior}}}{dt}$$

El flujo del campo eléctrico que sale del volumen está relacionado con la carga mediante la ley de Gauss:

$$\phi_{\text{e neto}} = \oint_S E_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

Despejando la carga en la igualdad, obtenemos

$$Q_{\text{interior}} = \epsilon_0 \phi_{\text{e neto}}$$

y derivando con respecto al tiempo ambos miembros de la igualdad, tenemos

$$\frac{dQ_{\text{interior}}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_{\text{e neto}}}{dt}$$

El aumento de carga por unidad de tiempo es así proporcional al aumento del flujo neto que sale del volumen por unidad de tiempo:

$$\frac{dQ_{\text{interior}}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_{\text{e neto}}}{dt} = I_d$$

Por lo tanto, la corriente de conducción neta que entra en el volumen es igual a la corriente de desplazamiento neta que sale del volumen. La corriente generalizada es *siempre* continua.

Es interesante comparar la ecuación 30.4 con la ecuación 28.6:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA \qquad 30.5$$

LEY DE FARADAY

a la cual nos referiremos, en este capítulo, como ley de Faraday. (La ecuación 30.5 es una forma restringida de la ley de Faraday, ya que no incluye fuerzas electromotrices (fem) en sistemas en movimiento. La ecuación 30.5 incluye fem asociadas a variaciones temporales del campo magnético.) De acuerdo con la ley de Faraday, un flujo magnético variable produce un campo eléctrico cuya integral de línea o circulación a lo largo de una curva, es proporcional a la velocidad o ritmo de variación del flujo magnético a través de la curva. La modificación de Maxwell de la ley de Ampère demuestra que un flujo eléctrico variable produce un campo magnético cuya circulación a lo largo de una curva es proporcional a la variación del flujo eléctrico por unidad de tiempo. Así pues, tenemos el interesante resultado recíproco de que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (ley de Faraday) y que un campo eléctrico variable produce un campo magnético (forma generalizada de la ley de Ampère). Obsérvese que no existe ningún análogo magnético de una corriente *I*. Esto es debido a que el monopolo magnético, el análogo magnético de una carga eléctrica, no existe.†

* En un análisis más profundo, la corriente total es la suma de la corriente de conducción y la de desplazamiento. La corriente de conducción se produce por el movimiento de las cargas libres que hay en el material conductor y la de desplazamiento es la que en este libro se asocia con el movimiento de las cargas ligadas (y por tanto localizadas).

† La cuestión de la existencia de monopolos magnéticos siempre ha tenido y sigue teniendo una extraordinaria importancia teórica. Ha habido numerosos intentos de observar monopolos magnéticos; sin embargo, hasta la fecha no se ha podido conseguir.

Ejemplo 30.1 Cálculo de la corriente de desplazamiento

Un condensador de placas paralelas está formado por placas circulares muy cercanas de radio R. En la placa positiva está entrando carga, mientras que está saliendo de la placa negativa a un ritmo $I = dQ/dt = 2{,}5$ A. Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas (figura 30.2) calculando directamente la variación temporal de flujo de $\vec{E}$ a través de la superficie S.

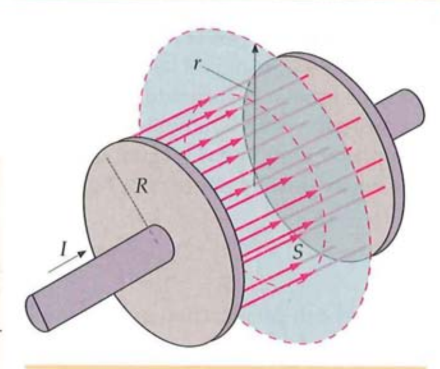


FIGURA 30.2 La superficie imaginaria S está entre las placas del condensador. La carga Q crece a razón de 2,5 coulombs por segundo, lo que es igual a 2 amperes. La distancia entre placas está deliberadamente exagerada para mejor comprensión del dibujo, es decir, las placas están mucho más próximas entre sí de lo que se muestra en la figura.

PLANTEAMIENTO La corriente de desplazamiento es $I_d = \epsilon_0\, d\phi_e/dt$, donde ϕ_e es el flujo eléctrico entre las placas. Como las placas paralelas están muy próximas, podemos considerar que el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a las placas dentro del condensador y despreciable fuera del mismo. Así, el flujo eléctrico es simplemente $\phi_e = EA$, donde E es el campo eléctrico entre las placas y A el área de las mismas.

SOLUCIÓN

1. La corriente de desplazamiento puede determinarse a partir de la derivada respecto al tiempo del flujo eléctrico:
$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

2. El flujo es igual al producto del campo eléctrico por el área:
$$\phi_e = EA$$

3. El campo eléctrico es proporcional a la densidad de carga sobre las placas; consideremos que dicha densidad es uniforme:
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

4. Sustituir estos resultados para el cálculo de I_d:
$$I_d = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 A \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{A\epsilon_0}\right)$$
$$= \frac{dQ}{dt} = \boxed{2{,}5\ \text{A}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 4 es igual a la corriente que circula por los hilos, tal como era de esperar.

Ejemplo 30.2 Cálculo de $\vec{B}$ producido por la corriente de desplazamiento

Las placas circulares del ejemplo 30.1 tienen un radio de $R = 3{,}0$ cm. Hallar el campo magnético B en un punto entre las placas a una distancia $r = 2{,}0$ cm del eje de las mismas cuando la corriente que está entrando en la placa positiva vale 2,5 A.

PLANTEAMIENTO Calcularemos B a partir de la forma generalizada de la ley de Ampère (ecuación 30.4). En la figura 30.3 hemos escogido un trayecto circular C de radio $r = 2{,}0$ cm alrededor de la línea que une los centros de las placas. Entonces, calculamos la corriente de desplazamiento a través de la superficie S limitada por la curva C. Por simetría, $\vec{B}$ es tangente a esta circunferencia y tiene el mismo valor en todos los puntos de la misma.

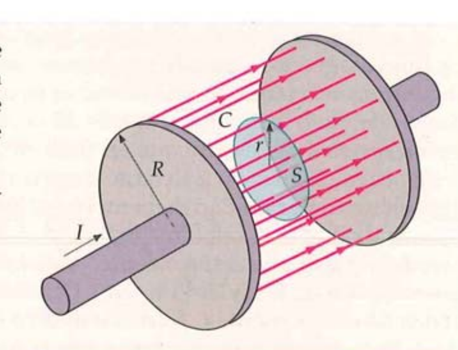


FIGURA 30.3 La distancia entre las placas no está dibujada a escala real. En realidad, las placas están mucho más próximas entre sí de lo que aparecen en el dibujo.

SOLUCIÓN

1. Determinamos B a partir de la forma generalizada de la ley de Ampère:
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d)$$
donde
$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

2. La integral de línea es el producto de B por la longitud de la circunferencia:
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r$$

3. Como no hay cargas en movimiento entre las placas del condensador, $I = 0$ y la corriente generalizada a través de S es justamente la corriente de desplazamiento:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

$$B\cdot 2\pi r = 0 + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

4. El flujo eléctrico es igual al producto del campo constante E por el área A de la superficie plana S limitada por la curva C, siendo $E = \sigma/\epsilon_0$:

$$\phi_e = AE = \pi r^2 E = \pi r^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$= \pi r^2 \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} = \frac{Qr^2}{\epsilon_0 R^2}$$

5. Sustituir estos resultados en el paso 1 y despejar B:

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{Qr^2}{\epsilon_0 R^2}\right) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}\frac{dQ}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2}\frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2} I$$

$$= (2\times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{(0{,}03\ \mathrm{m})^2}(2{,}5\ \mathrm{A})$$

$$= \boxed{1{,}11\times 10^{-5}\ \mathrm{T}}$$

30.2 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\oint_S E_n\,dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}} \qquad 30.6a$$

LEY DE GAUSS

$$\oint_S B_n\,dA = 0 \qquad 30.6b$$

LEY DE GAUSS DEL MAGNETISMO

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S B_n\,dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\,dA \qquad 30.6c$$

LEY DE FARADAY

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d),\ \text{donde } I_d = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t}\,dA \qquad 30.6d$$

LEY DE AMPÈRE

ECUACIONES DE MAXWELL*

La ecuación 30.6*a* es la ley de Gauss; establece que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ veces la carga neta encerrada dentro de la misma. Como vimos en el capítulo 22, la ley de Gauss implica que el campo eléctrico debido a una carga puntual varía en razón inversa al cuadrado de la distancia de la carga. Esta ley describe cómo salen las líneas de campo eléctrico de una carga positiva y convergen sobre una carga negativa. Su base experimental la constituye la ley de Coulomb.

* En estas cuatro ecuaciones, las integrales sobre la línea C y la superficie S se calculan para un tiempo dado.

La ecuación 30.6*b*, a veces denominada ley de Gauss del magnetismo, establece que el flujo del vector de campo magnético $\vec{B}$ es cero a través de cualquier superficie cerrada. Esta ecuación describe la observación experimental de que las líneas de campo magnético no divergen de ningún punto del espacio ni convergen sobre ningún otro punto; es decir, esto implica que no existen polos magnéticos aislados.

La ecuación 30.6*c* es la ley de Faraday; afirma que la integral del campo eléctrico a lo largo de cualquier curva cerrada *C* (la circulación), que es la fem, es igual a la variación por unidad de tiempo (con signo negativo) del flujo magnético que atraviesa la superficie *S* limitada por la curva *C*. (Esta superficie no es cerrada, de manera que el flujo magnético a través de *S* no tiene que ser necesariamente cero.) La ley de Faraday describe cómo las líneas de campo eléctrico rodean cualquier superficie a través de la cual existe un flujo magnético variable y relaciona el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ con la variación respecto al tiempo del vector de campo magnético $\vec{B}$.

La ecuación 30.6*d*, que es la ley de Ampère con la modificación de Maxwell de la corriente de desplazamiento, establece que la integral de línea o circulación del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de cualquier curva cerrada *C* es igual a μ_0 multiplicado por la corriente que atraviesa la superficie *S* limitada por la citada curva más el producto de $\mu_0\epsilon_0$ por la variación respecto al tiempo de flujo eléctrico que atraviesa la superficie *S*. Esta ley describe cómo las líneas de campo magnético rodean una superficie a través de la cual o bien está pasando una corriente, o bien existe un flujo eléctrico variable.

En la sección 30.3 demostraremos cómo las ecuaciones de onda del campo eléctrico $\vec{E}$ y del campo magnético $\vec{B}$ pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell.

30.3 LA ECUACIÓN DE ONDAS PARA LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

En la sección 15.1 vimos que las ondas en una cuerda obedecen a una ecuación en derivadas parciales llamada **ecuación de onda**:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad 30.7$$

donde $y(x,t)$ es la función de onda, que en el caso de las ondas en una cuerda corresponde al desplazamiento de la cuerda. La velocidad de la onda es $v = \sqrt{F_T/\mu}$, siendo *F* la tensión y μ la densidad lineal de masa. La solución general de esta ecuación es

$$y(x,t) = y_1(x - vt) + y_2(x + vt)$$

donde y_1 e y_2 son funciones de $x - vt$ y $v + vt$, respectivamente. Las funciones correspondientes a esta solución general pueden expresarse como una superposición de funciones de onda armónicas (trigonométricas) de la forma

$$y(x,t) = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad \text{y} \quad y(x,t) = y_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular.

Las ecuaciones de Maxwell implican que tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ obedecen a ecuaciones de onda semejantes a la ecuación 30.7. Consideramos sólo el vacío, en el cual no hay cargas o corrientes y suponemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones del tiempo y de una sola coordenada espacial que tomaremos como coordenada *x*. Una onda de este tipo se llama **onda plana**, porque $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son uniformes en todos los puntos de cualquier plano perpendicular al eje *x*. Para una onda electromagnética plana que se propaga paralelamente al eje *x*, las componentes *x* de los campos son nulas, de modo que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares al eje *x* y obedecen, respectivamente, a las siguientes ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad 30.8a$$

ECUACIÓN DE ONDA PARA $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad 30.8b$$

ECUACIÓN DE ONDA PARA $\vec{B}$

donde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ es la velocidad de las ondas. (*Nota*: un pequeño análisis dimensional ayuda a recordar estas ecuaciones. En cada ecuación, los numeradores de ambos lados de la igualdad son iguales y los denominadores tienen dimensión de cuadrado de longitud.)

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Relacionemos en primer lugar la derivada respecto al tiempo de uno de los vectores campo con la derivada respecto al espacio del otro. Hacemos esto aplicando la ley de Faraday (ecuación 30.6*c*) y la versión modificada de la ley de Ampère (ecuación 30.6*d*) a curvas del espacio adecuadamente elegidas. Primero relacionaremos la derivada espacial de E_y con la derivada respecto al tiempo de B_Z aplicando la ecuación 32.6*c* (la ley de Faraday) a la línea rectangular de lados Δx y Δy que se encuentra contenida en el plano *xy*, como se muestra en la figura 30.11. La circulación de $\vec{E}$ alrededor de *C* (integral de línea de $\vec{E}$ alrededor de la curva *C*) es

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_y(x_2)\Delta y - E_y(x_1)\Delta y = [E_y(x_2) - E_y(x_1)]\Delta y$$

donde $E_y(x_1)$ y $E_y(x_2)$ son los valores de E_y en los puntos x_1 y x_2, respectivamente. Las contribuciones del tipo $E_x\Delta x$ de los lados superior e inferior son cero porque $E_x = 0$. Como Δx es muy pequeño (comparado con la longitud de onda), podemos sustituir la diferencia de E_y en los lados derecho e izquierdo de la curva (puntos x_1 y x_2), aproximadamente, por

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E_y \approx \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x$$

Entonces

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x \Delta y$$

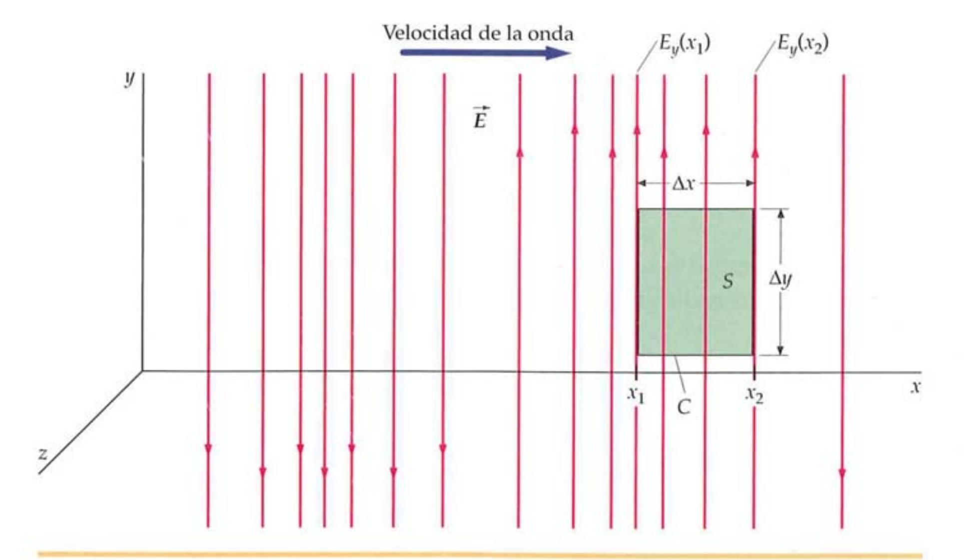


FIGURA 30.4 Línea rectangular cerrada dibujada en el plano *xy* para la deducción de la ecuación 30.9.

La ley de Faraday es

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

El flujo $\partial B_n/\partial t$ a través del área limitada por esta curva vale, aproximadamente,

$$\int_S B_n \, dA \approx \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \, \Delta y$$

La ley de Faraday nos da entonces

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \, \Delta y = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \, \Delta y$$

o sea,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad 30.9$$

La ecuación 30.9 implica que si existe una componente de campo eléctrico E_y que depende de x, debe existir una componente de inducción magnética B_z que depende del tiempo o, inversamente, si existe una componente de inducción magnética B_z que depende del tiempo, debe existir un campo eléctrico E_y que depende de x. Podemos obtener una ecuación semejante relacionando la derivada espacial de Bz con la derivada temporal E_y mediante la aplicación de la ecuación 30.6*d* (ley de Ampère) al rectángulo de lados Δx y Δz contenido en el plano xz, como se ve en la figura 30.5.

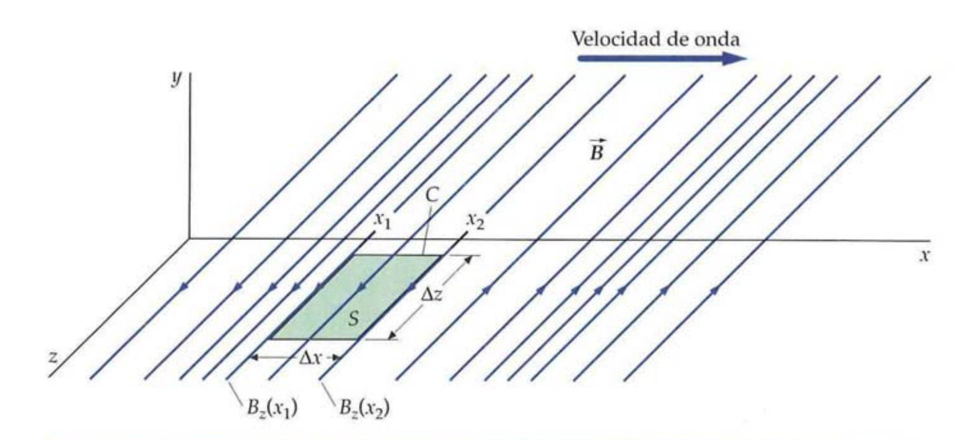


FIGURA 30.5 Línea rectangular cerrada dibujada en el plano xz para la deducción de la ecuación 30.10.

En el caso en que no existan corrientes de conducción $I = 0$, la ecuación 30.6*d* se reduce a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$$

Omitimos los detalles de este cálculo, que son análogos a los realizados para obtener la ecuación 30.9; el resultado es

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad 30.10$$

Podemos eliminar B_z o E_y de las ecuaciones 30.9 y 30.10 derivando cualquiera de ellas respecto a x o t. Si derivamos ambos miembros de la ecuación 30.9 respecto a x, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

Intercambiando el orden de las derivadas espaciales y temporales en el miembro de la derecha de la igualdad, obtenemos

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

Ahora sustituimos $\partial B_z/\partial x$ mediante la ecuación 30.10:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)$$

que nos da la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad 30.11$$

Comparando esta ecuación con la 30.7, vemos que E_y obedece a una ecuación de onda para ondas con velocidad $v = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, que es la ecuación 30.1.

Por el contrario, si hubiésemos escogido eliminar E_y de las ecuaciones 30.9 y 30.10 (derivando, por ejemplo, la ecuación 30.9 respecto a t) habríamos obtenido una ecuación idéntica a la 30.11, con B_z sustituyendo a E_y. Así pues, hemos demostrado que tanto el campo eléctrico E_y como el magnético B_z obedecen a una ecuación de onda para las ondas que se mueven con velocidad $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, que es la velocidad de la luz.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que hemos utilizado hasta ahora, y aplicando la ecuación 30.6*c* (ley de Faraday) a la línea del plano xz (figura 30.5), obtendríamos

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad 30.12$$

Análogamente, la aplicación de la ecuación 30.6*d* a la línea del plano xy de la figura 30.4 nos da

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad 30.13$$

Podemos utilizar estos resultados para demostrar que, en el caso de una onda que se propaga en la dirección x, las componentes E_z y B_y también obedecen la ecuación de ondas.

Para demostrar que el campo magnético B_z está en fase con el campo eléctrico E_y, consideremos la función de onda armónica de la forma

$$E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad 30.14$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación 30.9, resulta

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0\cos(kx - \omega t)$$

Para despejar B_z hacemos la integral de $\partial B_z/\partial t$ respecto al tiempo y obtenemos

$$B_z = \int\frac{\partial B_z}{\partial t}dt = \frac{k}{\omega}E_0\operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) \qquad 30.15$$

donde $f(x)$ es una función arbitraria de x.

PROBLEMA PRÁCTICO 30.1

Verificar la ecuación 30.15 demostrando que $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{k}{\omega}E_0\operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x)\right]$ es igual a $-kE_0\cos(kx - \omega t)$.

Sustituimos la solución (ecuación 30.14) en la ecuación 30.14 y obtenemos

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega\mu_0\epsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t)$$

Despejando B_z, obtenemos

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial x}dx = \frac{\omega\mu_0\epsilon_0}{k}E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t) \qquad 30.16$$

donde $g(t)$ es una función de t arbitraria. Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones 30.15 y 30.16, nos da

$$\frac{k}{\omega}E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) = \frac{\omega\mu_0\epsilon_0}{k}E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

Sustituyendo ω/k por c y $\mu_0\epsilon_0$ por $1/c^2$, nos da

$$\frac{1}{c}E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) = \frac{1}{c}E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

lo cual implica $f(x) = g(t)$ para todos los valores de x y t, y esto sólo es posible si $f(x) = g(t) =$ constante (obviamente independiente tanto de x como de t). Entonces, la ecuación 30.24 viene a ser

$$B_z = \frac{k}{\omega}E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \text{constante} = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad 30.17$$

donde $B_0 = (k/\omega)E_0 = (1/c)E_0$. La constante de integración queda eliminada porque no juega ningún papel en la onda, ya que esta constante indica una mera adición de campo magnético estático y uniforme. Como los campos eléctrico y magnético oscilan en fase con la misma frecuencia, tenemos que en una onda electromagnética, el módulo del campo eléctrico es igual al módulo del campo magnético multiplicado por la velocidad de la luz c.

$$E = cB \qquad 30.18$$

La dirección de propagación de la onda electromagnética es la del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$. En el caso de la discusión anterior, el campo eléctrico es $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{j}$ y el magnético $\vec{B} = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{k}$. Entonces, tenemos

$$\vec{E} \times \vec{B} = [E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{j}] \times [B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{k}] = E_0B_0 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\hat{i}$$

El término de la derecha es un vector en la dirección de las x positivas; de esta forma se verifica que $\vec{E} \times \vec{B}$ es la dirección de propagación de la onda electromagnética.

Vemos que las ecuaciones de Maxwell implican las ecuaciones de onda 30.8*a* y 30.8*b* para los campos eléctrico y magnético; y que si E_y varía armónicamente, como en la ecuación 30.14, el campo magnético B_z está en fase con E_y y su amplitud está relacionada con la amplitud de E_y por $B_z = E_y/c$. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda, como se ve en la figura 30.4.

> ! La dirección de propagación de la onda es siempre la del vector de Poynting, $\vec{E} \times \vec{B}$.

Ejemplo 30.3 $\vec{B}(x, t)$ para una onda plana linealmente polarizada

El campo eléctrico de una onda electromagnética viene dado por $\vec{E}(x, t) = E_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{k}$. (*a*) ¿Cuál es la dirección de propagación de la onda? (*b*) ¿Cuál es la expresión del campo magnético de la onda?

PLANTEAMIENTO El argumento del seno nos da la dirección de propagación. $\vec{B}$ es perpendicular tanto a $\vec{E}$ como a la dirección de propagación. $\vec{B}$ y $\vec{E}$ están en fase.

SOLUCIÓN

(*a*) El argumento de la función seno ($kx \times \omega t$) define la dirección de propagación:

La dirección de propagación es aquella de $-y$ creciente, que es la dirección de $-\hat{j}$.

(*b*) 1. $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{E}$, y ambos campos están en fase y son perpendiculares a la dirección de propagación k. (Es decir, $\vec{B}$ es perpendicular tanto a $\hat{j}$ como a $\hat{k}$.) Esto significa:

O bien $\vec{B}(y, t) = +B_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{i}$ o

$\vec{B}(y, t) = -B_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{i}$

2. $\vec{E} \times \vec{B}$ es un vector en la dirección de propagación $-\hat{j}$. Utilizar la expresión de $\vec{B}(x, t) = +B_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{i}$ y calcular el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{B} &= E_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{k} \times B_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{i} \\ &= E_0B_0 \operatorname{sen}^2(ky + \omega t)(\hat{k} \times \hat{i}) \\ &= E_0B_0 \operatorname{sen}^2(ky + \omega t)\hat{j}\end{aligned}$$

3. El resultado del paso 2 está en contradicción con el hecho de que la dirección de propagación está en la dirección $-y$. Calcular el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ con la otra expresión del campo magnético:

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{B} &= E_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{k} \times (-B_0) \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{i} \\ &= E_0(-B_0) \operatorname{sen}^2(ky + \omega t)(\hat{k} \times \hat{i}) \\ &= -E_0B_0 \operatorname{sen}^2(ky + \omega t)\hat{j}\end{aligned}$$

4. El resultado del paso 3 fija la dirección de propagación. La expresión correcta del campo magnético es:

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = -B_0 \operatorname{sen}(ky + \omega t)\hat{i}}$$

donde $B_0 = E_0/c$ (ecuación 30.18).

OBSERVACIÓN El resultado del paso 4 significa que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y a la dirección de propagación.

Ejemplo 30.4 $\vec{B}$ (*x, t*) en una onda plana con polarización circular

El vector de campo eléctrico de una onda electromagnética viene dado por $\vec{E}(x, t) = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{j} + E_0\cos(kx - \omega t)\hat{k}$. (*a*) Hallar el campo magnético correspondiente. (*b*) Calcular $\vec{E} \cdot \vec{B}$ y $\vec{E} \times \vec{B}$.

PLANTEAMIENTO Se puede resolver el problema considerando el principio de superposición. El campo eléctrico dado es la superposición de dos campos, uno que viene dado por la ecuación 30.14 y otro que viene dado por $E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. A partir de la expresión de la fase (el argumento de la función trigonométrica) podemos ver que la dirección de propagación es la dirección positiva de las x:

La fase es la de una onda propagándose en la dirección positiva de las x.

2. El campo eléctrico dado puede ser considerado como la superposición de $\vec{E}_1 = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{j}$ y $\vec{E}_2 = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$. Determinar los campos magnéticos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ asociados a cada uno de los campos eléctricos. Utilizar el procedimiento del ejemplo 30.3:

Para $\vec{E}_1 = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{j}$, $\vec{B}_1 = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{k}$
donde $B_0 = E_0/c$ (ecuación 30.18),
y
Para $\vec{E}_2 = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$, $\vec{B}_2 = -B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j}$
donde $B_0 = E_0/c$.

3. La superposición de los campos magnéticos da el siguiente campo magnético resultante:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}(x, t) &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ &= B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{k} - B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j} \\ &\text{donde} \\ B_0 &= E_0/c\end{aligned}}$$

(*b*) 1. Hacer $\theta = kx - \omega t$ para simplificar la notación y calcular $\vec{E} \cdot \vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{B} &= (E_0 \operatorname{sen}\theta\, \hat{j} + E_0 \cos\theta\, \hat{k}) \cdot (B_0 \operatorname{sen}\theta\, \hat{k} - B_0 \cos\theta\, \hat{j}) \\ &= E_0B_0 \operatorname{sen}^2\theta\, \hat{j} \cdot \hat{k} - E_0B_0 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \hat{j} \cdot \hat{j} \\ &\quad + E_0B_0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, \hat{k} \cdot \hat{k} - E_0B_0 \cos^2\theta\, \hat{k} \cdot \hat{j} \\ &= 0 - E_0B_0 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + E_0B_0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - 0 = \boxed{0}\end{aligned}$$

2. Calcular $\vec{E} \times \vec{B}$:

$$\vec{E} \times \vec{B} = (E_0 \operatorname{sen}\theta\, \hat{j} + E_0 \cos\theta\, \hat{k}) \times (-B_0 \cos\theta\, \hat{j} + B_0 \operatorname{sen}\theta\, \hat{k})$$
$$= -E_0B_0 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, (\hat{j} \times \hat{j}) + E_0B_0 \operatorname{sen}^2\theta\, (\hat{j} \times \hat{k})$$
$$- E_0B_0 \cos^2\theta\, (\hat{k} \times \hat{j}) + E_0B_0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, (\hat{k} \times \hat{k})$$
$$= 0 + E_0B_0 \operatorname{sen}^2\theta\, \hat{i} + E_0B_0 \cos^2\theta\, \hat{i} + 0 = \boxed{E_0B_0\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 2 de la parte (*b*) del problema verifica que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y el paso 2 de esta misma parte verifica que $+x$ es la dirección de propagación.

OBSERVACIÓN Este tipo de onda electromagnética se denomina polarizada circularmente. Para un valor fijo de x, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se mueven sobre una circunferencia con frecuencia angular ω.

PROBLEMA PRÁCTICO 30.2 Calcular $\vec{E} \cdot \vec{E}$ y $\vec{B} \cdot \vec{B}$. Obsérvese que los módulos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son constantes.

30.4 RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

La figura 30.6 muestra los vectores de campo de una onda electromagnética. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Las ondas electromagnéticas son, por lo tanto, ondas transversales. Los campos de E y B están en fase y, en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo, sus módulos están relacionados por la expresión

$$E = cB \qquad 30.18$$

donde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ es la velocidad de la onda. La dirección de propagación de una onda electromagnética es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$.

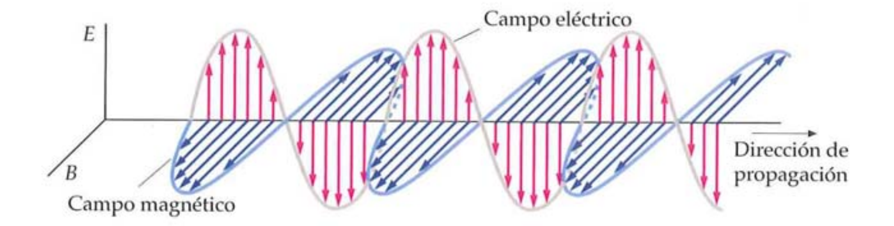


FIGURA 30.6 Los vectores de los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética. Los campos están en fase perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

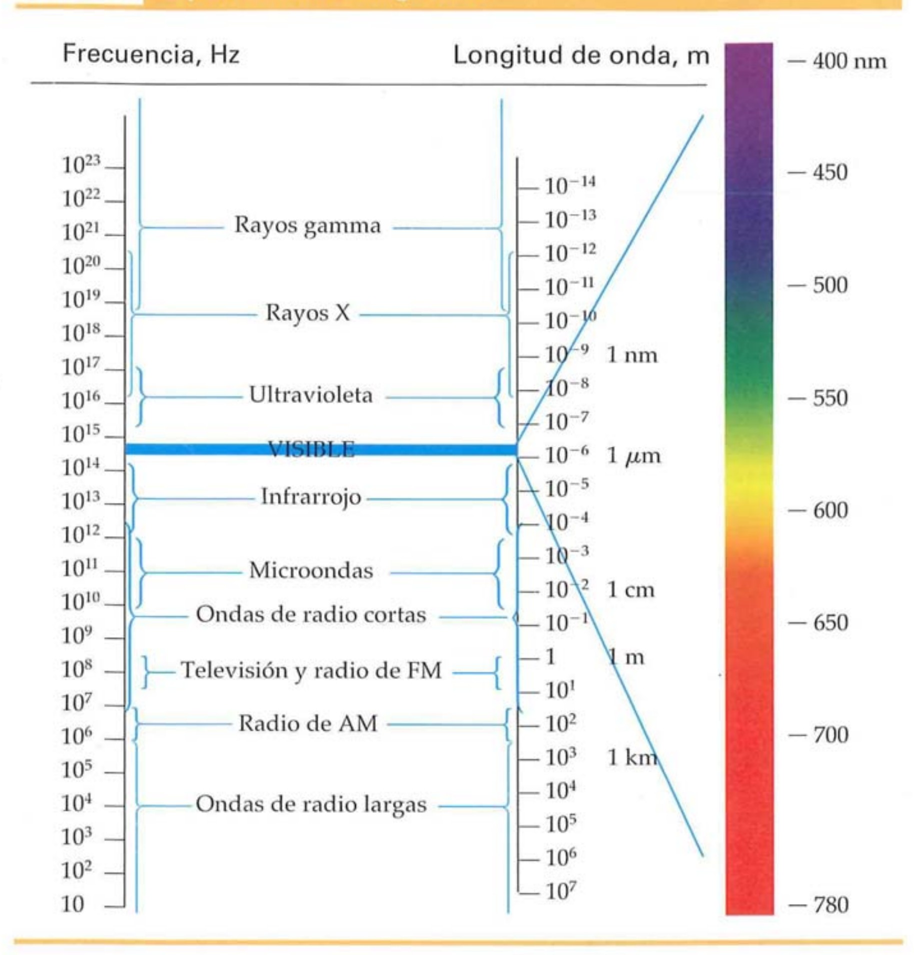
EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

Los diversos tipos de ondas electromagnéticas —luz, ondas de radio, rayos X, rayos gamma, microondas, etc. —difieren sólo en su longitud de onda y frecuencia, que están relacionadas con la velocidad c en la forma usual, $f\lambda = c$. En la tabla 30.1, se expone el **espectro electromagnético** y los nombres normalmente asociados con los diversos intervalos de frecuencia y longitud de onda. Estos intervalos no están a veces bien definidos y frecuentemente se solapan. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas con longitudes de onda del orden de 0,1 nm suelen denominarse rayos X, pero si se originan a partir de la radiactividad nuclear se llaman rayos gamma.

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética con longitudes de onda comprendidas entre 400 y 780 nm*, aproximadamente, intervalo del espectro que se denomina **luz visible**. Las longitudes de onda más cortas del espectro visible corresponden a la luz violeta y las más largas a la luz roja, y entre estos extremos se encuentran todos los colores del arco iris. Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda ligeramente inferiores a las de la luz visible se denominan **rayos ultravioleta** y las que tienen longitudes de onda ligeramente superiores, se conocen

* La luz cuya longitud de onda está entre 700 y 780 nm puede verse sólo en determinadas circunstancias entre las que se incluye una muy alta intensidad lumínica.

Tabla 30.1 Espectro electromagnético



como **ondas infrarrojas**. La radiación térmica emitida por los cuerpos a temperaturas ordinarias se encuentra en la región infrarroja del espectro electromagnético. No existen límites en las longitudes de onda de la radiación electromagnética; es decir, todas las longitudes de onda (o frecuencias) son teóricamente posibles.

Las diferencias de longitud de onda de las diversas clases de ondas electromagnéticas tienen una gran importancia. Como sabemos, el comportamiento de las ondas depende en gran medida de los valores relativos de las longitudes de onda en comparación con los tamaños de los objetos físicos o aberturas que las ondas encuentren. Como las longitudes de onda de la luz se situan en el intervalo más bien estrecho de 400 a 700 nm, son mucho más pequeñas que la mayoría de los objetos, de modo que suele ser válida la óptica de rayos, es decir, la óptica geométrica (introducida en la sección 15.4). También son importantes la longitud de onda y la frecuencia a la hora de determinar las clases de interacción que se producen entre las ondas y la materia. Los rayos X, por ejemplo, que tienen longitudes de onda muy cortas y frecuencias elevadas, penetran fácilmente en muchos materiales que son opacos a ondas luminosas de menor frecuencia, que son absorbidas por dichos materiales. Las microondas tienen longitudes de onda entre 1 mm y 30 cm y, por ello, se utilizan para calentar los alimentos en los denominados hornos de microondas. El principal mecanismo que genera este calentamiento es el de la absorción de la radiación por las moléculas polares, lo cual hace que sus dipolos giren más rápidamente alineándose con el campo eléctrico. Este aumento del movimiento de rotación de los dipolos es el que produce el calentamiento. Además, la radiación electromagnética en el rango de las microondas se usa en mecanismos de transmisión de señales sin hilos en zonas localizadas de pequeña extensión, tales como el "diente azul (bluetooth)"y otros.

PRODUCCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ondas electromagnéticas se producen cuando se aceleran las cargas eléctricas o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas verifican transiciones a estados de menor energía. Las ondas de radio, que tienen frecuencias desde 550 a 1600 kHz, aproximadamente, para los ondas de AM y desde 88 a 108 MHz para las ondas de FM, están producidas por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en las antenas de radio. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas.

Cuando los electrones desaceleran como consecuencia de un choque contra un blanco metálico se produce un espectro continuo de rayos X llamado radiación de frenado o ***bremsstrahlung*** (más conocido por esta palabra alemana). Acompañando al amplio espectro continuo del *bremsstrahlung* existe, además, un espectro discontinuo de líneas de rayos X producidas por las transiciones de los electrones más internos en los átomos del material usado como blanco.

Otro tipo de radiación es la radiación sincrotrón, que aparece en el movimiento orbital circular de las partículas cargadas (normalmente electrones o positrones) en los aceleradores nucleares llamados sincrotrones. Considerada originalmente por los científicos como una molestia fastidiosa, hoy en día estos rayos X producidos por la radiación sincrotrón se producen y se utilizan como una herramienta de diagnosis médica por la facilidad con que se manipulan los haces correspondientes mediante ópticas de reflexión y difracción. La radiación sincrotrón es emitida también por partículas cargadas atrapadas en campos magnéticos asociados con estrellas y galaxias. Actualmente, se cree que la mayor parte de las ondas de radio de baja frecuencia que llegan a la Tierra del espacio exterior se originan en forma de radiación sincrotrón.

El calor se irradia por las cargas moleculares excitadas térmicamente. El espectro de la radiación térmica es el espectro de la radiación del cuerpo negro tratado en la sección 20.4.

Las ondas luminosas, con frecuencias del orden de 10^{14} Hz, se producen generalmente por transiciones de cargas ligadas a los átomos. En el capítulo 31, estudiaremos las fuentes de las ondas luminosas.

RADIACIÓN DIPOLAR ELÉCTRICA

La figura 30.7 es un dibujo esquemático de una antena dipolar eléctrica, que consta de dos varillas conductoras dobladas que se alimentan mediante un generador de corriente alterna. En el instante $t = 0$, indicado en la figura 30.7*a*, los extremos de las varillas se encuentran cargados y existe un campo eléctrico cerca de las varillas paralelo a ellas. También existe un campo magnético (no indicado) que rodea las varillas y que se debe a la corriente que circula por ellas. Las fluctuaciones de estos campos se mueven alejándose de las varillas con la velocidad de la luz. Al cabo de un cuarto de periodo, a $t = T/4$ (figura 30.7*b*), las varillas se encuentran descargadas y en sus proximidades el campo eléctrico es nulo. Para $t = T/2$ (figura 30.7*c*), las varillas se encuentran cargadas de nuevo, pero las cargas son opuestas a las que había en $t = 0$. Los campos eléctrico y magnético a grandes distancias de esta antena transmisora son muy diferentes de los que existen cerca de ella. Lejos de la antena, los campos eléctrico y magnético oscilan en fase con un movimiento armónico simple, perpendicular el uno del otro y a la dirección de propagación de la onda. La figura 30.8 muestra los campos eléctrico y magnético lejos de una antena dipolar eléctrica.

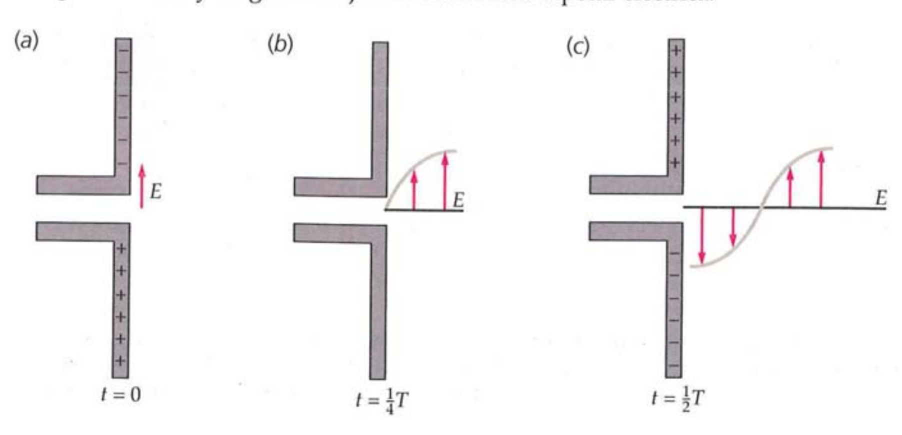


FIGURA 30.7 Antena dipolar eléctrica para irradiar ondas electromagnéticas. Se suministra corriente alterna a la antena mediante un generador (que no se muestra). Las fluctuaciones del campo eléctrico debido a las cargas en la antena se propagan hacia el exterior con la velocidad de la luz. También existe un campo magnético (no indicado) propagándose perpendicularmente al papel debido a la corriente que circula por la antena.

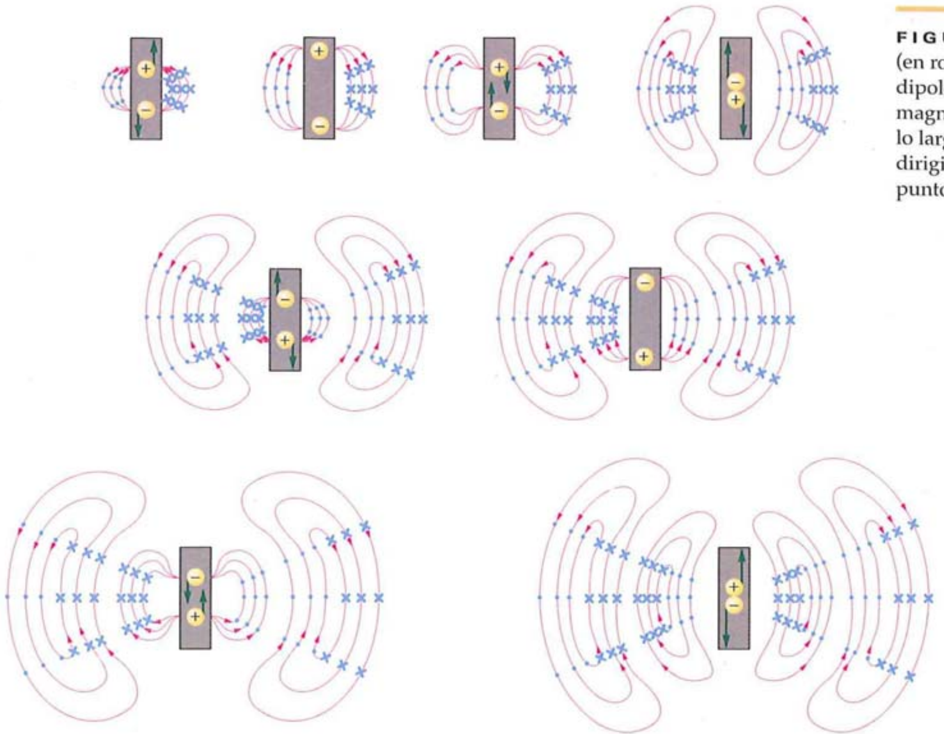


FIGURA 30.8 Líneas de los campos eléctrico (en rojo) y magnético (en azul) producidas por un dipolo eléctrico oscilante. Cada línea del campo magnético es un círculo con un dipolo orientado a lo largo de su eje. El producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ está dirigido hacia fuera del dipolo en todos los puntos.

Las ondas electromagnéticas de frecuencias correspondientes a la radio o a la televisión pueden detectarse mediante una antena dipolar receptora orientada de forma paralela al campo eléctrico, de modo que se induzca una corriente alterna en la antena (figura 30.9). También pueden detectarse con una antena en forma de lazo o espira orientada perpendicularmente al campo magnético, de forma que el flujo magnético variable que atraviese la espira induzca una corriente en la misma (figura 30.10). Las ondas electromagnéticas de frecuencias en el margen de luz visible pueden detectarse mediante el ojo o mediante película fotográfica, siendo ambos sistemas sensibles principalmente al campo eléctrico.

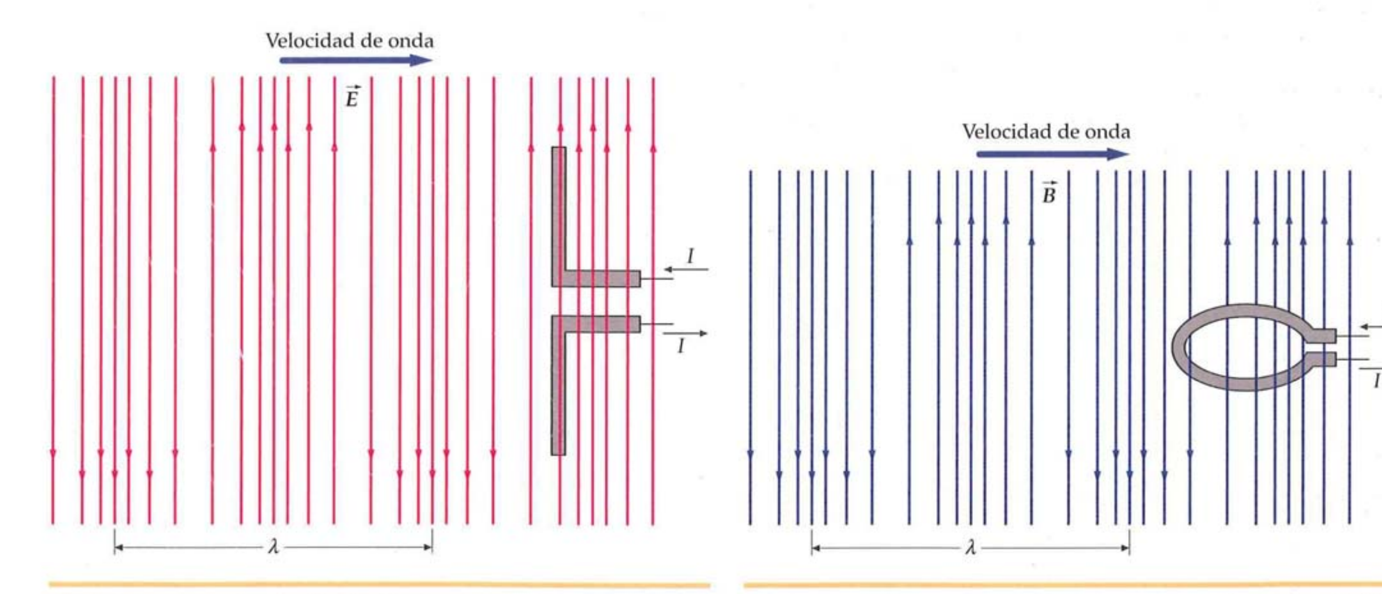


FIGURA 30.9 Antena dipolar eléctrica para la detección de la radiación electromagnética. El campo eléctrico alterno de la radiación produce una corriente alterna en la antena.

FIGURA 30.10 Antena en forma de espira para detectar la radiación electromagnética. El flujo magnético alterno que atraviesa la espira debido al campo magnético de la radiación, induce una corriente alterna en la misma.

La radiación procedente de una antena de dipolo como la de la figura 30.7 se denomina radiación dipolar eléctrica. Muchas ondas electromagnéticas presentan las características de la radiación dipolar eléctrica. Una característica importante de este tipo de radiación es que la intensidad de la onda electromagnética radiada por una antena dipolar es cero a lo largo del eje de la antena y máxima en la dirección perpendicular al eje de la misma. Si el dipolo está en la dirección y con su centro en el origen, como se muestra en la figura 30.11, la intensidad es nula a lo largo del eje y y máxima en el plano xz. En la dirección de una línea que forme un ángulo θ con el eje y, la intensidad es proporcional a $\operatorname{sen}^2 \theta$.

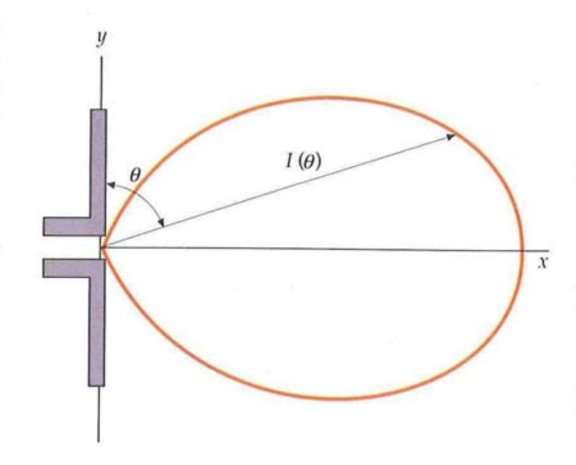


FIGURA 30.11 Representación polar de la intensidad de una radiación electromagnética producida por una antena dipolar eléctrica en función del ángulo. La intensidad $I(\theta)$ es proporcional a la longitud de la flecha. La intensidad es máxima perpendicularmente a la antena a $\theta = 90°$ y mínima a lo largo de la misma a $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$.

Ejemplo 30.5 Fem inducida en una antena en forma de espira

Para detectar ondas electromagnéticas en las que $E_{ef} = 0{,}15$ V/m, se utiliza una antena constituida por una sola espira de alambre conductor de 10 cm de radio. Hallar la fem eficaz inducida en la espira si la frecuencia de la onda es (*a*) 600 kHz y (*b*) 600 MHz.

PLANTEAMIENTO La fem inducida en la espira está relacionada según la ley de Faraday (ecuación 30.5) con la variación del flujo magnético por unidad de tiempo a través de la misma. Usando la ecuación 30.18, podemos obtener el valor eficaz del campo magnético a partir del valor eficaz del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La ley de Faraday relaciona el módulo de la fem con la variación del flujo magnético por unidad de tiempo a través de una superficie plana estacionaria (en reposo) limitada por la espira:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

2. La longitud de onda de una onda de 600 KHz que viaja a velocidad c es $\lambda = c/f = 500$ m. En la superficie limitada por la espira de radio 10 cm, el campo $\vec{B}$ puede considerarse prácticamente uniforme.

$$\phi_m = BA = \pi r^2 B \quad \text{por lo tanto,} \quad \mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{rms} = \pi r^2 \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{rms}$$

3. Calcular $\partial B_{ef}/\partial t$ a partir de un campo B sinusoidal:

$$B = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

4. Calculamos el valor eficaz de $\partial B/\partial t$. El valor eficaz de cualquier función sinusoidal con respecto al tiempo es $1/\sqrt{2}$, y el valor máximo dividido por $\sqrt{2}$ es igual al valor eficaz:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{rms} = \omega B_0[-\cos(kx - \omega t)]_{rms} = \omega B_0 \frac{1}{\sqrt{2}} = \omega B_{rms}$$

5. Usando la ecuación 30.18 ($E = cB$), relacionamos el valor de $\partial B/\partial t$ con E_{ef}:

$$E = cB$$

por lo tanto,

$$B_{rms} = \frac{E_{rms}}{c}$$

6. Sustituyendo en el paso 3, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{rms} = \omega B_{rms} = \omega \frac{E_{rms}}{c} = \frac{2\pi f}{c} E_{rms}$$

7. Sustituyendo el resultado del paso 6 en el resultado del paso 2, calculamos $\mathcal{E}_{ef}$ a frecuencia $f = 600$ kHz:

$$\mathcal{E}_{rms} = \pi r^2 \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{rms} = \pi r^2 \frac{2\pi f}{c} E_{rms}$$

$$= \pi(0{,}100 \text{ m})^2 \frac{2\pi(6{,}00 \times 10^5 \text{ Hz})}{3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}}(0{,}150 \text{ V/m})$$

$$= \boxed{5{,}92 \times 10^{-5} \text{ V} = 59{,}2\ \mu\text{V}}$$

(*b*) La fem inducida es proporcional a la frecuencia (paso 4), de tal forma que a 60 MHz será 100 veces mayor que a 600 kHz:

$$\mathcal{E}_{\text{rms}} = (100)(5{,}92 \times 10^{-5}\text{ V}) = 0{,}00592\text{ V}$$

$$= \boxed{5{,}92\text{ mV}}$$

COMPROBACIÓN El paso 7 de la parte (a) del problema demuestra que $\mathcal{E}_{\text{rms}}$ crece con la frecuencia, con E_{rms} y con el área, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN Para el apartado (*b*) la frecuencia es de 60 MHz, de forma que $\lambda = c/f = 5$ m. $\vec{B}$ no es tan claramente uniforme sobre la superficie encerrada por la espira de 10 cm de radio cuando $\lambda = 5$ m que cuando $\lambda = 500$ m, como era el caso del apartado (*a*). No obstante, $\vec{B}$ en la superficie cuando $\lambda = 5$ m es lo suficientemente constante como para que el resultado del apartado (*b*) sea bastante preciso para la mayoría de los casos.

ENERGÍA Y MOMENTO DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Como todo tipo de onda, las ondas electromagnéticas transportan energía y momento. La energía transportada viene descrita por la intensidad, es decir, por la potencia media por unidad de área incidente sobre una superficie perpendicular a la dirección de propagación. El momento por unidad de tiempo y por unidad de área transportada por una onda electromagnética se denomina **presión de radiación**.

Intensidad Considérese una onda electromagnética propagándose hacia la derecha y una región del espacio de forma cilíndrica de longitud L, sección transversal A y con el eje dirigido de izquierda a derecha. La energía electromagnética media U_{m} dentro de esta región es igual a $u_{\text{m}}\mathcal{V}$, donde u_{m} es la densidad de energía media y $\mathcal{V} = LA$ es el volumen de esta región del espacio. En el tiempo en el que la onda recorre la longitud L, toda esta energía pasa a través de la base derecha de la superficie cilíndrica. El tiempo Δt para que la onda recorra la distancia L es L/c, de forma que la potencia P_{m} (energía por unidad de tiempo) que pasa por la base derecha de la región cilíndrica es

$$P_{\text{m}} = U_{\text{m}}/\Delta t = u_{\text{m}}LA/(L/c) = u_{\text{m}}Ac$$

y la intensidad I (potencia media por unidad de área) es

$$I = P_{\text{m}}/A = u_{\text{m}}c$$

La densidad de energía total de la onda u es la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética. La densidad de energía eléctrica u_{e} (ecuación 24.13) y la correspondiente magnética u_{mag} (ecuación 28.22) vienen dadas por

$$u_{\text{e}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{y} \qquad u_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En una onda electromagnética en el vacío, E es igual a cB, de modo que podemos expresar la densidad de energía magnética en función del campo eléctrico:

$$u_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

en donde hemos utilizado $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$. Por lo tanto, las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales. Considerando que $E = cB$, podemos expresar la densidad de energía total de diversas formas útiles:

$$u = u_{\text{e}} + u_{\text{mag}} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} \qquad 30.19$$

DENSIDAD DE ENERGÍA DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Para calcular la densidad de energía media, reemplazamos los campos instantáneos, E y B, por sus valores eficaces $E_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_0$ y $B_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}}B_0$, donde E_0 y B_0 son los valores máximos de los campos. La intensidad es, por lo tanto,

$$I = u_{\text{m}}c = \frac{E_{\text{rms}}B_{\text{rms}}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E_0B_0}{\mu_0} = |\vec{S}|_{\text{m}} \qquad 30.20$$

INTENSIDAD DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

donde el vector

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \qquad 30.21$$

DEFINICIÓN: VECTOR DE POYNTING

se denomina **vector de Poynting**, en honor a su descubridor, John Poynting. El módulo medio de $\vec{S}$ es la intensidad de la onda y la dirección de $\vec{S}$ es la dirección de propagación de la onda.

Presión de radiación A continuación, mostraremos mediante un ejemplo sencillo que una onda electromagnética transporta momento. Consideremos una onda que se mueve a lo largo del eje x e incide sobre una carga en reposo como indica la figura 30.12. Por sencillez supondremos que $\vec{E}$ se encuentra en la dirección y y $\vec{B}$ en la dirección z y despreciaremos la dependencia con el tiempo de los campos. La partícula experimenta una fuerza $q\vec{E}$ en la dirección y y, por lo tanto, es acelerada por el campo eléctrico. En cualquier instante t, la velocidad en la dirección y es:

$$v_y = a_y t = \frac{qE}{m}t$$

Al cabo de un corto tiempo t_1, la carga ha adquirido una energía cinética igual a

$$K = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}\frac{mq^2E^2t_1^2}{m^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}t_1^2 \qquad 30.22$$

Al moverse en la dirección y, la carga experimenta una fuerza magnética

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qv_y\,\hat{j} \times B\,\hat{k} = qv_yB\,\hat{i} = \frac{q^2EB}{m}t\,\hat{i}$$

Obsérvese que esta fuerza se encuentra en la dirección de propagación de la onda. A partir de $dp_x = F_x\,dt$, podemos determinar el momento p_x transferido por la onda a la partícula en el tiempo t_1:

$$p_x = \int_0^{t_1} F_x\,dt = \int_0^{t_1} \frac{q^2EB}{m}t\,dt = \frac{1}{2}\frac{q^2EB}{m}t_1^2$$

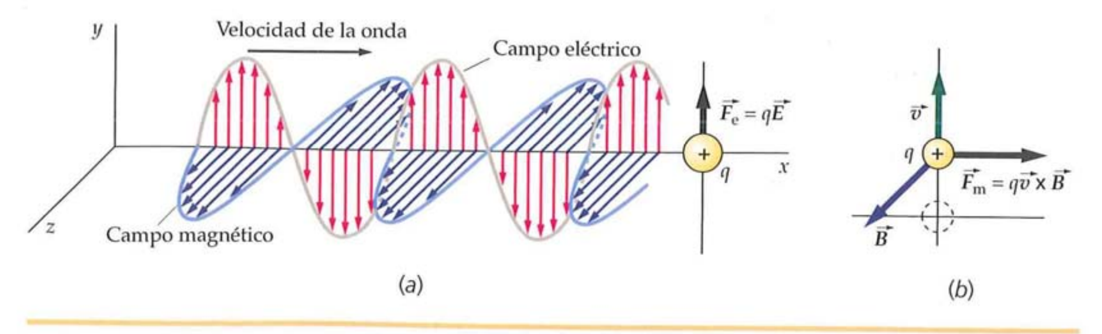


FIGURA 30.12 Onda electromagnética incidente sobre una carga puntual que está inicialmente en reposo sobre el eje x. (*a*) La fuerza eléctrica $q\vec{E}$ acelera la carga en dirección hacia arriba. (*b*) Cuando la carga ha adquirido una velocidad $\vec{v}$ hacia arriba, la fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ acelera la carga en la dirección de la onda.

Teniendo en cuenta que $B = E/c$, resulta:

$$p_x = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}t_1^2\right) \quad 30.23$$

Comparando las ecuaciones 30.22 y 30.23, vemos que el momento adquirido por la carga en la dirección de la onda es $1/c$ multiplicado por la energía. Aunque nuestro sencillo cálculo no ha sido riguroso, los resultados son correctos. El módulo del momento transportado por una onda electromagnética es $1/c$ multiplicado por la energía que transporta la onda:

$$p = \frac{U}{c} \quad 30.24$$

MOMENTO Y ENERGÍA DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Como la intensidad de una onda es la energía por unidad de tiempo y unidad de área, la intensidad dividida por c es el momento transportado por la onda por unidad de tiempo y unidad de área. El momento transportado por unidad de tiempo es una fuerza. La intensidad de onda dividida por c es, pues, una fuerza por unidad de área, que resulta ser una presión. Esta presión se denomina **presión de radiación** Pr:

$$P_r = \frac{I}{c} \quad 30.25$$

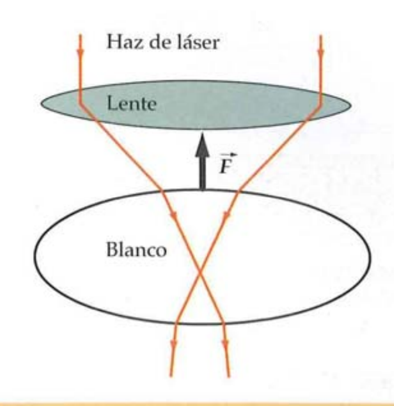
PRESIÓN DE RADIACIÓN E INTENSIDAD

Podemos relacionar la presión de radiación con los campos eléctrico y magnético mediante el empleo de la ecuación 30.20 para relacionar I con E y B, y la ecuación 30.18 para eliminar E o B:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{E_0B_0}{2\mu_0 c} = \frac{E_{rms}B_{rms}}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad 30.26$$

PRESIÓN DE RADIACIÓN EN FUNCIÓN DE E Y B.

Consideremos una onda electromagnética que incide normalmente sobre una superficie. Si la superficie absorbe una energía U de la onda electromagnética, también absorbe el momento p dado por la ecuación 30.13, y la presión ejercida sobre la misma es igual a la presión de radiación. Si la onda se refleja, el momento transferido sobre la superficie es $2p$, porque la onda transporta ahora momento en sentido opuesto. La presión ejercida sobre la superficie por la onda es entonces el doble de la presión de radiación.



"Las pinzas de láser" utilizan el momento transportado por las ondas electromagnéticas para manipular blancos a escala molecular. Los dos rayos láser indicados se refractan cuando pasan a través de un blanco transparente, tal como una célula biológica, o incluso a escala menor, sobre una pequeña cuenta transparente asociada a una gran molécula dentro de una célula. En cada refracción, los rayos se doblan hacia abajo, lo cual incrementa la componente en este sentido del momento de los rayos. El blanco ejerce así una fuerza hacia abajo sobre los haces de láser y estos ejercen una fuerza hacia arriba sobre el blanco, con lo cual éste es impulsado hacia la fuente de láser. La fuerza es generalmente del orden de piconewtons. Las pinzas de láser se han utilizado para realizar efectos tan sorprendentes como el estiramiento de un arrollamiento de ADN.

Ejemplo 30.6 Presión de radiación a 3 metros de una bombilla

Una bombilla eléctrica emite ondas electromagnéticas esféricas uniformemente en todas direcciones. Calcular (*a*) la intensidad, (*b*) la presión de radiación y (*c*) los módulos de los campos eléctrico y magnético a una distancia de 3 m de la bombilla, suponiendo que se emiten 50 W de radiación electromagnética.

PLANTEAMIENTO A una distancia r de la bombilla, la energía se distribuye uniformemente a lo largo de un área de $4\pi r^2$. La intensidad es la potencia dividida por el área. La presión de radiación se determina a partir de la expresión $P_r = I/c$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dividir la potencia de salida por el área para obtener la intensidad:

$$I = \frac{50\ \text{W}}{4\pi r^2}$$

2. Sustituir $r = 3$ m:

$$I = \frac{50\ \text{W}}{4\pi(3{,}0\ \text{m})^2} = \boxed{0{,}44\ \text{W/m}^2}$$

(*b*) La presión de radiación es la intensidad dividida por la velocidad de la luz:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{0{,}44\ \mathrm{W/m^2}}{3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}} = \boxed{1{,}5 \times 10^{-9}\ \mathrm{Pa}}$$

(*c*) 1. B_0 está relacionado con P_r por la ecuación 30.26:

$$B_0 = \sqrt{2\mu_0 P_r} = [2(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(1{,}5 \times 10^{-9}\ \mathrm{Pa})]^{1/2} = 6{,}1 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}$$

2. El valor máximo del campo eléctrico B_0 es igual al producto de c por B_0:

$$E_0 = cB_0 = (3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})(6{,}1 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}) = 18\ \mathrm{V/m}$$

3. Los campos eléctrico y magnético en el punto considerado son de la forma:

$$\boxed{E = E_0 \operatorname{sen}\omega t \quad \text{y} \quad B = B_0 \operatorname{sen}\omega t \quad \text{con } E_0 = 18\ \mathrm{V/m} \quad \text{y } B_0 = 6{,}1 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}}$$

COMPROBACIÓN El resultado de la parte (*b*) es una presión muy baja. (Es 14 órdenes de magnitud menor que la presión atmosférica.) No se puede percibir ninguna presión por la luz de una bombilla por ser una presión muy baja, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN Sólo el 2% de la potencia consumida por el filamento de la bombilla se transforma en luz visible.

Ejemplo 30.7 Un láser en un vehículo espacial — *Póngalo en su contexto*

Un astronauta, portador de un aparato de rayos láser de 1 kW, se ha separado 20 m de su vehículo espacial. Si su masa total, incluido el aparato láser y el traje espacial, es de 95 kg, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar el vehículo si apunta con el láser en la dirección contraria?

PLANTEAMIENTO El láser emite luz que transporta momento. Por el principio de conservación de esta magnitud, el astronauta recibe un momento igual y opuesto hacia la nave espacial. El momento transportado por la luz es $p = U/c$, donde U es la energía de la luz. Si la potencia del láser es $P = dU/dt$, la variación de momento producido por el láser es $dp/dt = (dU/dt)/c = P/c$. Esta es la fuerza constante ejercida sobre el astronauta.

SOLUCIÓN

1. El tiempo empleado está relacionado con la distancia y la aceleración. Suponemos que el astronauta está inicialmente en reposo respecto a la nave:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

2. La aceleración es la fuerza dividida por la masa, y la fuerza es la potencia dividida por c:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P/c}{m} = \frac{P}{mc}$$

3. Utilizar $x = \frac{1}{2}at^2$ para calcular el tiempo t:

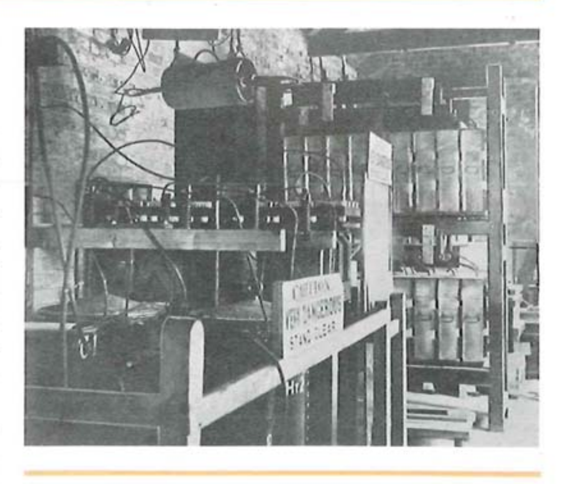
$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2xmc}{P}} = \sqrt{\frac{2(20\ \mathrm{m})(95\ \mathrm{kg})(3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})}{1000\ \mathrm{W}}} = 3{,}38 \times 10^4\ \mathrm{s} = \boxed{9{,}4\ \mathrm{h}}$$

COMPROBACIÓN Era previsible que el resultado del tiempo que pide el enunciado del problema fuera grande, dado que ya se sabía por el problema anterior que la presión producida por la radiación es pequeña. El paso 3 de este problema da un resultado acorde con lo que cabía esperar.

OBSERVACIÓN Obsérvese que la aceleración obtenida aquí es extraordinariamente pequeña —del orden de 10^{-9} g. En el instante de llegar al vehículo espacial, la velocidad del astronauta sería $v = at = 1{,}2$ mm/s, lo cual es prácticamente imperceptible.

PROBLEMA PRÁCTICO 30.3 ¿Cuánto tardaría el astronauta en alcanzar la nave espacial si lanzara en dirección opuesta el cordón de uno de sus zapatos con todas sus fuerzas? (Para contestar esta pregunta, asúmase una masa del cordón de un zapato que sea razonable, así como la velocidad máxima a la que una persona puede lanzar un cordón de zapato.) Compare este resultado con el del paso 3.

Comunicación inalámbrica: Espacio electromagnético compartido



El transmisor de Marconi. Este transmisor se usó en 1901 durante la primera emisión de radio transatlántica. *(Cornwall, UK, to Newfoundland, USA.)*

Un día de marzo de 1998,[1] los monitores cardiológicos con control remoto del Centro Médico de la Universidad Baylor y del Hospital Metodista de la ciudad de Dallas sufrieron una parada súbita cuando la emisora de televisión WFFA de esta ciudad realizaba pruebas en un nuevo sistema de emisión de una frecuencia autorizada. Los monitores usados en cardiología, que eran aparatos de baja potencia que se habían utilizado durante mucho tiempo con frecuencias sin licencia, quedaron colapsados por las pruebas realizadas por aquella emisora. Aunque ningún paciente sufrió daños, la emisora cesó de hacer las citadas pruebas con su nuevo sistema hasta que los monitores cardiológicos reemplazaron sus mecanismos por otros que funcionaban con diferentes frecuencias.[2] En 2000, el Servicio Médico de Telemetría Inalámbrica hizo una concesión de un rango de frecuencias para los monitores usados en Medicina.[3]

Cuando Guglielmo Marconi transmitió señales con su telegrafía (con hilos) utilizó un transmisor de arco voltaico.[4] La chispa, que era debida a cargas aceleradas, generaba radiación electromagnética en el rango de frecuencias desde unos pocos kilohertzs hasta 2 gigahertzs. Cuando había más de un transmisor, tenían que respetar determinados turnos a la hora de transmitir, de tal forma que cualquier radiooperador imprudente que transmitiera fuera de su turno, podía inutilizar las comunicaciones en una extensa área.[5]

La Unión Telegráfica Internacional empezó a estudiar la problemática de la radiotelegrafía en 1903. La primera convención sobre radiotelegrafía asignó en Berlín la frecuencia de 500 kHz al servicio de emergencia marítima.[6] Los barcos empezaron a usar potencias inferiores a 1 kW, a no ser que estuvieran a más de 300 km de la estación terrestre más próxima.[7] Estas comunicaciones eran de banda ancha, aunque su máximo de potencia estaba en los 500 kHz. El primer radiotransmisor alternativo al de arco-voltaico fue el inventado por Edwin Amstrong en 1912[8] que utilizaba un circuito que generaba ondas de forma continua.[9] En ese mismo año, la Convención Internacional de Radiotelegrafía publicó la primera tabla de asignación de frecuencias, pero los transmisores de arco-voltaico eran todavía abundantes y podían perjudicar a las comunicaciones locales y regionales.[10]

Las transmisiones por radio vinieron a concentrarse en frecuencias de banda estrecha. En 1927, organismos nacionales empezaron a coordinar la utilización del espectro electromagnético. En 1934, el organismo internacional regulador de dicho espectro pasó a denominarse Unión Internacional de Telecomunicaciones.[11] La Comisión Federal de Comunicaciones regula y distribuye los intervalos de frecuencias en Estados Unidos.[12] Desde entonces la ITU y la FCC (ambas siglas en inglés) cooperan con instituciones internacionales en la asignación y acomodación de frecuencias para diferentes usos y usuarios de todo el mundo.

Según van creciendo los servicios, se hace preciso una acomodación dinámica de frecuencias mediante cambios continuos en su asignación. Estos cambios no son necesariamente globales. Por ejemplo, en Estados Unidos las frecuencias para el servicio de telefonía móvil están entre los 850 y 1900 MHz. En otros países, este mismo servicio tiene reservado el intervalo entre 900 y 1800 MHz.[13]

No importa con qué potencia se emita, pero es obligado que los dispositivos con capacidad para producir interferencias tienen que acreditar que no van a producir perjuicios en otras emisiones o recepciones más allá de pequeñas áreas centradas en su ubicación.[14] Muchas aplicaciones comparten bandas de frecuencias y cada una de ellas disfrutan de las correspondientes licencias, con las que se les garantiza su uso. Por ejemplo, los hornos de microondas, las conexiones inalámbricas de los ordenadores y la telefonía inalámbrica operan todos ellos a frecuencias próximas a los 2,4 GHz.[15] Algunas aplicaciones de baja frecuencia pueden usarse sin licencia, ya que a veces es necesario trabajar en determinados rangos del espectro, tal como es el caso de las nuevas bandas usadas en telemetría aplicada a la Medicina. En algunas ocasiones, los arcos voltaicos generados por eventuales cortocircuitos producen interferencias sobre los receptores inalámbricos que funcionan con banda ancha. De hecho, estas y otras disfunciones de los equipos eléctricos se convierten en focos de transmisión de arco voltaico que producen efectos similares a los de los operadores sin licencia.

[1] "Wireless Medical Telemetry—Electromagnetic Interference." *United States Food and Drug Administration Center for Devices and Radiological Health*, Sept. 1, 2002. http://www.fda.gov/cdrh/emc/wmt-emi.html#1 As of Nov. 2006.

[2] McClain, J. P., "Time to Upgrade." *American Society for Healthcare Engineering*. www.ashe.org/ashe/wmts/pdfs/timetoupgrade.pdf As of Nov. 2006.

[3] Federal Communications Commission. *FCC-00211*. Washington, DC: United States Federal Communications Commission, Jun. 12, 2000. http://www.fcc.gov/Bureaus/Engineering_Technology/Orders/2000/fcc00211.doc As of Nov. 2006.

[4] Thomson, E., "The Field of Experimental Research." *Science*, Aug. 25, 1899, Vol. X, No. 243, pp. 236–245.

[°] Pitts, A., "Backgrounder: What Is Amateur Radio?" *American Radio Relay League*, Oct. 4, 2004. http://www.arrl.org/pio/bwhatis.html As of Nov. 2006.

[5] "ARRL Granted Experimental License for 500 kHz Research by Radio Amateurs." *American Radio Relay League*, Sep. 15, 2006. http://www.arrl.org/news/stories/2006/09/15/104/ As of Nov. 2006.

[6] "Service Regulations Affixed to the International Wireless Convention." *United States Early Radio History*. http://earlyradiohistory.us/1906conv.htm#SR As of Nov. 2006.

[**] Lewis, T., *Empire of the Air*. New York: HarperCollins, 1991, pp. 70–74.

[7] "History." *International Telecommunication Union*, Nov. 15, 2004. http://www.itu.int/aboutitu/overview/history.html As of Nov. 2006.

[8] Lapin, G. D., "Lessons Learned about Frequency Sharing in the Amateur Radio Service." *American Radio Relay League*. http://www.arrl.org/tis/info/HTML/plc/files/ Lessons%20Learned%20About%20Frequency%20Sharing%20in%20the%20Amateur%20Radio%20Service%20Rev%202.ppt As of Nov. 2006.

[9] *Radio Act of 1927*. United States Public Law 632. Feb. 23, 1927. Available at http://showcase.netins.net/web/akline/ pdf/1927act.pdf As of Nov. 2006.

[10] "History." *International Telecommunication Union*, Nov. 15, 2004. http://www.itu.int/aboutitu/overview/history.html As of Nov. 2006.

[11] "About the FCC." *United States Federal Communications Commission*, Sept. 26, 2006. http://www.fcc.gov/aboutus.html As of Nov. 2006.

[12] Luna, N. "Globetrotting with Cell Phones Tricky but Not Impossible." *The Orange County Register*, May 4, 2005.

[13] "Rule 47 CFR Part 15." *United States Federal Register*, Washington, DC: Aug. 14, 2006. http://www.fcc.gov/oet/info/rules/part15/part15-8-14-06.pdf As of Nov. 2006.

[14] Lowe, M., "Muting Microwaves." *Appliance Design*, Jan. 2006, Vol. 54, No. 1, pp. 74–75.

Resumen

1. Las ecuaciones de Maxwell resumen las leyes fundamentales de la Física que gobiernan la electricidad y el magnetismo.
2. Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, las ondas de la radio y televisión, los rayos X, los rayos gamma, las microondas, etcétera.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Corriente de desplazamiento de Maxwell	La ley de Ampère puede generalizarse para aplicarse a corrientes no estacionarias y discontinuas si se sustituye la corriente I por $I + I_d$, donde I_d se denomina corriente de desplazamiento de Maxwell: $$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$	30.3
Forma generalizada de la ley de Ampère	$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$	30.4
2. Ecuaciones de Maxwell	Las leyes de electricidad y magnetismo se resumen mediante las ecuaciones de Maxwell.	
Ley de Gauss	$$\oint_S E_n\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}}$$	30.6*a*
Ley de Gauss para el magnetismo (los polos magnéticos aislados no existen)	$$\oint_S B_n\, dA = 0$$	30.6*b*
Ley de Faraday (forma de la ley sin incluir movimiento)	$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S B_n\, dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dA$$	30.6*c*
Ley de Ampère modificada	$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t}\, dA$$	30.6*d*
3. Ecuaciones de onda	Las ecuaciones de Maxwell implican que los vectores de campo eléctrico y magnético en el vacío obedecen una ecuación de onda: $$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$	30.8*a*
	$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$	30.8*b*
4. Ondas electromagnéticas	En una onda electromagnética, los vectores de campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Sus módulos están relacionados por $$E = cB$$ El producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ tiene la dirección de propagación.	30.18
Velocidad de la onda	$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$	30.1
Espectro electromagnético	Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, las ondas de radio, los rayos X, los rayos gamma, las microondas y otras. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren únicamente en la longitud de onda y en la frecuencia. El ojo humano es sensible al intervalo de 400 a 700 nm, aproximadamente.	
Radiación del dipolo eléctrico	Se producen ondas electromagnéticas cuando se aceleran cargas eléctricas. Las cargas oscilantes en una antena de dipolo eléctrico radian ondas electromagnéticas con una intensidad que es máxima en direcciones perpendiculares a la antena y cero a lo largo de su eje. Perpendicularmente a la antena y muy lejos de ella, el campo eléctrico de la onda electromagnética es paralelo a la antena.	
Densidad de energía de una onda electromagnética	$$u = u_e + u_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c}$$	30.19

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Intensidad de una onda electromagnética	$I = u_m c = \frac{E_{rms}B_{rms}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \lvert\vec{S}\rvert_m$	30.20
Vector de Poynting	$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$	30.21
Momento de una onda electromagnética	$p = \frac{U}{c}$	30.24
Presión de radiación e intensidad	$P_r = \frac{I}{c}$	30.25

Respuestas a los problemas prácticos

30.2 $\vec{E} \cdot \vec{E} = E_0^2$ y $\vec{B} \cdot \vec{B} = B_0^2$

30.3 Alrededor de 5 h para un lanzamiento de 10 m/s de un cordón de zapato de 10 g. Con la propulsión de un rayo de luz tardará casi el doble que con la del cordón del zapato.

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso:
(*a*) Las corrientes de desplazamiento y de conducción tienen unidades diferentes.
(*b*) La corriente de desplazamiento sólo existe en una región del espacio en la que el campo eléctrico varíe con el tiempo.
(*c*) En un circuito oscilante *LC* no hay corriente de desplazamiento entre las placas cuando el condensador está totalmente cargado.
(*d*) En un circuito oscilante *LC* no existe corriente de desplazamiento entre las placas cuando el condensador está totalmente descargado. SSM

2 • Usar el sistema internacional de unidades (SI) para demostrar que $\epsilon_0\, d\phi_e/dt$ tiene unidades de corriente.

3 • Verdadero o falso:
(*a*) Las ecuaciones de Maxwell sólo pueden aplicarse a campos eléctricos y magnéticos estáticos.
(*b*) La ecuación de ondas para el campo electromagnético se puede deducir de las ecuaciones de Maxwell.
(*c*) Las ondas electromagnéticas son transversales.
(*d*) Los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética en el espacio libre están en fase. SSM

4 • Los físicos teóricos han especulado sobre la posible existencia de monopolos magnéticos y se han realizado, infructuosamente, diversas investigaciones experimentales sobre tales monopolos. Supongamos que se encuentran monopolos magnéticos y que el campo magnético a una distancia r de un monopolo de intensidad q_m viene dado por $B = (\mu_0/4\pi)q_m/r^2$. ¿Cómo deberían modificarse las ecuaciones de Maxwell para que fuesen compatibles con este descubrimiento?

5 • (*a*) Decir en cada uno de estos pares de ondas electromagnéticas, cuál es la de mayor frecuencia: (1) luz visible o rayos X, (2) el verde o el rojo, (3) el rojo o el infrarrojo. (*b*) Y cuál es de mayor longitud de onda: (1) el visible o las microondas, (2) el azul o el ultravioleta, (3) los rayos gamma o el ultravioleta.

6 • La detección de ondas de radio se puede llevar a cabo mediante una antena dipolar o mediante una antena circular. Decir si es verdadero o falso:
(*a*) La antena dipolar eléctrica funciona según la ley de Faraday.
(*b*) Si una onda de radio polarizada linealmente se aproxima a la cabeza de un observador de tal forma que su campo eléctrico oscila verticalmente, para detectarla mejor, la dirección perpendicular a la antena se deberá orientar de tal forma que apunte a la derecha o a la izquierda.
(*c*) Si una onda de radio polarizada linealmente se aproxima al observador de tal forma que el campo eléctrico oscila en un plano horizontal, para detectarla mejor mediante una antena dipolar, ésta deberá orientarse verticalmente.

7 • Un transmisor de ondas electromagnéticas utiliza una antena dipolar eléctrica orientada verticalmente. (*a*) Un receptor para captar estas ondas utiliza también una antena similar colocada a una milla de la antena transmisora y a la misma altitud. ¿Cómo deberá estar orientada la antena del receptor para que la recepción sea óptima? (*b*) Un receptor que utiliza una antena circular está situado a una milla del transmisor y a la misma altitud. ¿Cómo deberá ser orientada su antena para obtener una recepción óptima?

8 • Demostrar que la expresión $(\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$ del vector de Poynting $\vec{S}$ (ecuación 30.21) tiene unidades de watts por metro cuadrado (watts/m²) (intensidad de una onda electromagnética en el sistema de unidades SI).

9 • Si un rayo de luz roja, otro de verde y otro de violeta con la misma intensidad se propagan en el vacío ¿cuál de ellos posee mayor impulso electromagnético? (*a*) el de luz roja, (*b*) el de verde, (*c*) el de violeta, (*d*) todos igual, (*e*) con los datos aportados no se puede saber cuál es el de mayor impulso electromagnético. SSM

10 • Si una onda plana de luz roja, otra de luz verde y otra de violeta se propagan en el vacío con la misma intensidad, ¿cuál de ellos posee mayor campo eléctrico? (*a*) el de luz roja, (*b*) el de verde, (*c*) el de violeta, (*d*) todos igual, (*e*) con los datos aportados no se puede saber cuál es el de mayor impulso electromagnético.

11 • Dos ondas planas electromagnéticas sinusoidales iguales pero con una relación 1/3 en sus máximos de campo eléctrico, es decir, que una, la onda A, es tres veces mayor que la otra, la onda B. ¿Cuál es la relación entre sus intensidades? (*a*) $I_A = \frac{1}{3}I_B$, (*b*) $I_A = \frac{1}{9}I_B$, (*c*) $I_A = 3I_B$, (*d*) $I_A = 9I_B$, (*e*) no se puede determinar con los datos aportados.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

12 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En el nuevo campo del enfriamiento y confinamiento de átomos por láser, las fuerzas asociadas con la presión de radiación se usan para reducir la velocidad de los átomos que corresponden a temperatura ambiente, es decir, velocidades de centenares de metros por segundo, hasta frenarlos a unos pocos metros por segundo e incluso a velocidades menores. Un átomo aislado absorberá radiación solamente a frecuencias de resonancia específicas. Si la frecuencia de la radiación láser coincide con una de las resonantes del átomo que hace de blanco, la radiación es absorbida vía un proceso denominado absorción resonante. El área de sección eficaz del átomo para la absorción resonante es aproximadamente igual a λ_2, donde λ es la longitud de onda del haz de luz láser. (*a*) Hacer una estimación de la aceleración de un átomo de rubidio (átomo de masa 85 g/mol) en un haz de láser cuya longitud de onda es 780 nm y cuya intensidad es de 10 W/m². (*b*) Aproximadamente, ¿cuánto tiempo necesitaría un haz de luz de este láser para frenar un átomo de rubidio de un gas a temperatura ambiente (300 K) hasta dejarlo con velocidades próximas a cero?

13 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En 1950, en Estados Unidos, se lanzó con éxito al espacio uno de los primeros satélites, denominado *Mylar*, que era esencialmente un gran globo de material metalizado con aluminio capaz de reflejar señales electromagnéticas. Después de recorrer varias veces su órbita alrededor de la Tierra, los científicos observaron que la presión de radiación de la luz causaba la modificación de la órbita del satélite, efecto que no se tuvo en cuenta en los cálculos efectuados para su diseño. Estimar la relación entre la fuerza ejercida por la presión de radiación y la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra sobre el satélite. SSM

14 •• Algunos escritores de ciencia ficción han utilizado velas solares para propulsar naves interestelares. Imaginemos una vela gigante montada sobre una nave y sometida a la presión de la radiación solar. (*a*) Explicar por qué este mecanismo funciona mejor si la vela es capaz de reflejar la radiación, es decir, es especular, que si es altamente absorbente. (*b*) Demostrar que la aceleración de la nave viene dada por $P_S A/(4\pi r^2 c)$, donde P_s es la potencia emitida por el Sol ($3{,}8 \times 10^{26}$ W), A es el área de la superficie de la vela, m la masa total de la nave, r la distancia al Sol y c la velocidad de la luz. (Asumir que la superficie de la vela es mucho mayor que la de la nave y que, por lo tanto, la fuerza ejercida por la presión de radiación es debida exclusivamente a la fuerza que se ejerce sobre la vela.) (*c*) Comparar las aceleraciones relativas debidas a la presión de radiación y a la fuerza gravitatoria del Sol sobre la nave. Utilizar valores razonables para A y m. ¿Funcionará un sistema así?

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL

15 • Un condensador de placas paralelas horizontales tiene placas circulares de radio 2,3 cm separadas entre sí 1,1 mm y sin material entre ellas. En la placa superior está entrando corriente al mismo tiempo que sale de la placa inferior a un ritmo de 5 A. (*a*) Hallar la variación por unidad de tiempo del campo eléctrico entre las placas. (*b*) Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas y demostrar que es igual a 5 A. SSM

16 • En una región del espacio, el campo eléctrico varía de acuerdo con $E = (0{,}05 \text{ N/C}) \text{ sen } \omega t$, donde $\omega = 2000$ rad/s. Hallar la corriente máxima de desplazamiento a través de un área de 1 m² perpendicular a E.

17 •• En el caso del problema 15, demostrar que a una distancia r del eje de las placas el campo magnético entre ellas viene dado por $B = (1{,}90 \times 10^{-3} \text{ T/m})r$ si r es menor que el radio de las placas.

18 •• Los condensadores de este problema no contienen dieléctrico, es decir, tienen vacío entre las placas. (*a*) Demostrar que si un condensador tiene corriente de desplazamiento entre las placas, ésta viene dada por $I_d = C\,dV/dt$, donde C es la capacidad y V la diferencia de potencial entre aquéllas. (*b*) Sea un condensador de 5,00 pF conectado a un generador de corriente alterna de forma que la diferencia de potencial entre sus placas viene dada por $V = V_0 \cos \omega t$, donde $V_0 = 3{,}00$ V y $\omega = 500\,\pi$ rad/s. Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas en función del tiempo.

19 •• Por una resistencia, conectada en serie con un condensador de placas paralelas, pasa una corriente de 10 A. Las placas tienen un área de 0,50 m² y no hay dieléctrico entre ellas. (*a*) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento entre las placas? (*b*) ¿Cuál es la derivada temporal del campo eléctrico entre las placas? (*c*) Calcular el valor de la integral de línea $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$, donde C es una circunferencia de 10 cm de radio que está en un plano paralelo a las placas y que está incluida completamente en la región comprendida entre éstas. SSM

20 ••• En este problema se ha de demostrar que la forma generalizada de la ley Ampère (ecuación 30.4) y la ley de Biot y Savart dan el mismo resultado en los casos en que puedan utilizarse ambas. La figura 30.13 muestra dos cargas $+Q$ y $-Q$ sobre el eje x en $x = -a$ y $x = +a$ y con una corriente $I = -dQ/dt$ circulando a lo largo de la línea entre ambas. El punto P está sobre el eje y en $y = R$. (*a*) Utilizar la ley de Biot y Savart para demostrar que el módulo de B en el punto P es $B = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi R}\dfrac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$. (*b*) Consideremos un anillo circular de radio r y anchura dr en el plano yz con su centro en el origen. Demostrar que el flujo del campo eléctrico que atraviesa este anillo es $E_x\,dA = \dfrac{Q}{\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}\pi r\,dr$. (*c*) Utilizar el resultado de (*b*) para hallar el flujo total ϕ_e que atraviesa un área circular de radio R. Demostrar que $\phi_e = \dfrac{Q}{\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)$. (*d*) Hallar la corriente de desplazamiento I_d y demostrar que $I + I_d = I\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$. (*e*) Entonces demostrar que la ecuación 30.4 da el mismo resultado para B que el calculado en el apartado (*a*).

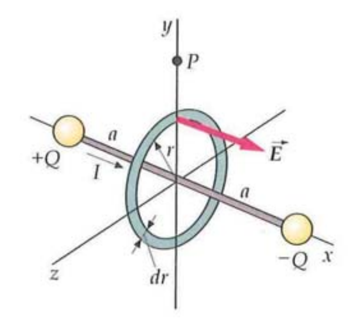


FIGURA 30.13 Problema 20

ECUACIONES DE MAXWELL Y ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

21 • El color que predomina en la luz del Sol es el de la zona del espectro centrada en el amarillo-verdoso. Estimar la longitud de onda y frecuencia de la luz dominante emitida por el Sol. *Indicación: véase la tabla 30.1.*

22 • (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de una microonda con una longitud de onda de 3, 00 cm? (*b*) Usar la tabla 30.1 para estimar la relación entre la longitud de onda más corta de la luz verde y la más corta de la roja.

23 • (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de unos rayos X con una longitud de onda de 0,100 nm? (*b*) El ojo humano es sensible a la luz de longitud de onda de 550 nm. ¿Cuál es la frecuencia (el color) de dicha luz? Comentar la respuesta obtenida comparando el resultado con el del problema 21.

RADIACIÓN DEL DIPOLO ELÉCTRICO

***Nota:* Todos los problemas de esta sección se basan en la información que se puede obtener de la figura 30.11, la cual se refiere a la intensidad radiada por un dipolo eléctrico cuyo momento dipolar es $\vec{p}$ siendo $\vec{r}$ la posición de observación del campo con respecto al centro del dipolo. El diagrama de radiación de este tipo de antena es independiente del ángulo acimutal, es decir, tiene simetría de rotación con respecto de la dirección del momento dipolar; por tanto, la forma del perfil de radiación no varía al rotarlo con respecto al eje de la antena.**

24 •• La intensidad de radiación de un dipolo eléctrico es proporcional a $(\text{sen}^2\,\theta)/r^2$, donde θ es el ángulo formado por el momento dipolar eléctrico y el vector de posición r. Un dipolo eléctrico radiante coincide con el eje z (su momento dipolar tiene la dirección y el sentido de z). Sea I_1 la intensidad de la radiación a una distancia $r = 10$ m y a un ángulo de 90°. Hallar la intensidad (en función de I_1) cuando (*a*) $r = 30$ m, $\theta = 90°$; (*b*) $r = 10$ m, $\theta = 45°$; (*c*) $r = 20$ m, $\theta = 30°$.

25 •• (*a*) Para el caso descrito en el problema 24, ¿con qué ángulo es igual a I_1 la intensidad cuando $r = 5$ m? (*b*) ¿A qué distancia es igual a I_1 la intensidad cuando $\theta = 45°$?

26 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Con objeto de construir una red de transmisión de telefonía sin hilos en una población montañosa, se dispone de una antena en forma de dipolo eléctrico que está localizada en la cima de una montaña de 2,00 km sobre el nivel del mar. Otra montaña cercana de otros 2,00 km de altura sobre el nivel del mar está a 4,00 km de distancia. ¿En qué lugar debe colocarse un observador que mida la intensidad de la señal para que reciba $4{,}00 \times 10^{-12}$ W/m²? ¿Cuánta intensidad se detectará en el pueblo que está a nivel del mar y se ubica a 1,50 km de la antena transmisora?

27 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una estación de radio que utiliza una antena dipolar vertical emite a una frecuencia de 1,20 MHz con una potencia total de salida de 500 kW. Calcular la intensidad de la señal a una distancia horizontal de 120 km de la estación. SSM

28 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Los sistemas y organismos de regulación y concesión de frecuencias exigen que las radios con licencia emitan con una potencia limitada para evitar interferencias. Suponga el lector que tiene a su cargo la responsabilidad de hacer cumplir esta norma. En una área de radio 30 km, una antena dipolar eléctrica en posición vertical emite una señal de 800 kHz con una intensidad de $2{,}00 \times 10^{-13}$ W/m². ¿Cuál es la potencia total radiada por la estación?

29 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un pequeño avión privado que se aproxima a un aeropuerto vuela a una altura de 2500 m sobre el suelo. El sistema de control de vuelos del aeropuerto transmite señales de 100 W a 24 MHz, utilizando una antena dipolar vertical. ¿Cuál es la intensidad de la señal en la antena receptora del avión cuando éste se encuentra a 4 km del aeropuerto? Asumir que el aeropuerto esta a nivel del mar.

ENERGÍA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

30 • Una onda electromagnética tiene una intensidad igual a 100 W/m². Calcular (*a*) las intensidades del (*a*) campo eléctrico eficaz y (*b*) campo magnético eficaz.

31 • El valor eficaz del campo eléctrico de una onda electromagnética es $E_{ef} = 400$ V/m. (*a*) Hallar B_{ef}, (*b*) la densidad de energía media, (*c*) la intensidad y (*d*) presión de radiación, P_r. SSM

32 • El valor eficaz del campo eléctrico de una onda electromagnética es de 400 V/m. Hallar (*a*) el valor eficaz del campo magnético de la onda, (*b*) su densidad de energía media y (*c*) su intensidad.

33 •• (*a*) Una onda electromagnética de 200 W/m² incide normalmente sobre una cartulina negra de 20 × 30 cm de lado que absorbe toda la radiación. Determinar la fuerza ejercida sobre la cartulina por la radiación. (*b*) Calcular la fuerza ejercida por la misma onda si la cartulina refleja la radiación que incide sobre ella.

34 •• Calcular la fuerza ejercida por la onda electromagnética sobre la cartulina reflectante del apartado (*b*) del problema 39 si la radiación incide con un ángulo de 30° respecto a la normal.

35 • (*a*) Dada una determinada distancia existente entre un punto de observación y un dipolo radiante, ¿qué ángulo deberá formar la dirección de propagación de la radiación emitida con respecto a la dirección de su momento dipolar para que la intensidad recibida sea la mitad del máximo? (*b*) ¿En qué ángulo la intensidad es el 1% del máximo? SSM

36 •• Un pulso de láser tiene una energía de 20,0 J y un radio de haz de 2,00 mm. La duración del pulso es de 10,0 ns y la densidad de energía es constante dentro del pulso. (*a*) ¿Cuál es la longitud espacial del pulso? (*b*) ¿Cuál es la densidad de energía dentro del mismo? (*c*) Hallar las amplitudes de los campos eléctrico y magnético del pulso de onda.

37 •• El campo eléctrico de una onda electromagnética oscila en la dirección y, y el vector de Poynting viene dado por $\vec{S}(x, t) = (100\ \text{W/m}^2)\cos^2(kx - \omega t)\,\hat{i}$, donde x está en metros y t en segundos. (*a*) ¿Cuál es la dirección de propagación de la onda? (*b*) Hallar la longitud de onda y la frecuencia. (*c*) Hallar los campos eléctrico y magnético. SSM

38 •• Un condensador de placas paralelas está en proceso de carga. El condensador consta de dos placas paralelas circulares de área A y separación d. (*a*) Demostrar que la corriente de desplazamiento en el espacio entre placas tiene el mismo valor que la corriente de conducción dirigida a las placas del condensador. (*b*) ¿Cuál es la dirección del vector de Poynting S en la región del espacio entre las placas del condensador? (*c*) Calcular el vector de Poynting en esta región y demostrar que el flujo de S en esta región es igual a la variación temporal de la energía almacenada en el condensador.

39 •• Un láser dispara un pulso de 1000 MW y 200 ns de duración sobre un objeto pequeño de 10,0 mg de masa suspendido mediante una fibra muy fina de 4,00 cm de longitud. Si la radiación se absorbe por completo sin otros efectos, ¿cuál es el máximo ángulo de desviación de este péndulo? (Suponer que el sistema es un péndulo balístico y asumir que el pequeño objeto se colgó verticalmente antes que la radiación le golpeara.) SSM

40 •• Los espejos usados en un tipo particular de láser son 99,99% reflectores. (*a*) Si el láser tiene una potencia media de salida de 15 W, ¿cuál es la potencia media de la radiación incidente en uno de los espejos? (*b*) ¿Cuál es la fuerza debida a la presión de radiación en uno de los espejos?

41 •• (*a*) Estimar la fuerza debida a la presión de radiación emitida por el Sol en la Tierra, y compararla con la fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre la Tierra, teniendo en cuenta que en la órbita de la Tierra la intensidad de radiación solar es 1,37 kW/m². (*b*) Repetir la parte (*a*) en el caso de Marte cuya distancia media al Sol es de $2{,}28 \times 10^8$ km y que tiene un radio de $3{,}40 \times 10^3$ km. (*c*) ¿En cuál de estos planetas la relación entre la fuerza debida a la presión de radiación y la gravitatoria es mayor? SSM

ECUACIÓN DE ONDA DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

42 • Demostrar por sustitución directa que la función de onda $E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) = E_0 \operatorname{sen} k(x - ct)$, donde $c = \omega/k$, satisface la ecuación 30.8*a*.

43 • Utilizar los valores conocidos de μ_0 y ϵ_0 en unidades del SI para calcular $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, y demostrar que es aproximadamente 3×10^8 m/s.

44 •• (*a*) Utilizando razonamientos semejantes a los que se dan en el texto, demostrar que en el caso de una onda plana, en la que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son independientes de y y z, $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$ y $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$. (*b*) Demostrar que E_z y B_y también satisfacen la ecuación de ondas.

45 •• Demostrar que toda función de la forma $y(x, t) = f(x - vt)$ o $y(x, t) = g(x + vt)$ satisface la ecuación de ondas 30.7. SSM

PROBLEMAS GENERALES

46 • Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por $\vec{B}(z, t) = (1{,}00 \times 10^{-8}\text{ T}) \cos(kz - \omega t)\hat{i}$. (*a*) Hallar la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda. (*b*) Hallar el vector de campo eléctrico $\vec{E}(z, t)$. (*c*) Determinar el vector de Poynting, y hallar la intensidad de esta onda.

47 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para detectar ondas electromagnéticas puede utilizarse una espira circular de hilo conductor. Supóngase que una estación de FM de 100 MHz emite una señal polarizada verticalmente de 4,0 μW/m² a 100 km de distancia ¿Cuál es la máxima tensión eficaz inducida en esta antena si tiene 10,0 cm de radio? SSM

48 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El campo eléctrico a una cierta distancia de un transmisor de radio viene dado por $(1{,}00 \times 10^{-4}\text{ N/C}) \cos[(1{,}00 \times 10^6\text{ rad/s})t]$. (*a*) ¿Qué tensión se recibe en un alambre de 50,0 cm orientado a lo largo de una dirección paralela a la del campo eléctrico? (*b*) ¿Qué tensión puede inducirse en una espira de 20,0 cm de radio y cuál tiene que ser la orientación de la espira?

49 ••• Un condensador circular consta de placas de radio a separadas una distancia d. Se aplica entre ellas una tensión $V_0 \operatorname{sen} \omega t$. (*a*) ¿Cuál es la corriente que circula por este condensador? (*b*) Dar el campo magnético en función de la distancia radial r medida desde la línea central que une las placas del condensador. (*c*) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y la tensión aplicada?

50 •• Un haz de radiación de 20 kW incide normalmente sobre una superficie que refleja la mitad de la radiación. ¿Qué fuerza actúa sobre esta superficie?

51 •• Dos ondas armónicas de frecuencias angulares ω_1 y ω_2 tienen campos eléctricos que vienen dados por las ecuaciones $\vec{E}_1 = E_{10}\cos(k_1x - \omega_1 t)\hat{j}$ y $\vec{E}_2 = E_{20}\cos(k_2x - \omega_2 t + \delta)\hat{j}$. Hallar (*a*) el vector de Poynting instantáneo para el movimiento ondulatorio resultante y (*b*) la media temporal del vector de Poynting. (*c*) Repetir las partes (*a*) y (*b*) considerando que se invierte el sentido de la propagación de la segunda onda, de modo que $\vec{E}_2 = E_{20}\cos(k_2x + \omega_2 t + \delta)\hat{j}$. SSM

52 •• Demostrar que $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}$ (ecuación 30.10) se deduce de $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0\int_S \frac{\partial E_n}{\partial t}dA$ (ecuación 30.6*d* con $I = 0$) integrando a lo largo de una curva C y sobre una superficie S, de forma similar a la deducción de la ecuación 30.9.

53 •• Un excursionista compró una radio para detectar señales débiles del orden de $1{,}00 \times 10^{-14}$ W/m². La antena de esta radio estaba constituida por una bobina de 2000 vueltas cuyo radio era de 1 cm y estaba enrollada en un núcleo de hierro con el que conseguía un campo multiplicado por 200 (es decir, su permeabilidad magnética relativa era 200). La frecuencia de emisión de la estación de radio es de 1400 kHz. (*a*) ¿Cuál es el pico de campo magnético de una onda electromagnética de aquella intensidad? (*b*) ¿Cuál es el pico de fuerza electromotriz que se induce en la antena? (*c*) ¿Cuál sería el pico de fuerza electromotriz inducida en un hilo recto de metal cuya longitud fuese 2,00 metros de largo y que estuviera orientado en la dirección paralela al del campo eléctrico?

54 •• La intensidad radiada por el Sol en la alta atmósfera es de 1,37 kW/m². (*a*) Determinar los valores eficaces de los campos eléctrico y magnético de esta radiación. (*b*) Hallar la potencia media radiada por el Sol. (*c*) Determinar la intensidad de la presión de radiación en la superficie del Sol.

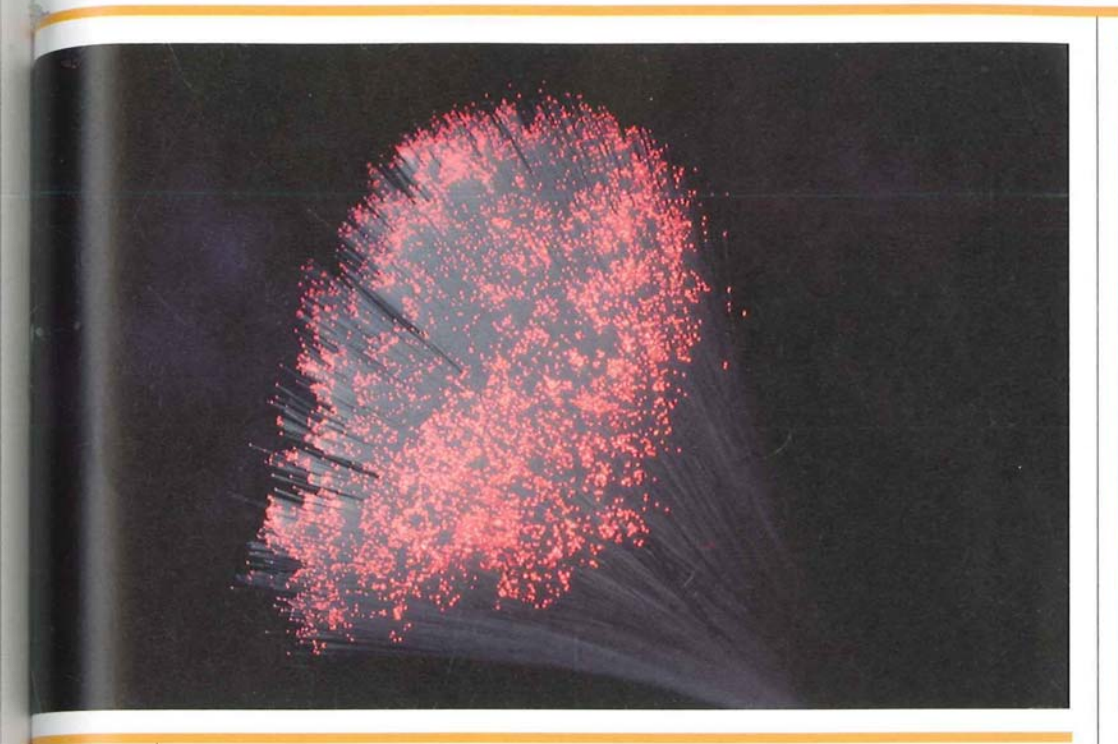
55 ••• Por un conductor cilíndrico largo de longitud L, radio a y resistividad ρ, circula una corriente estacionaria I que está distribuida uniformemente en toda su sección recta. (*a*) Utilizar la ley de Ohm para relacionar el campo eléctrico E en el conductor con I, ρ y a. (*b*) Hallar el campo magnético $\vec{B}$ en el exterior pero junto al conductor. (*c*) Utilizar los resultados de los apartados (*a*) y (*b*) para calcular el vector de Poynting $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$ en $r = a$ (superficie del conductor). ¿En qué dirección está $\vec{S}$? (*d*) Hallar el flujo $\oint S_n\,dA$ que atraviesa la superficie del conductor hacia su interior y demostrar que el flujo de energía por unidad de tiempo que entra en el conductor es igual a I^2R, siendo R su resistencia. SSM

56 ••• Un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud transporta una corriente que aumenta lentamente con el tiempo. El solenoide tiene un radio R y la corriente en el arrollamiento tiene la forma $I(t) = at$. (*a*) Hallar el campo eléctrico inducido a una distancia $r < R$ del eje del solenoide. (*b*) Determinar el módulo, la dirección y sentido del vector de Poynting $\vec{S}$ en la superficie cilíndrica $r = R$ justo en el interior del arrollamiento. (*c*) Calcular el flujo hacia dentro del solenoide y demostrar que es igual al crecimiento de la energía magnética por unidad de tiempo dentro del solenoide.

57 ••• Partículas suficientemente pequeñas pueden verse alejadas del sistema solar por la presión de radiación del Sol. Suponer que las partículas son esféricas con radio r y densidad de 1 g/cm³ y que absorben toda la radiación con un área eficaz de πr^2. Están a una distancia R del Sol, que tiene una potencia de emisión de $3{,}83 \times 10^{26}$ W. (*a*) ¿Cuál es el radio r para el cual la fuerza repulsiva de la radiación equilibra exactamente la fuerza gravitatoria de atracción del Sol? (*b*) ¿Puede el Sol repeler las partículas que tienen radios mayores que el valor crítico, o solamente lo hace con las que lo tienen menor? Explique su respuesta.

58 ••• Cuando una onda electromagnética se refleja con incidencia normal sobre una superficie perfectamente conductora, el vector campo eléctrico de la onda reflejada en la superficie reflectante es el mismo pero con signo contrario al del correspondiente a la onda incidente. (*a*) Explicar por qué debe ser así. (*b*) Demostrar que la superposición de las ondas incidente y reflejada da lugar a una onda estacionaria. (*c*) ¿Qué relación existe entre el vector campo magnético de las ondas incidente y reflejada en la superficie reflectante?

59 ••• Una fuente puntual intensa de luz radia 1 MW isotrópicamente. La fuente está localizada 1 m por encima de un plano infinito perfectamente reflector. Determinar la fuerza que actúa sobre el plano. SSM





LA LUZ SE TRANSMITE POR REFLEXIÓN TOTAL A TRAVÉS DE FINAS FIBRAS DE VIDRIO. *(© James L. Amos/Corbis.)*

Propiedades de la luz

? ¿Cuál deberá ser el ángulo de incidencia de la luz en las paredes del tubo para que no escape fuera de él? (Véase el ejemplo 31.4.)

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética cuyas longitudes de onda están comprendidas entre 400 y 700 nm. Las longitudes de onda más cortas del espectro visible corresponden a la luz violeta y las más largas a la luz roja. Los colores percibidos de la luz son el resultado de la respuesta fisiológica y psicológica del sistema sensitivo ojo-cerebro a las distintas frecuencias de la luz visible. Aunque la correspondencia entre color percibido y frecuencia es muy exacta, existen desviaciones interesantes. Por ejemplo, una mezcla de luz roja y luz verde es percibida por el sistema ojo-cerebro como amarillo, incluso en ausencia de luz en la región amarilla del espectro.

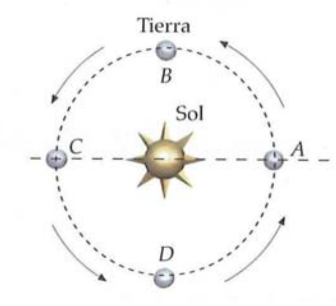
En este capítulo, estudiaremos cómo se produce la luz, cómo se mide su velocidad y cómo se dispersa, se refleja, se refracta y se polariza.

* Algunas personas pueden ver longitudes de onda tan cortas como 380 nm y tan largas como 780 nm.

31.1 LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Antes del siglo XVII se pensaba que la velocidad de la luz era infinita; Galileo llevó a cabo el primer intento para medir la velocidad de propagación de la luz. Se situó en la cima de una colina mientras que otro observador se colocaba en la cima de otra, distante aproximadamente 3 km, teniendo los dos una linterna y un obturador para ocultar la luz. Galileo propuso medir el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia de ida y vuelta entre los experimentadores. Uno de ellos debería descubrir su linterna y cuando el otro viese la luz debería descubrir la suya. El tiempo transcurrido entre el momento en que uno destapase su linterna y el momento en que éste viera la luz procedente del otro debería ser el tiempo que la luz tardaba en recorrer ida y vuelta el espacio entre los experimentadores. Aunque este método es correcto en principio, la velocidad de la luz es tan grande que el intervalo de tiempo a medir es mucho menor que las fluctuaciones de la respuesta humana y Galileo fue incapaz de obtener un valor razonable de la velocidad de la luz.

La primera aproximación del verdadero valor de la velocidad de la luz se obtuvo a partir de observaciones astronómicas basadas en la medida del periodo de Io, una de las lunas de Júpiter. Este periodo se determina midiendo el tiempo entre dos eclipses de Io (es decir, cuando la Luna Io desaparece detrás de Júpiter). El periodo del eclipse es aproximadamente 42,5 h, pero cuando las mediciones se efectúan en el momento en que la Tierra se está alejando de Júpiter, como ocurre en el trayecto *ABC* de la figura 31.11, se obtiene un valor para el periodo mayor que cuando las medidas se hacen en las posiciones en que la Tierra se está moviendo hacia Júpiter, a lo largo del trayecto *CDA* de la figura. Como estas mediciones difieren del valor medio, aproximadamente, en solo 15 s, estas discrepancias eran a su vez difíciles de medir con exactitud. En 1675, el astrónomo Ole Römer atribuyó estas discrepancias al hecho de que la velocidad de la luz no es infinita. Durante las 42,5 h que transcurren entre dos eclipses de la luna de Júpiter, varía la distancia entre la Tierra y Júpiter, haciendo que el trayecto que ha de seguir la luz sea más largo o más corto. Römer ideó el siguiente método para medir el efecto acumulativo de estas discrepancias. Como Júpiter se mueve mucho más lentamente que la Tierra, su movimiento puede despreciarse. Cuando la Tierra está en el punto *A*, el más cercano a Júpiter, la distancia entre ésta y Júpiter varía en un valor despreciable. El periodo del eclipse de Io se mide a partir de los comienzos de eclipses sucesivos. Basándose en esta medida, se calcula el número de eclipses que se producen en 6 meses y se predice el tiempo en que un eclipse comenzará a producirse medio año más tarde cuando la Tierra esté en *C*. Cuando la Tierra llega realmente a *C*, el comienzo observado del eclipse se produce 16,6 minutos más tarde de lo previsto. Este es precisamente el tiempo que la luz tarda en recorrer una distancia igual al diámetro de la órbita terrestre. Este cálculo no tiene en cuenta la distancia que recorre Júpiter hacia la Tierra. Sin embargo, como la velocidad orbital de Júpiter es mucho menor que la de la Tierra, la distancia que éste recorre hacia ella (o alejándose de ella) en 6 meses es mucho menor que el diámetro de la órbita de la Tierra.



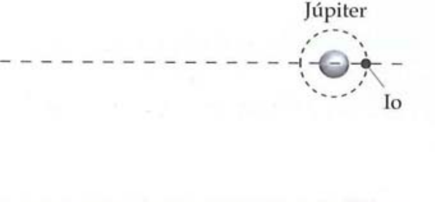


FIGURA 31.1 Método de Römer para medir la velocidad de la luz. El tiempo que transcurre entre dos eclipses sucesivos de la luna Io de Júpiter parece mayor cuando la Tierra se está moviendo según la trayectoria *ABC* que si sigue la trayectoria *CDA*. La diferencia se debe al tiempo que emplea la luz en recorrer la distancia en que se ha trasladado la Tierra a lo largo de la línea de visión directa durante un periodo de Io. (La distancia recorrida por Júpiter en un año terrestre es despreciable.)

PROBLEMA PRÁCTICO 31.1

Calcular (*a*) la distancia recorrida por la Tierra entre dos eclipses sucesivos de Io y (*b*) la velocidad de la luz, sabiendo que el tiempo entre dos eclipses sucesivos es 15 s mayor que la media cuando la Tierra se mueve alejándose de Júpiter.

La primera medición no astronómica de la velocidad de la luz la llevó a cabo el físico francés Fizeau en 1849. Sobre una colina cerca de París, Fizeau sitúo una fuente luminosa y un sistema de lentes dispuesto de tal forma que la luz reflejada en un espejo semitransparente se enfocaba sobre uno de los huecos existentes en

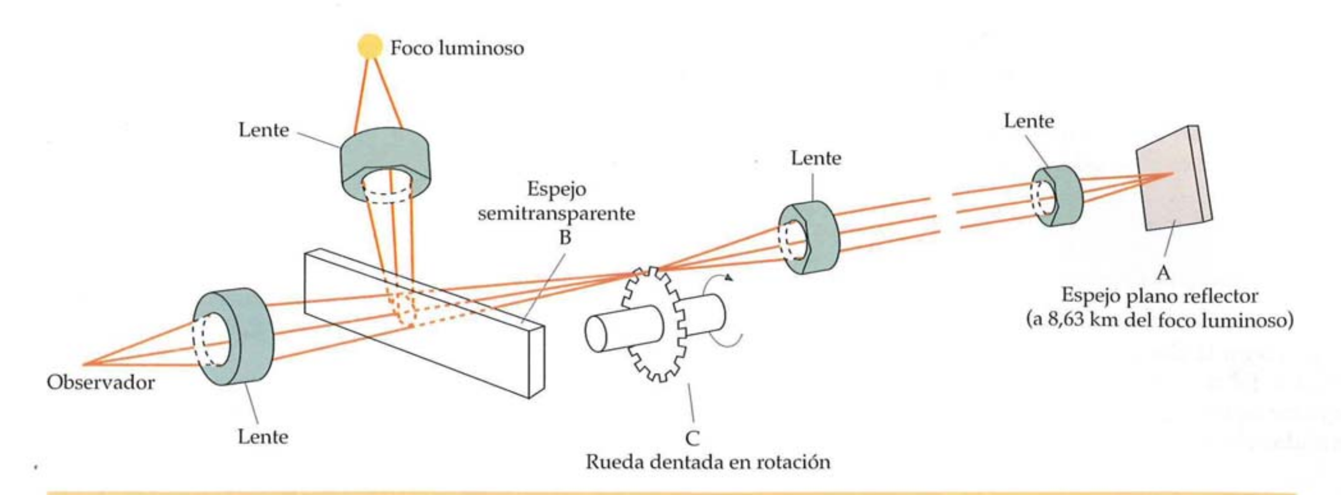


FIGURA 31.2 Método de Fizeau para medir la velocidad de la luz. La luz procedente de un foco se refleja en el espejo B y se transmite por el hueco que existe entre los dientes de la rueda dentada hasta el espejo A. La velocidad de la luz se determina midiendo la velocidad angular de la rueda que permite que la luz reflejada pase a través del siguiente hueco de la rueda dentada de modo que pueda observarse la imagen del foco.

una rueda dentada, como se ve en la figura 31.12. Sobre otra colina distante (aproximadamente a 8,63 km) situó un espejo que reflejase la luz hacia atrás, de forma que pudiera ser vista por un observador del modo que se indica en la figura. La rueda dentada podía girar, siendo variable su velocidad de rotación. A bajas velocidades de rotación, la luz no era visible porque la luz que pasaba a través de un hueco de la rueda dentada quedaba obstruida por el diente siguiente después de reflejada en el espejo. Entonces se aumentaba la velocidad de rotación hasta que la luz pasaba a través del hueco de la rueda. El tiempo necesario para que la rueda girase a través del ángulo comprendido entre dos huecos sucesivos era igual al tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia de la rueda al espejo y volver a la rueda.

El método de Fizeau fue mejorado por Foucault, quien reemplazó la rueda dentada por un espejo rotativo, como se indica en la figura 31.3. La luz incide sobre una cara del espejo y, después de reflejarse en un espejo fijo alejado, cae sobre otra cara, en donde se refleja entonces hacia un telescopio de observación. Durante el tiempo que tarda la luz en ir desde el espejo rotatorio al espejo fijo distante y volver, el espejo rotatorio gira un ángulo pequeño. Midiendo este ángulo θ, se determina el tiempo que tarda la luz en recorrer esta distancia de ida y vuelta. Alrededor de 1850, Foucault midió la velocidad de la luz en aire y en agua y demostró que es inferior en el caso del agua. Utilizando esencialmente el mismo método, el físico americano A. A. Michelson realizó mediciones más precisas de la velocidad de la luz en 1880. Medio siglo más tarde, Michelson realizó medidas de la velocidad de la luz más precisas todavía, utilizando un espejo octogonal giratorio (figura 31.4). En estas medidas, el espejo gira un octavo de vuelta durante el tiempo en que la luz viaja al espejo fijo y vuelve. La velocidad de rotación se varía hasta que la otra cara del espejo se pone en la posición correcta para que la luz reflejada pueda entrar en el telescopio.

FIGURA 31.3 Dibujo esquemático del método de Foucault para medir la velocidad de la luz.

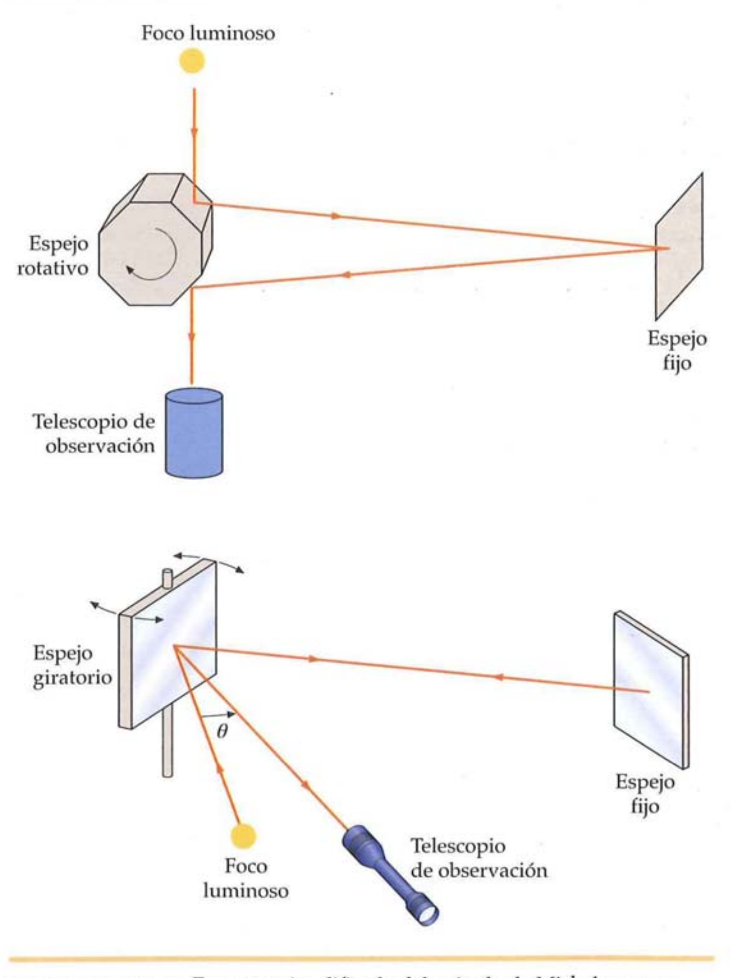


FIGURA 31.4 Esquema simplificado del método de Michelson para medir la velocidad de la luz en Mt. Wilson a finales de la década 1920-1930.

En otro método de determinación de la velocidad de la luz, se utiliza el valor de las constantes ϵ_0 y μ_0 para determinar c según la expresión $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Los diversos métodos que hemos considerado para la medida de la velocidad de la luz concuerdan todos satisfactoriamente. Se define, en la actualidad, que la velocidad de la luz es exactamente

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \qquad 31.1$$

DEFINICIÓN: VELOCIDAD DE LA LUZ

y, en consecuencia, se define el metro en función de esta velocidad y de la unidad de tiempo como la distancia que recorre la luz en 1/299729458 s en el vacío. El valor de 3×10^8 m/s para la velocidad de la luz es suficientemente exacto para la mayor parte de las aplicaciones. La velocidad de las ondas de radio y de todas las demás ondas electromagnéticas (en el vacío) es la misma que la velocidad de la luz.

Ejemplo 31.1 La velocidad de la luz

¿Cuál es la velocidad de la luz en unidades de pies por nanosegundos?

PLANTEAMIENTO Este es un ejercicio de conversiones de unidades. Aproximadamente, 1 pie = 30 cm = 0,3 m.

SOLUCIÓN

1. Convertir m/s a pie/ns $\quad c = 3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s} \times \left(\dfrac{1{,}0 \text{ pie}}{0{,}30 \text{ m}}\right) \times \left(\dfrac{1{,}0 \text{ s}}{10^9 \text{ ns}}\right) = \boxed{1{,}0 \text{ pie/ns}}$

Ejemplo 31.2 Determinación de *c* por el método de Fizeau

En el experimento de Fizeau, la rueda tenía 720 dientes y se observaba la luz cuando la rueda giraba a 22,3 revoluciones por segundo. Si la distancia entre la rueda y el espejo distante era de 8,63 km, ¿cuál fue el valor que se obtuvo para la velocidad de la luz?

PLANTEAMIENTO El tiempo que la luz tarda en ir de la rueda al espejo y volver es igual al tiempo durante el cual la rueda gira el ángulo comprendido entre dos dientes sucesivos, es decir, el tiempo necesario para que la rueda verifique una N-ésima de revolución ($N = 720$.)

SOLUCIÓN

1. La velocidad es la distancia dividida por el tiempo. La distancia de la rueda al espejo es L: $\quad c = \dfrac{2L}{\Delta t}$
2. El desplazamiento angular es igual a la velocidad angular por el tiempo: $\quad \Delta\theta = \omega\,\Delta t$
3. Despejando el tiempo, tenemos: $\quad \Delta t = \dfrac{\Delta\theta}{\omega}$
4. Sustituimos Δt y obtenemos c: $\quad c = \dfrac{2L\omega}{\Delta\theta} = \dfrac{2(8{,}63 \times 10^3 \text{ m})(22{,}3 \text{ rev/s})}{\dfrac{1}{720}\text{ rev}} = \boxed{2{,}77 \times 10^8 \text{ m/s}}$

COMPROBACIÓN Este resultado es casi el 7% menor que el correcto. Sin embargo, podemos considerar este error del 7% como una respuesta plausible y un resultado suficientemente válido.

PROBLEMA PRÁCTICO 31.2 Los viajeros espaciales que llegaron a la Luna utilizaban ondas electromagnéticas para comunicarse con el centro de control espacial en la Tierra. ¿Cuál era el retardo de tiempo con que sus señales alcanzaban la Tierra a una distancia de $3{,}84 \times 10^8$ m? Utilizar $c = 3 \times 10^8$ m/s.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 31.1

El resultado del paso cuarto del ejercicio 31.2 es 7% menor que el valor correcto. ¿Cuál o cuáles han podido ser las razones de esta discrepancia en la determinación de la velocidad de la luz con respecto al valor que hoy en día se conoce? Las posibles fuentes de error son: al contar el número de dientes del dispositivo, al medir la velocidad angular, al medir la distancia del espejo. Pero éstas no parecen ser las causas del error cometido. Existe una fuente de error más verosímil. ¿Cuál puede ser?

Las distancias grandes se dan frecuentemente en función de la distancia recorrida por la luz en un tiempo determinado. Por ejemplo, la distancia al Sol es 8,33 minutos-luz (8,33 min-l). Un año-luz es la distancia que la luz recorre en un año. Así, podemos encontrar facilmente un factor de conversión entre años-luz y metros. El número de segundos en un año es

$$1\text{ a} = 1\text{ a} \times \frac{365{,}24\text{ d}}{1\text{ a}} \times \frac{24\text{ h}}{1\text{ d}} \times \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = 3{,}156 \times 10^7\text{ s}$$

(*Nota:* aproximadamente, 1 año tiene $\pi \times 10^7$ segundos, lo cual puede ser una regla mnemotécnica para recordar la conversión.) El número de metros en un año-luz es, por lo tanto,

$$1\, c \cdot y = (2{,}998 \times 10^8\text{ m/s})(3{,}156 \times 10^7\text{ s}) = 9{,}46 \times 10^{15}\text{ m} \qquad 31.2$$

31.2 PROPAGACIÓN DE LA LUZ

La propagación de la luz viene gobernada por la ecuación de onda que estudiamos en el capítulo 30. Sin embargo, mucho antes de que Maxwell desarrollara su teoría de las ondas electromagnéticas, la propagación de la luz y otras ondas fue descrita empíricamente por dos principios interesantes y muy distintos atribuidos al físico holandés Christian Huygens (1629-1695) y al matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665).

PRINCIPIO DE HUYGENS

En la figura 31.5, puede verse una porción de un frente de onda esférico que procede de un foco puntual. El frente de onda es el lugar geométrico de los puntos con fase constante. Si en el instante t el radio del frente de onda es r, su radio en el instante $t + \Delta t$ es $r + c\Delta t$, siendo c la velocidad de la onda. Sin embargo, si una parte de la onda se ve bloqueada por un cierto obstáculo, o si la onda pasa a través de distintos medios, como en la figura 31.16, es mucho más difícil determinar la posición del nuevo frente de onda en el instante $t + \Delta t$. La propagación de una onda cualquiera a través del espacio puede describirse utilizando un método geométrico descubierto por Christian Huygens en 1678 y que ahora se conoce como principio de Huygens o construcción de Huygens:

> Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco (o fuente) de ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.
>
> PRINCIPIO DE HUYGENS

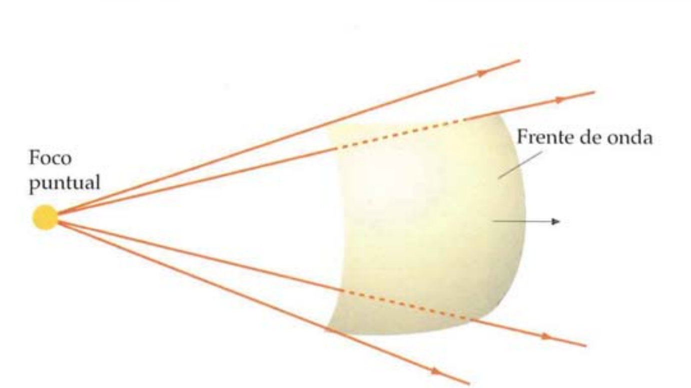


FIGURA 31.5 Frente de onda esférico procedente de un foco puntual.

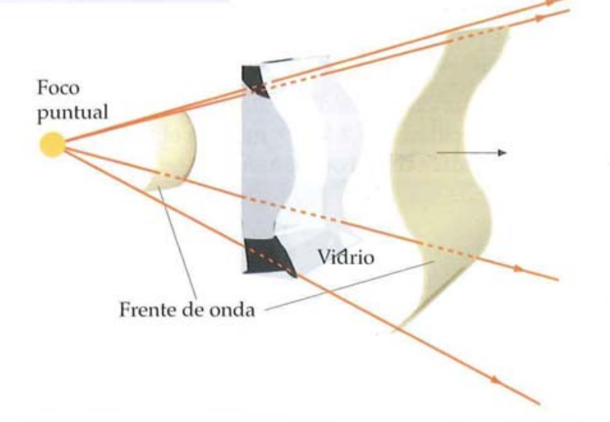


FIGURA 31.6 Frente de onda procedente de un foco puntual antes y después de atravesar una pieza de vidrio de grosor irregular.

La figura 31.7 muestra la aplicación del principio de Huygens a la propagación de una onda plana y de una onda esférica. Como es natural, si todos los puntos de un frente de onda fuesen realmente un foco puntual, habría también ondas moviéndose hacia atrás. Huygens no tuvo en cuenta estas ondas en retroceso.

El principio de Huygens fue posteriormente modificado por Augustin Fresnel, de modo que se calculaba el nuevo frente de onda a partir del frente de onda primitivo mediante la superposición de las ondas elementales considerando sus amplitudes y fases relativas. Posteriormente, Kirchhoff demostró que el principio de Huygens-Fresnel era una consecuencia de la ecuación de ondas (ecuación 30.8*a*), situándolo así sobre una base matemática firme. Kirchhoff demostró que la intensidad de las ondas elementales depende del ángulo y que es nula para 180º (en sentido hacia atrás).

En este capítulo (sección 31.5), utilizaremos el principio de Huygens para deducir las leyes de la reflexión y refracción. En el capítulo 33, aplicaremos el principio de Huygens con la modificación de Fresnel para calcular el esquema de difracción de una sola rendija. Como la longitud de onda de la luz es tan pequeña, con frecuencia utilizaremos la aproximación del rayo para describir su propagación.

FIGURA 31.7 Construcción de Huygens para la propagación hacia la derecha de (*a*) una onda plana y (*b*) una onda esférica o circular de partida.

PRINCIPIO DE FERMAT

La propagación de la luz puede también describirse por el principio de Fermat:

> La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto a otro es aquella para la cual el tiempo de recorrido es un mínimo. O lo que es mismo, la luz tiende a recorrer el camino óptico por el que tarda el mínimo tiempo.*
>
> PRINCIPIO DE FERMAT

El camino óptico, definido como el espacio en el que la luz emplea menos tiempo en su recorrido, no siempre coincide con el de menor distancia. Por ejemplo, suponga que una persona que ejerce de salvavidas en una piscina se encuentra en el extremo opuesto de otra que necesita asistencia de forma inmediata. La opción de atravesar la piscina nadando puede ser más corta en distancia, sin embargo, la acción de salvamento se podrá realizar en menos tiempo si el salvavidas recorre el semiperímetro de la piscina y se introduce en el agua donde está la persona necesitada de ayuda.

En la sección 31.5, utilizaremos el principio de Fermat para deducir las leyes de reflexión y refracción.

31.3 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

La velocidad de la luz en un medio transparente como el aire, el agua o el vidrio es menor que la velocidad $c = 3 \times 10^8$ m/s en el vacío.† Un medio transparente se caracteriza por su **índice de refracción**, n, que se define por el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío, c, y la velocidad de la luz en este medio, v:

$$n = \frac{c}{v} \qquad 31.3$$

DEFINICIÓN: ÍNDICE DE REFRACCIÓN

* Un enunciado más completo y general indica que el tiempo transcurrido durante el recorrido es estacionario respecto a las variaciones de la trayectoria; es decir, si t se expresa en función de cierto parámetro x, la trayectoria seguida cumplirá la condición $dt/dx = 0$. La característica importante de una trayectoria estacionaria es que el tiempo transcurrido a lo largo de trayectorias próximas será, aproximadamente, el mismo que a lo largo del recorrido real.

† La velocidad de la luz no es nunca mayor que c. En ciertos materiales, en determinadas frecuencias de la luz en las que son fuertemente dispersos, la velocidad teórica de ésta es superior a c. Sin embargo, la información, incluso en estos materiales, se transmite siempre a velocidades inferiores a c.

Para el agua, n = 1,33, mientras que para el vidrio n varía de 1,50 a 1,66 según el tipo de vidrio. El diamante posee un índice de refracción muy elevado, aproximadamente 2,4. El índice de refracción del aire es aproximadamente 1,0003, de modo que para la mayor parte de los casos a estudiar, podemos suponer que la velocidad de la luz en el aire es la misma que en el vacío.

Cuando un haz de luz incide sobre una superficie de separación entre dos medios, como una superficie aire-vidrio, parte de la energía luminosa se refleja y parte entra en el segundo medio. Si la luz incidente no es perpendicular a la superficie, entonces la luz transmitida no es paralela a la incidente. El cambio en dirección del rayo transmitido se denomina **refracción**. La figura 31.8 muestra un rayo de luz que incide sobre una superficie lisa aire-vidrio. El ángulo θ_1 entre el rayo incidente y la normal (recta perpendicular a la superficie) se denomina **ángulo de incidencia** y el plano definido por ambas líneas recibe el nombre de **plano de incidencia**. El rayo reflejado está situado en el plano de incidencia y forma un ángulo θ'_1 con la normal que es igual al ángulo de incidencia, como se ve en la figura:

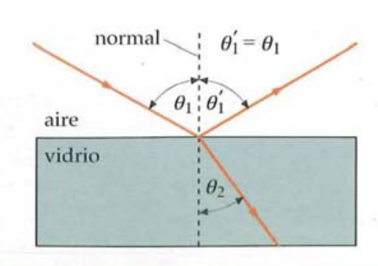


FIGURA 31.8 El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia θ_1. El ángulo de refracción θ_2 es menor que el ángulo de incidencia si la velocidad de la luz en el segundo medio es menor que la que posee en el medio incidente.

$$\theta'_1 = \theta_1 \qquad 31.4$$

LEY DE LA REFLEXIÓN



Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Trigonometría**

Este resultado se conoce como **ley de la reflexión** y es válida para cualquier tipo de onda. La figura 31.19 ilustra la ley de la reflexión en el caso de rayos de luz y de frentes de onda de ultrasonidos.

El rayo que entra en el vidrio en la figura 31.8 se denomina *rayo refractado* y el ángulo θ_2 es el ángulo de refracción. Cuando una onda cruza un límite en el cual se reduce su velocidad, como en el caso de la luz que penetra en el vidrio desde el aire, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia θ_1, es decir, el rayo refractado se aproxima a la normal. En cambio, si el haz luminoso se origina en el vidrio y se refracta en el aire, entonces el rayo refractado se aleja de la normal.

El ángulo de refracción θ_2 depende del ángulo de incidencia y de la velocidad relativa de las ondas luminosas en los dos medios. Si v_1 es la velocidad de la onda en el medio incidente y v_2 la velocidad de la onda en el medio transmisor, los ángulos de incidencia y refracción están relacionados por

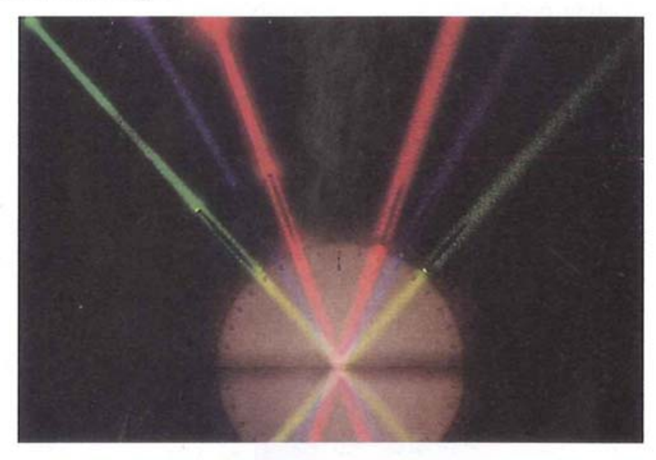
$$\frac{1}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2 \qquad 31.5a$$

La ecuación 31.5a es válida para la refracción de cualquier tipo de onda incidente en una interfase límite que separe dos medios distintos.

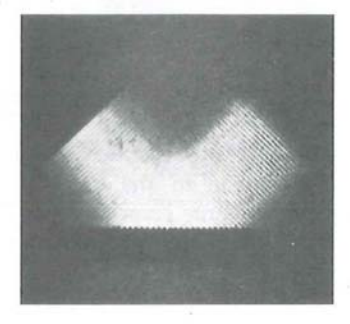
En función de los índices de refracción de los dos medios n_1 y n_2, la ecuación 31.3 y 31.5a toma la forma

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad 31.5b$$

LEY DE SNELL DE LA REFRACCIÓN

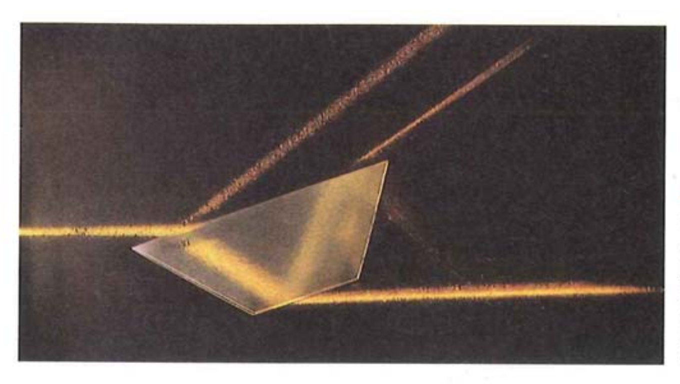


(a)



(b)

FIGURA 31.9 (a) Rayos luminosos reflejados en una interfase aire-vidrio mostrando ángulos iguales de incidencia y reflexión. (b) Ondas planas ultrasónicas en el agua reflejadas en una lámina de acero. *((a) Fotografías de Ken Kay. (b) Gentileza de los laboratorios Battelle-Northwest)*



Reflexión y refracción de un haz de luz incidente sobre un bloque de vidrio. *(Richard Megna/Fundamental Photographs.)*

Este resultado fue descubierto experimentalmente en 1621 por Willebrod Snell, un científico holandés, y se conoce como ley de Snell o ley de la refracción. Algunos años después fue descubierta independientemente por el matemático y filósofo francés René Descartes.

MECANISMOS FÍSICOS DE LA REFLEXIÓN Y LA REFRACCIÓN

El mecanismo físico de la reflexión de la luz puede comprenderse en función de la absorción e irradiación posterior de la luz por los átomos del medio reflectante o refractante. Cuando la luz que se transmite por el aire incide sobre una superficie de vidrio, los átomos de éste absorben la luz y la irradian inmediatamente con la misma frecuencia en todas las direcciones. Las ondas radiadas hacia atrás por los átomos de vidrio interfieren constructivamente en un ángulo igual al de incidencia, produciendo así la onda reflejada.

La onda transmitida es el resultado de la interferencia entre la onda incidente y la onda producida por la absorción e irradiación de la energía de la luz por los átomos del medio. En el caso de que la luz entre en el vidrio procedente del aire, existe un retraso de fase entre la onda irradiada y la onda incidente. Por lo tanto, existe también un retraso de fase entre la onda resultante y la onda incidente. Este retraso de fase significa que la posición de una cresta de la onda transmitida está retardada respecto a la posición de las crestas de la onda incidente en el medio. Por consiguiente, en un tiempo determinado, una cresta de la onda transmitida no llega tan lejos dentro del medio como la de la onda incidente original; es decir, la velocidad de la onda transmitida es menor que la de la onda incidente. El índice de refracción es, por lo tanto, mayor que 1. Como la frecuencia de la luz en el segundo medio es la misma que la de la luz incidente —los átomos absorben y vuelven a irradiar la luz con la misma frecuencia—, pero la velocidad de la luz es diferente, la longitud de onda de la luz transmitida es distinta de la que posee la luz incidente. Si la longitud de onda en el vacío es λ, entonces $\lambda f = c$, y si λ_n es la longitud de onda de un medio en el que la velocidad de la luz es v, $\lambda_n f = v$. Combinando estas dos relaciones, se obtiene $\lambda / \lambda_n = c/v$, o bien

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{c/v} = \frac{\lambda}{n} \qquad 31.6$$

REFLEXIÓN ESPECULAR Y DIFUSA

La figura 31.10*a* muestra un haz de rayos luminosos procedentes de una fuente puntual P que se reflejan en una superficie plana. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' detrás de la superficie. El punto P' se denomina imagen del punto P. Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que divergirían de una fuente situada en P'. (Estudiaremos la formación de imágenes mediante superficies reflectoras y refractoras en el capítulo siguiente.)

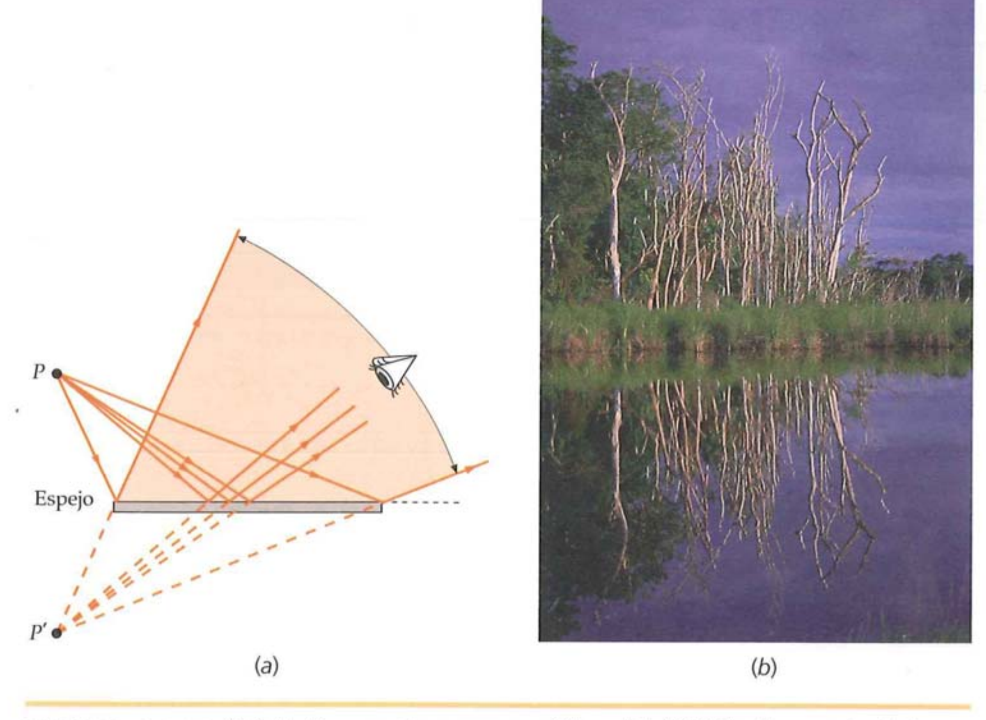
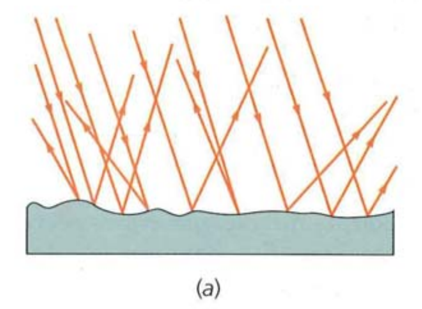


FIGURA 31.10 (*a*) Reflexión especular en una superficie pulida. (*b*) Reflexión especular de los árboles en el agua. *(Macduff Everton/Corbis.)*

La reflexión en una superficie suave y lisa se denomina **reflexión especular**. Difiere de la **reflexión difusa**, que se ilustra en la figura 31.11. En este último caso, puesto que la superficie es rugosa, los rayos procedentes de un punto se reflejan en todas direcciones y no divergen de ningún punto, de modo que no se forma una imagen. La reflexión de la luz en la página de este libro es una reflexión difusa. A veces se utilizan vidrios ligeramente esmerilados para cubrir cuadros, de forma que se obtenga una reflexión difusa y eliminar así los reflejos y brillos de la luz utilizada para iluminarlos. La reflexión difusa de la carretera es la que nos permite verla cuando se conduce de noche, porque parte de la luz de los faros se refleja difusamente en la superficie de la carretera y vuelve hacia nosotros. Cuando el tiempo es húmedo, la reflexión es mayoritariamente especular, de modo que se refleja un poco de luz hacia el conductor y la carretera es más difícil de ver.



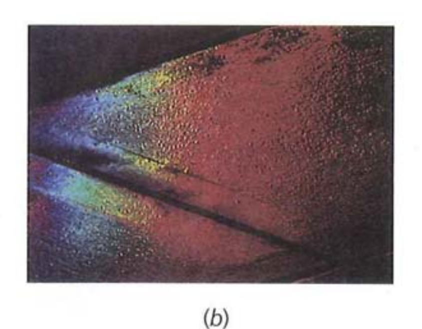


FIGURA 31.11 (*a*) Reflexión difusa en una superficie rugosa. (*b*) Reflexión difusa de luces coloreadas en una acera. *((b) Pete Saloutos/The Stock Market.)*

INTENSIDAD RELATIVA DE LA LUZ REFLEJADA Y TRANSMITIDA

La fracción de energía luminosa reflejada en una superficie de separación, como una interfase aire-vidrio, depende del ángulo de incidencia, de la orientación del vector campo eléctrico asociado a la onda y de los índices de refracción de los dos medios. Para el caso especial de incidencia normal ($\theta_1 = \theta_1' = 0$), la intensidad reflejada resulta ser

$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0 \qquad 31.7$$

donde I_0 es la intensidad incidente y n_1 y n_2 son los índices de refracción de los dos medios. Para un caso típico de reflexión en una interfase aire-vidrio para la cual $n_1 = 1$ y $n_2 = 1,5$, la ecuación 31.11 nos da $I = I_0/25$. Sólo el 4 por ciento de la energía se refleja; el resto se transmite.

* La ecuación 31.7 es similar a una ecuación de ondas de una cuerda dada en la sección 4 del capítulo 15.

Ejemplo 31.3 Refracción del aire al agua

Un rayo de luz que se propaga en el aire entra en el agua con un ángulo de incidencia de 45°. Si el índice de refracción del agua es 1,33, ¿cuál es el ángulo de refracción?

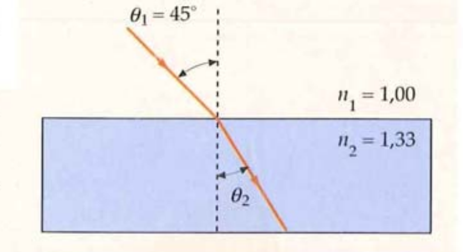


FIGURA 31.12

PLANTEAMIENTO El ángulo de refracción se determina utilizando la ley de Snell. Llamemos 1 y 2 a los subíndices correspondientes al aire y al agua, respectivamente. Por lo tanto, $n_1 = 1$, $\theta_1 = 45°$, $n_2 = 1{,}33$ y θ_2 es el ángulo de refracción (figura 31.12).

SOLUCIÓN

1. Utilizar la ley de Snell para deducir sen θ_2, es decir, el seno del ángulo de refracción:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

así

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1$$

2. Determinar el ángulo cuyo seno es 0,532:

$$\theta_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1{,}00}{1{,}33}\operatorname{sen}45{,}0°\right)$$

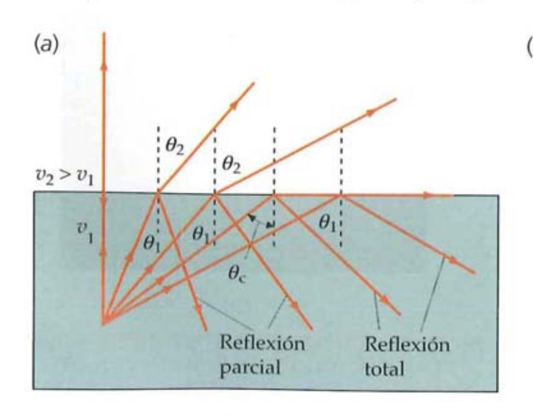
$$= \operatorname{arcsen}(0{,}532) = \boxed{32{,}1°}$$

COMPROBACIÓN Cuando la luz entra en un medio en el que viaja a velocidad inferior, se acerca hacia la normal formando con ésta un ángulo menor, θ_2, que el de incidencia, θ_1. El paso 2 del problema concuerda con lo observado.

OBSERVACIÓN La luz se refracta y se acerca más a la normal en el medio que tiene mayor índice de refracción.

REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

En la figura 31.13 se ve una fuente puntual en el vidrio con rayos que inciden sobre la superficie vidrio-aire con diferentes ángulos. Todos los rayos no perpendiculares a la interfase se desvían alejándose de la normal. Al ir aumentando el ángulo de incidencia, el ángulo de refracción crece hasta que se alcanza un ángulo de incidencia crítico θ_c para el cual el ángulo de refracción es 90°. En el caso de ángulos de incidencia mayores que este ángulo crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. Este fenómeno se denomina **reflexión interna total**. Puede hallarse el ángulo crítico en función de los índices de refracción de los dos medios despejando sen θ_1 en la ecuación 31.5*b* (n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2) y haciendo θ_2 igual a 90°.



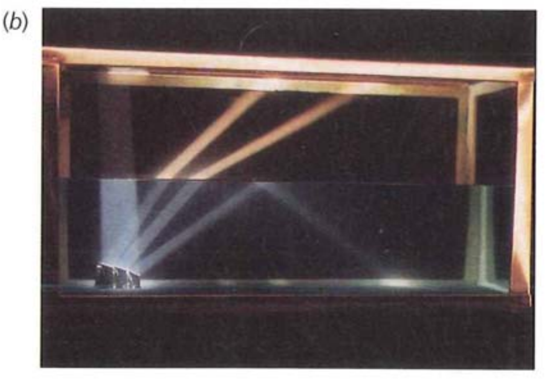


FIGURA 31.13 (*a*) Reflexión interna total. Cuando aumenta el ángulo de incidencia, crece el ángulo de refracción hasta que, para un cierto ángulo crítico de incidencia θ_c, el ángulo de refracción es 90°. Con ángulos de incidencia mayores que el crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. (*b*) Fotografía de la refracción y de la reflexión interna total en una superficie agua-aire. *(Fotografía de Ken Kay.)*

Es decir,

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}\operatorname{sen}90° = \frac{n_2}{n_1} \qquad 31.8$$

ÁNGULO CRÍTICO PARA LA REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

Obsérvese que sólo se presenta la reflexión interna total cuando la luz se encuentra originalmente en el medio con mayor índice de refracción. Matemáticamente, si n_2 es mayor que n_1, no puede verificarse la ley de Snell porque no existe ningún ángulo real cuyo seno sea mayor que 1.

Ejemplo 31.4 Reflexión total — *Inténtelo usted mismo*

El índice de refracción de un tipo de vidrio es $n = 1{,}50$ y el del aire $n = 1{,}00$. ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total de la luz que sale de este vidrio y entra en el aire?

PLANTEAMIENTO Aplíquese la ley de la refracción (ecuación 31.5*b*) con un ángulo de refracción de 90°.

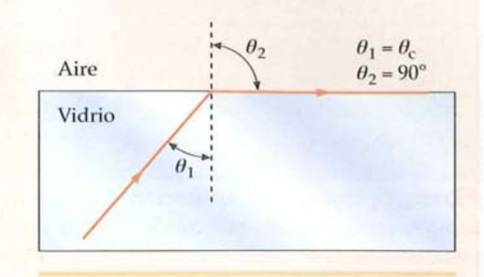


FIGURA 31.14

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Hacer un diagrama mostrando los rayos incidente y refractado. Para el ángulo crítico de incidencia, el de refracción es de 90°.	
2. Aplicar la ley de la refracción (ecuación 31.5*b*). El ángulo crítico es el ángulo de incidencia.	$\theta_c = \boxed{41{,}8°}$

COMPROBACIÓN La figura 31.13*b* muestra que el ángulo crítico para la interfase agua-aire es algo mayor que 45°. Como el índice de refracción del vidrio es algo mayor que el del agua, el ángulo crítico para la interfase agua-aire debería ser algo menor de 45°. El resultado obtenido de 41,8° concuerda con lo esperado.

Ejemplo 31.5 Cálculo de profundidades — *Póngalo en su contexto*

Supongamos que nos encontramos en una piscina, debajo del agua. Miramos hacia arriba y notamos que vemos los objetos que están por encima del nivel del agua dentro de un cono de luz cuya base está en la superficie y cuyo radio, aproximadamente, es de 2,0 m. Si dirigimos la vista fuera de dicho cono, nuestra única visión es el color de los diferentes lugares de la piscina. ¿A qué profundidad nos encontramos?

PLANTEAMIENTO Podemos determinar la profundidad de la piscina a partir del radio del círculo correspondiente a la base del cono de luz y del ángulo con el que la luz entra en nuestro ojo desde el borde de dicho círculo. En el borde del círculo, la luz entra en el agua con un ángulo de 90°, de forma que el ángulo de refracción en la superficie aire-agua es el ángulo crítico de refracción total interna para dicha superficie. A partir de la figura 31.15, podemos ver que la profundidad y se relaciona con este ángulo y el radio del círculo R mediante $\operatorname{tg}\theta_c = R/y$. El ángulo crítico se determina a partir de la ecuación 31.8 sustituyendo $n_2 = 1$ y $n_1 = 1{,}33$.

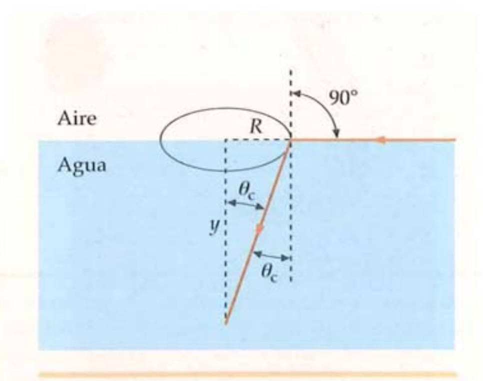


FIGURA 31.15

SOLUCIÓN

1. Podemos relacionar la profundidad y con el radio R y el ángulo θ_c: $\quad \operatorname{tg}\theta_c = R/y$

2. Despejamos la profundidad y: $\quad y = \dfrac{R}{\operatorname{tg}\theta_c}$

3. Determinamos el ángulo crítico para la refracción total interna en la superficie agua-aire:
$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}00}{1{,}33} = 0{,}752$$
$$\theta_c = 48{,}8°$$

4. Obtenemos la profundidad y:
$$y = \frac{R}{\operatorname{tg}\theta_c} = \frac{2{,}0\ \text{m}}{\operatorname{tg} 48{,}8°} = \boxed{1{,}7\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 4 parece un resultado plausible. La mayoría de las piscinas tienen esa profundidad o más.

La figura 31.26*a* muestra luz que incide normalmente sobre uno de los catetos de un prisma de vidrio de 45°-45°-90°. Si el índice de refracción del prisma vale 1,5, el ángulo crítico correspondiente a la reflexión total interna es 41,8°, como hemos visto en el ejemplo 31.4. Como el ángulo de incidencia del rayo sobre la superficie vidrio-aire es 45°, la luz se reflejará totalmente y saldrá perpendicularmente a la otra cara del prisma, como está indicado. En la figura 31.16*b*, la luz incide perpendicularmente a la hipotenusa de un prisma del mismo tipo y se refleja totalmente dos veces, de modo que emerge a 180° respecto a su dirección inicial. Los prismas se utilizan para variar la dirección de los rayos luminosos. En los llamados prismáticos se utilizan dos prismas en cada lado. Estos prismas reflejan la luz, reduciendo de este modo la longitud necesaria, y enderezan la imagen que las lentes del sistema óptico dan invertida.* El diamante tiene un índice de refracción muy alto ($n \approx 2{,}4$), de modo que casi toda la luz que entra en un diamante se ve reflejada finalmente hacia fuera, dando origen a sus característicos destellos.

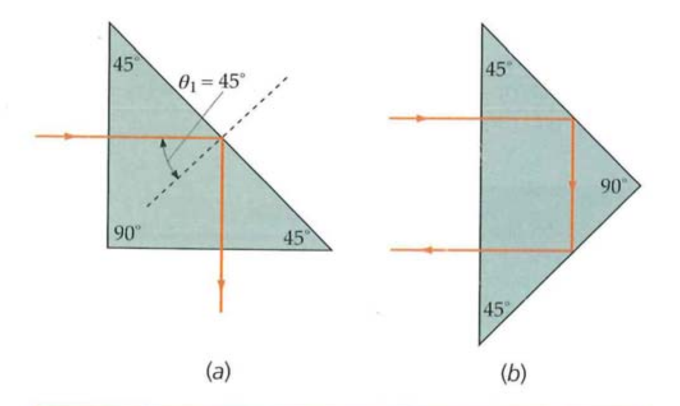


FIGURA 31.16 (*a*) La luz que entra por uno de los catetos de un prisma de vidrio de 45°-45°-90° se refleja totalmente. (*b*) La luz que entra por la hipotenusa del prisma se refleja totalmente dos veces.

Fibras ópticas Una aplicación interesante de la reflexión interna total es la transmisión de un haz de luz a lo largo de una fibra de vidrio transparente, delgada y larga (figura 31.17*a*). Si el haz empieza aproximadamente paralelo al eje de la fibra, chocará contra las paredes de la misma con ángulos mayores que el ángulo crítico (si las partes curvas de la fibra no son demasiado agudas) y no se perderá energía luminosa a través de las paredes de la fibra. Para obtener imágenes puede utilizarse un manojo o haz de este tipo de fibras, como se muestra en la figura 31.17*b*. Las fibras ópticas tienen muchas aplicaciones en medicina y en comunicaciones. En medicina, se utilizan haces muy finos de fibras como sondas para examinar diversos órganos internos sin necesidad de intervención quirúrgica. En comunicaciones, el ritmo o velocidad con que puede transmitirse información está relacionado con la frecuencia de la señal. Un sistema de transmisión que utilice luz de frecuencias del orden de 10^{14} Hz puede transmitir información a un ritmo mucho mayor que uno que utilice ondas de radio, que tienen frecuencias del orden de 10^6 Hz. En sistemas de telecomunicación, una sola fibra de vidrio del tamaño de un cabello humano puede transmitir información audio o vídeo equivalente a 32 000 voces hablando simultáneamente.

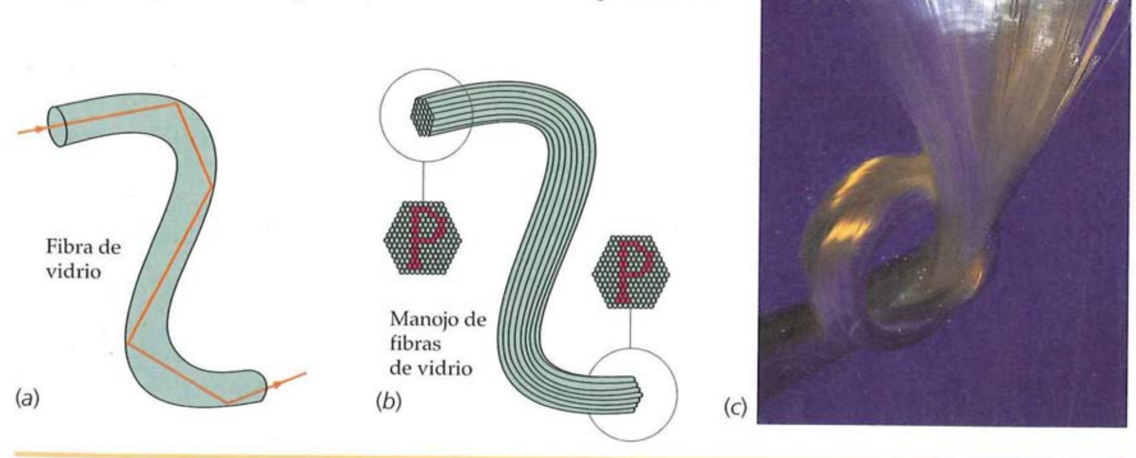
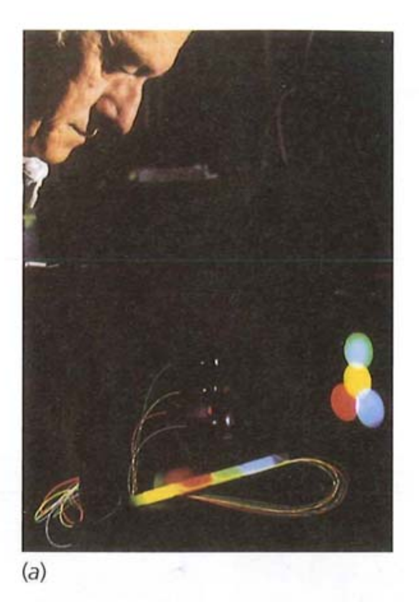


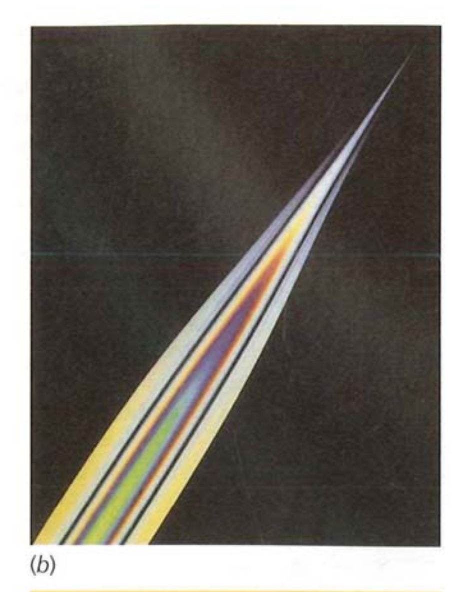
FIGURA 31.17 (*a*) Tubo de luz. La luz dentro del tubo incide siempre en sus paredes internas con un ángulo mayor que el crítico de modo que no puede escapar del tubo por refracción. (*b*) La luz procedente de un objeto se transporta por un manojo de fibras de vidrio para formar una imagen del objeto en el otro extremo de las fibras. (*c*) Luz emergente de un manojo de fibras de vidrio. (*(c) Ted Horowitz/The Stock Market.*)

* La imagen producida por el objetivo de un telescopio se discute en la sección 32.4.

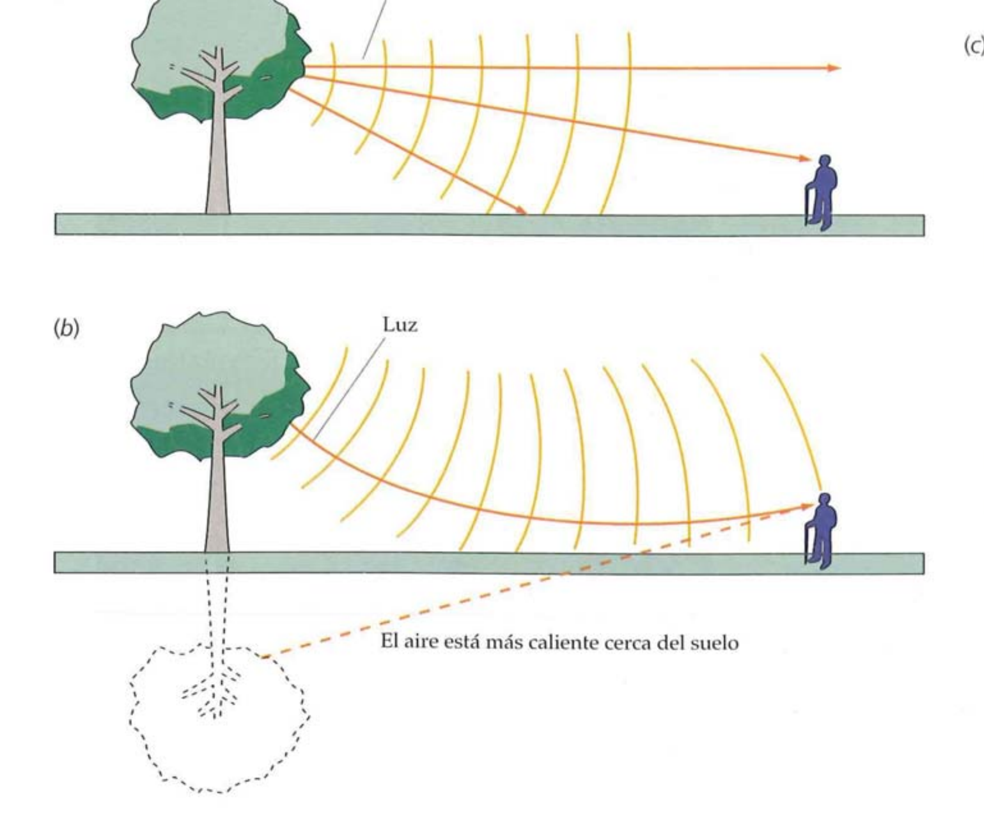
ESPEJISMO

Cuando el índice de refracción de un medio cambia gradualmente, la refracción es continua, de tal forma que la luz se va curvando gradualmente. Un ejemplo interesante de este caso es la formación de un espejismo. En un día muy caluroso, la superficie de las rocas, del pavimento y de la arena se calientan mucho. En este caso, es frecuente encontrar cerca del suelo una capa de aire más caliente y, por lo tanto, menos denso que el aire situado por encima. La velocidad de la luz es ligeramente mayor en esta capa menos densa, de manera que el haz de luz que pasa de la capa más fría a la más caliente se curva. La figura 31.18*a* muestra la luz procedente de un árbol cuando todo el aire está a la misma temperatura. Los frentes de onda son esféricos y los rayos son rectos. En la figura 31.18*b*, el aire próximo al suelo está más caliente y en él la velocidad de los frentes de onda es mayor. Las partes del frente de onda cercanas al suelo se mueven con mayor rapidez y adelantan a las partes que están más altas, originándose así un frente de onda no esférico que causa la curvatura de los rayos. Así, los dos rayos que inicialmente se dibujaban dirigidos hacia el suelo se curvan hacia arriba. Como resultado, el observador ve una imagen del árbol y piensa que la luz se ha reflejado en el suelo. Cuando se conduce en un día muy caluroso, es posible observar zonas aparentemente mojadas en la carretera que desaparecen cuando se les da alcance. Éstas se deben a la refracción de la luz en una capa de aire muy caliente cerca del pavimento.


(*a*)


(*b*)

(*a*) En esta demostración realizada en el Laboratorio de Investigación Naval de los Estados Unidos, una combinación de focos láser genera diversos colores que excitan elementos sensores en fibras adyacentes, lo que lleva a una separación de la información, como indica la separación de los colores. (*b*) La punta de un elemento previo de una guía de luz se reblandece mediante el calor y se estira hasta formar una fibra muy fina y larga. Los colores en el elemento previo indican una estructura en capas de diferentes composiciones, que queda retenida en la fibra. *((a) Dan Boyd/ gentileza del laboratorio de investigación naval. (b) Gentileza de los archivos ATT.)*



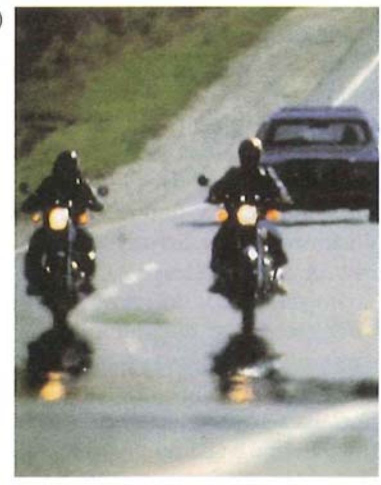

(c)

FIGURA 31.18 Espejismo. (*a*) Cuando el aire está a temperatura uniforme, los frentes de onda de la luz procedente del árbol son esféricos. (*b*) Cuando el aire cercano al suelo está más caliente, los frentes de onda dejan de ser esféricos y la luz procedente del árbol se refracta de forma continua dando lugar a una trayectoria curva. (*c*) Fotografía de reflexiones aparentes de motocicletas sobre una carretera muy caliente. *(Robert Greenler.)*

DISPERSIÓN

El índice de refracción de un material tiene una ligera dependencia con la longitud de onda. Para muchos materiales, n disminuye ligeramente cuando crece la longitud de onda, como se muestra en la figura 31.19. Esta dependencia del índice de refracción con la longitud de onda (y, por lo tanto, con la frecuencia) se denomina **dispersión**. Cuando un haz de luz blanca incide formando un cierto ángulo con la superficie de un prisma de vidrio, el ángulo de refracción (medido respecto a la normal) correspondiente a las longitudes de onda más cortas (hacia el extremo violeta del espectro) es ligeramente menor que el correspondiente a longitudes de onda más largas (hacia el extremo rojo del espectro). Por tanto, la luz de longitud de onda más corta se desvía más (se acerca más a la normal) que la luz de longitud de onda más larga. Así pues, el haz de luz blanca se esparce o dispersa en sus colores o longitudes de onda componentes (figura 31.20).

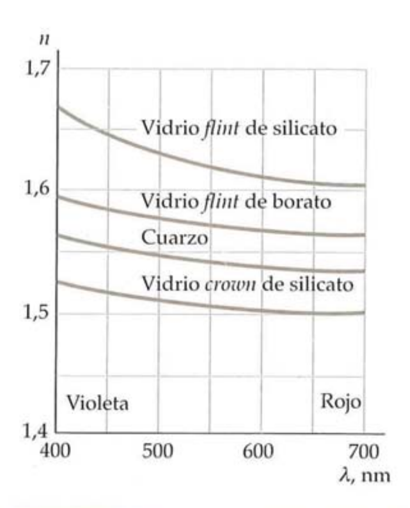
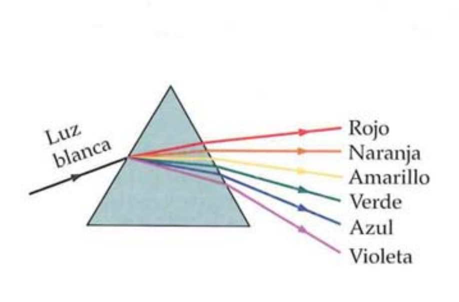


FIGURA 31.19 Índice de refracción de diversos materiales en función de la longitud de onda.



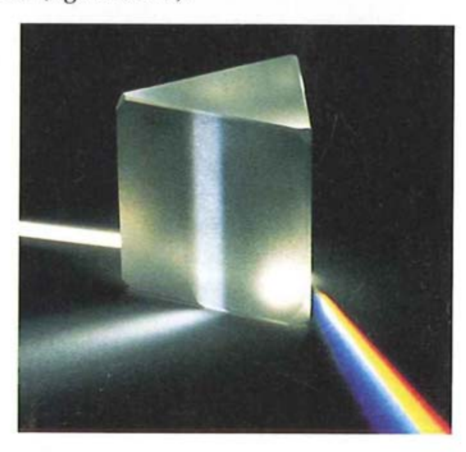


FIGURA 31.20 Un haz de luz blanca incidente sobre un prisma de vidrio se dispersa en sus colores componentes. El índice de refracción disminuye cuando aumenta la longitud de onda, de modo que las longitudes de onda más largas (rojo) se desvían menos que las longitudes de onda más cortas (violeta). *(David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers.)*

Arco iris La formación de un arco iris es un ejemplo conocido de la dispersión de la luz solar por refracción en gotas de agua. La figura 31.21 es un diagrama dibujado originalmente por Descartes en el que se muestran rayos solares paralelos que entran en una gota de agua esférica. En primer lugar, los rayos se refractan cuando entran en la gota. Luego se reflejan en la superficie posterior agua-aire y, finalmente, se refractan de nuevo cuando salen de la gota.

Como muestra la figura 31.21, el ángulo formado por los rayos emergentes y el diámetro (rayo 1) alcanza un máximo alrededor del rayo 7 y después decrece. En el diagrama puede verse un grupo de rayos concentrados que emergen con ángulos próximos al máximo. Esta concentración de rayos cerca del ángulo máximo da origen al arco iris. Mediante una construcción geométrica (utilizando la ley de la refracción), Descartes demostró que el ángulo máximo vale aproximadamente 42°. Por lo tanto, para observar un arco iris debemos mirar las gotas de agua con un ángulo de 42° respecto a la línea que las une con el Sol, como se ve en la figura 31.22. Por lo tanto, el radio angular del arco iris es de 42°.

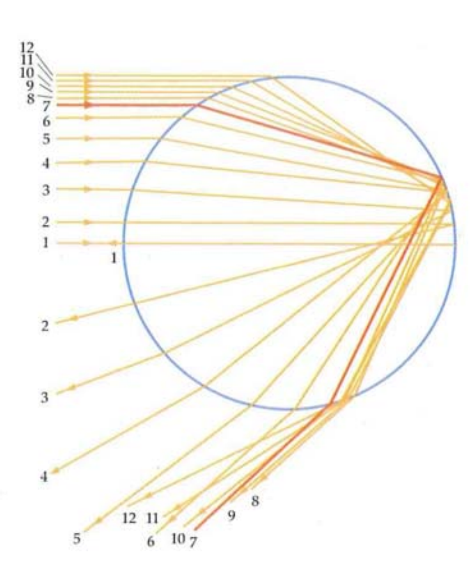


FIGURA 31.21 Construcción de Descartes de los rayos paralelos de luz que entran en una gota de agua esférica. El rayo 1 entra en la gota a lo largo de un diámetro y se refleja hacia atrás a lo largo de la trayectoria incidente. El rayo 2 entra ligeramente por encima del diámetro y emerge por debajo del diámetro formando con éste un pequeño ángulo. El ángulo formado entre el rayo emergente y el diámetro aumenta cuando consideramos rayos cada vez más alejados del diámetro hasta el rayo número 7 (línea gruesa), que emerge formando el ángulo máximo. Los rayos que entran por encima del rayo 7, emergen formando con el diámetro ángulos cada vez más pequeños.

La separación de los colores en el arco iris es el resultado de que el índice de refracción del agua dependa ligeramente de la longitud de onda de la luz. El radio angular del arco dependerá, pues, ligeramente de la longitud de onda de la luz. El arco iris observado está constituido por los rayos de luz procedentes de muchas gotitas diferentes de agua, como se ve en la figura 31.23. El color que se ve para cada radio angular concreto corresponde a la longitud de onda de la luz que permita a la luz alcanzar el ojo viniendo desde las gotitas con este radio angular. Como n_{agua} es menor para la luz roja que para la azul, la parte roja del arco iris está situada con un radio angular ligeramente mayor que la parte azul del mismo; por ello, el color rojo se encuentra en la parte superior del arco iris.

Cuando un rayo de luz incide sobre una superficie que separa el agua y el aire, parte de la luz se refleja y parte se refracta. Se obtiene un arco iris secundario a partir de los rayos de luz que se reflejan dos veces dentro de una gotita (figura 31.24). El arco secundario tiene un radio angular de 51° y su secuencia de colores es la inversa de la que tiene el arco primario; es decir, el violeta está en la parte exterior en el arco secundario. Puesto que la fracción de luz reflejada en la superficie agua-aire es pequeña, el arco secundario es considerablemente más débil que el primario.

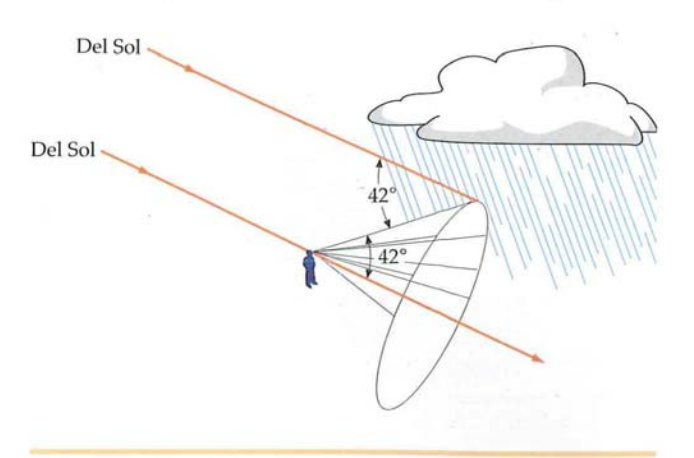


FIGURA 31.22 Un arco iris se observa mirando las gotas con un ángulo de 42° con la línea que procede del Sol, según predice la construcción de Descartes de la figura 31.21.

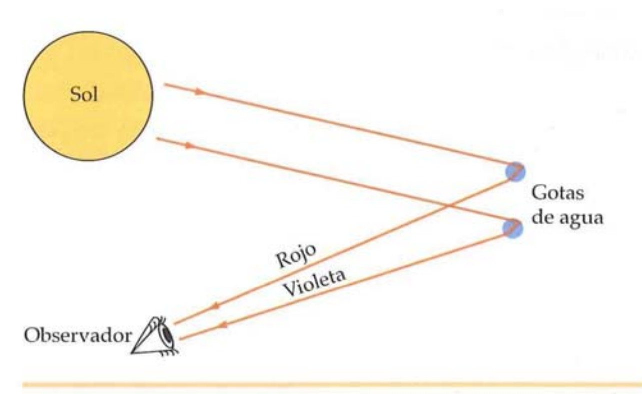


FIGURA 31.23 El arco iris es el resultado de la luz que procede de muchas gotitas de agua diferentes.

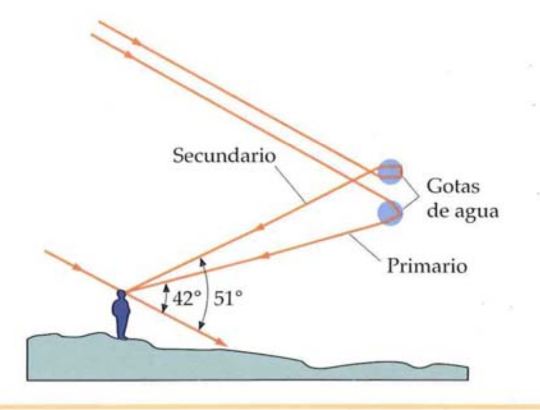


FIGURA 31.24 El arco iris secundario es el resultado de los rayos luminosos que se reflejan dos veces dentro de una gota de agua.

(a)



(b)



(*a*) Este halo de 22° alrededor del Sol es el resultado de la reflexión y refracción de los cristales de hielo hexagonales que están orientados al azar en la atmósfera. (*b*) Cuando los cristales de hielo no están orientados al azar sino que están cayendo con sus bases planas horizontales únicamente se ven las partes del halo que corresponden a cada lado del Sol. A veces se llaman "perros del Sol". *((a) Robert Greenler. (b) Giovanni DeAmici, NSF, Lawrence Berkeley Laboratory.)*

Cálculo del radio angular del arco iris Podemos calcular el radio angular del arco iris mediante las leyes de la reflexión y de la refracción. La figura 31.25 muestra un rayo de luz que incide sobre una gotita de agua esférica en el punto A. El ángulo de refracción θ_2 está relacionado con el ángulo de incidencia θ_1 mediante la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \operatorname{sen}\theta_1 = n_{\text{agua}} \operatorname{sen}\theta_2 \qquad 31.9$$

El punto P de la figura 31.25 es el de intersección de la prolongación del rayo incidente con la del rayo emergente. El ángulo ϕ_d es el ángulo de desviación del rayo. El ángulo 2β está relacionado con ϕ_d por:

$$\phi_d + 2\beta = \pi \qquad 31.10$$

Deseamos relacionar el ángulo de desviación ϕ_d con el ángulo de incidencia θ_1. Según el triángulo AOB, se tiene

$$2\theta_2 + \alpha = \pi \qquad 31.11$$

Análogamente, a partir del triángulo AOP, tenemos

$$\theta_1 + \beta + \alpha = \pi \qquad 31.12$$

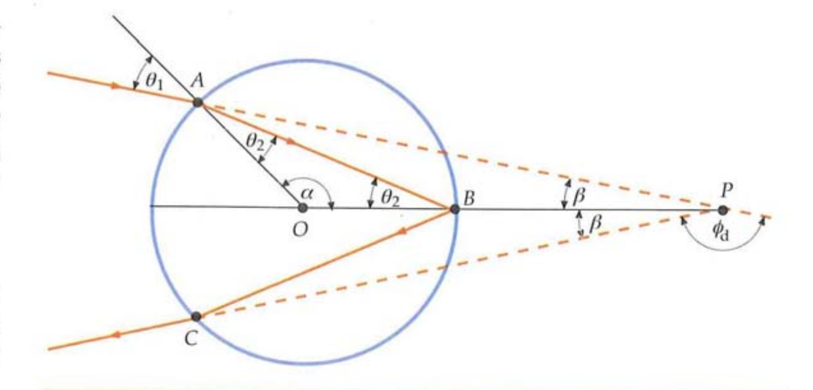


FIGURA 31.25 Rayo de luz que incide sobre una gota de agua esférica. El rayo se refracta en el punto A y se refleja en el punto B del fondo de la gota. Forma un ángulo θ_2 con la línea radial OB y se refleja formando un ángulo igual. El rayo se refracta de nuevo en C al abandonar la gota.

Eliminando α entre las ecuaciones 31.11 y 31.12 y despejando β, se obtiene

$$\beta = \pi - \theta_1 - \alpha = \pi - \theta_1 - (\pi - 2\theta_2) = 2\theta_2 - \theta_1$$

Aplicando este valor de β en la ecuación 31.10, se tiene para el ángulo de desviación

$$\phi_d = \pi - 2\beta = \pi - 4\theta_2 + 2\theta_1 \qquad 31.13$$

La ecuación 31.13 puede combinarse con la ecuación 31.9 para eliminar θ_2 y obtener el ángulo de desviación ϕ_d en función del de incidencia θ_1:

$$\phi_d = \pi + 2\theta_1 - 4 \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} \operatorname{sen}\theta_1\right) \qquad 31.14$$

En la figura 31.26, se muestra un gráfico de ϕ_d en función de θ_1. El ángulo de desviación ϕ_d tiene su valor mínimo cuando $\theta_1 \approx 60°$. Para este ángulo de incidencia, el ángulo de desviación es $\phi_{d,\text{mín}} = 138°$. Este ángulo es el **ángulo de mínima desviación**. Para ángulos incidentes que son ligeramente mayores o menores que 60°, el ángulo de desviación es, aproximadamente, el mismo. Por consiguiente, la intensidad de luz reflejada por la gotita de agua será máxima en el ángulo de desviación mínima. Podemos ver en la figura 31.25 que el valor máximo de β corresponde al valor mínimo de ϕ_d. El radio angular de máxima intensidad, dado por $2\beta_{\text{máx}}$, pues,

$$2\beta_{\text{máx}} = \pi - \phi_{d,\text{mín}} = 180° - 138° = 42° \qquad 31.15$$

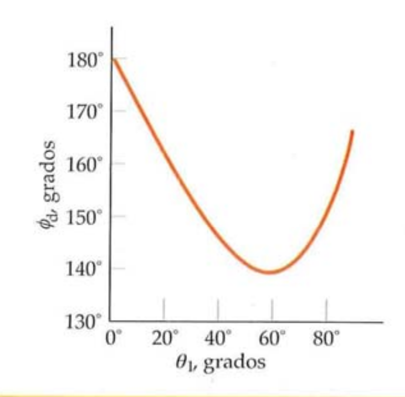


FIGURA 31.26 Representación gráfica del ángulo de desviación ϕ_d en función del ángulo de incidencia θ_1. El ángulo de desviación tiene su valor mínimo de 138° cuando el ángulo de incidencia vale 60°. Como $d\phi_d/d\theta_1 = 0$ en la desviación mínima, la desviación de los rayos con ángulos de incidencia ligeramente menores o mayores que 60° será, aproximadamente, la misma.

El índice de refracción del agua varía ligeramente con la longitud de onda. Por consiguiente, para cada color, la intensidad máxima se percibe con un radio angular ligeramente diferente de los que corresponden a otras longitudes de onda de valores próximos.

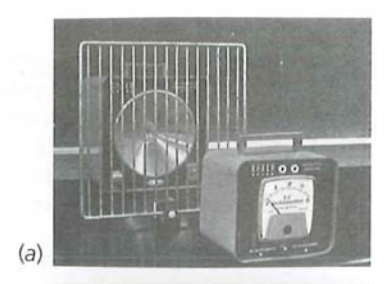
31.4 POLARIZACIÓN

En una onda electromagnética, la dirección del campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Si el campo eléctrico es siempre paralelo a una línea perpendicular a la de propagación, la onda se denomina **linealmente polarizada**. Las ondas electromagnéticas producidas por una antena dipolar están linealmente polarizadas con el vector campo eléctrico de cualquier punto del campo paralelo al plano que contiene este punto del campo y el eje de la antena. Las ondas producidas por muchas fuentes normalmente no están polarizadas. Una fuente luminosa típica, por ejemplo, contiene millones de átomos que actúan independientemente. El campo eléctrico correspondiente a dicha onda puede descomponerse

en sus componentes x e y que varían aleatoriamente debido a que no existe correlación entre los átomos individuales que producen la luz.

Puede demostrarse la polarización de las ondas electromagnéticas mediante microondas, que tienen longitudes de onda del orden del centímetro. En un generador de microondas típico, se radian ondas polarizadas mediante una antena dipolar eléctrica. En la figura 31.27, la antena dipolar es vertical, de modo que el vector del campo eléctrico $\vec{E}$ de las ondas radiadas horizontalmente es vertical. Cuando los alambres son verticales, como en la figura 31.27*a*, el campo eléctrico paralelo a los alambres crea corrientes en ellos y la energía resulta absorbida. Cuando los alambres están horizontales y, por lo tanto, perpendiculares a $\vec{E}$, como en la figura 31.27*b*, no aparecen corrientes y las ondas se transmiten.

Existen cuatro fenómenos que producen ondas electromagnéticas polarizadas a partir de ondas no polarizadas: (1) absorción, (2) reflexión, (3) dispersión o *scattering* y (4) birrefringencia (también llamado doble refracción), cada uno de los cuales será examinado en las secciones siguientes.


(*a*)


(*b*)

FIGURA 31.27 Demostración de la polarización de microondas. El campo eléctrico de las microondas es vertical, paralelo a la antena dipolar vertical. (*a*) Cuando los hilos metálicos del sistema absorbente son verticales, se establecen corrientes eléctricas entre ellos y se absorbe energía, como indica la baja lectura del detector de microondas. (*b*) Cuando los hilos están horizontales, no se crean corrientes y se transmiten las microondas, como indica la lectura elevada del detector. *(Larry Langrill.)*

POLARIZACIÓN POR ABSORCIÓN

Algunos cristales presentes en la naturaleza, cortados de forma apropiada, absorben y transmiten la luz de forma diferente dependiendo de la polarización de la luz. Estos cristales pueden utilizarse para obtener luz polarizada linealmente. En 1938, E. H. Land inventó una película polarizadora simple y comercial denominada Polaroid. Este producto contiene moléculas de hidrocarburo de cadena larga que resultan alineadas cuando la lámina en que se obtienen se estira en una dirección durante el proceso de fabricación. Cuando la lámina se sumerge en una disolución que contiene yodo, las cadenas se hacen conductoras a las frecuencias ópticas. Cuando sobre ellas incide luz con su vector campo eléctrico paralelo a las cadenas, se establecen corrientes eléctricas a lo largo de las cadenas y la energía luminosa es absorbida, del mismo modo que las microondas eran absorbidas por los alambres de la figura 31.27. Si el campo eléctrico es perpendicular a las cadenas, la luz se transmite. La dirección perpendicular a las cadenas se denomina **eje de transmisión**. Para simplificar, supondremos que cuando el campo eléctrico es paralelo al eje de transmisión se transmite la totalidad de la luz mientras que toda ella resulta absorbida si es perpendicular al eje de transmisión. En realidad, una película polaroid absorbe parte de la luz aunque el campo eléctrico sea paralelo al eje de transmisión

Consideremos un haz de luz no polarizada que se propaga en la dirección z y que incide sobre una película polarizadora con su eje de transmisión en la dirección x, como indica la figura 31.28. Después, el haz incide sobre una segunda película polarizada, el analizador, cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con el eje x. Si E es la amplitud del campo eléctrico del haz que incide sobre esta segunda película, la componente paralela al eje de transmisión será $E_{\parallel} = E \cos\theta$ y la perpendicular, $E_{\perp} = E \operatorname{sen}\theta$. La película absorbe $E_{\perp}$ y transmite $E_{\parallel}$, de modo que la amplitud del campo eléctrico del haz transmitido será $E_{\parallel} = E\cos\theta$ y el campo estará polarizado linealmente en la dirección del eje de transmisión. Como la intensidad de la luz es proporcional al módulo de la amplitud del campo eléctrico, la intensidad I de la luz transmitida por la segunda película vendrá dada por

$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad 31.16$$

LEY DE MALUS

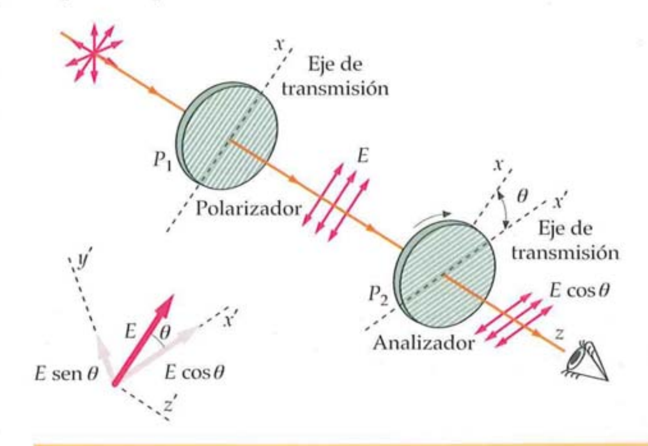
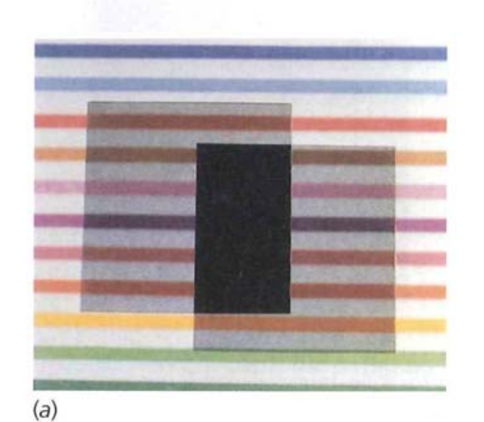


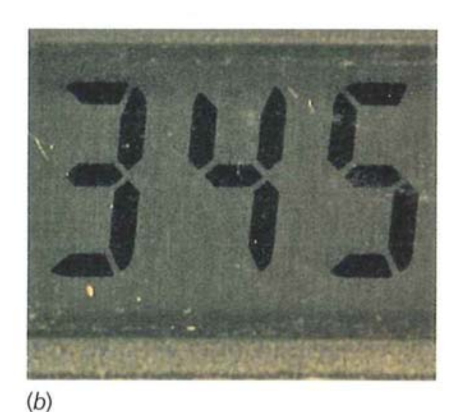
FIGURA 31.28 Un rayo polarizado previamente por una lámina polarizadora según su eje de transmisión incide en otra lámina cuyo eje forma un ángulo θ respecto al de la primera. Únicamente la componente $E\cos\theta$ se transmite a través de la segunda y el rayo transmitido es linealmente polarizado en la dirección del eje de transmisión de esta segunda. Si la intensidad entre las láminas es I_0, la transmitida por la segunda lámina es $I_0\cos^2\theta$.

donde I_0 es la intensidad del haz incidente. Si tenemos un rayo incidente de luz no polarizada de intensidad I_0 incidiendo en una lámina polarizadora, la dirección del campo eléctrico varía en los distintos lugares de la lámina y en cada lugar fluctúa con el tiempo. En cada lugar, el ángulo entre el campo eléctrico y el eje de transmisión es en promedio de 45°, de forma que aplicando la ecuación 31.16 obtenemos $I = I_0(\cos^2\theta)_m = \frac{1}{2}I_0$, donde I es la intensidad del rayo transmitido.

Cuando se sitúan sucesivamente a lo largo de un haz de luz dos elementos polarizadores, como se acaba de describir, el primero de ellos se denomina **polarizador** y el segundo, **analizador**. Si el polarizador y el analizador están cruzados, es decir, si sus ejes de transmisión son mutuamente perpendiculares, no pasará nada de luz a su través. La ecuación 31.16 se conoce como la **ley de Malus** en honor de su descubridor E. L. Malus (1775-1812). Se aplica a todo sistema de dos polarizadores cuyos ejes de transmisión forman un ángulo θ entre sí.



(*a*)



(*b*)

(*a*) Los polarizadores cruzados bloquean toda la luz. (*b*) En una pantalla de cristal líquido, el cristal se sitúa entre polarizadores cruzados. La luz incidente sobre el cristal se transmite porque el cristal gira la dirección de polarización de la luz en 90°. La luz se refleja de nuevo mediante un espejo situado detrás del cristal y se ve un fondo uniforme. Cuando se aplica una tensión a través de un pequeño segmento del cristal, la polarización no se gira, de modo que no se transmite la luz y el segmento aparece negro. *((a) Fotografías de fundamentos. (b) 1990 PAR/NYC, INC./ foto de Elizaberth Algieri.)*

Ejemplo 31.6 Intensidad transmitida

Luz no polarizada de intensidad 3,0 W/m² incide sobre dos películas polarizadoras cuyos ejes de transmisión forman entre sí un ángulo de 60° (figura 31.29). ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida por la segunda película?

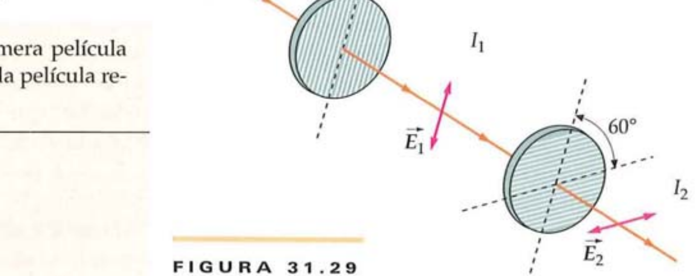


FIGURA 31.29

PLANTEAMIENTO Como la luz incidente no está polarizada, la primera película polarizadora transmite la mitad de la intensidad incidente. La segunda película reduce la intensidad luminosa en un factor de $\cos^2\theta$, siendo $\theta = 60°$.

SOLUCIÓN

1. La intensidad I_1 incidente sobre la segunda película es la mitad de la intensidad I_0 de luz no polarizada incidente sobre la primera película: $I_1 = \frac{1}{2}I_0$

2. La intensidad I_2 transmitida por la segunda película está relacionada con la incidente I_1 por la ecuación 31.16: $I_2 = I_1\cos^2\theta$

3. Combinando estos resultados y sustituyendo los datos suministrados: $I_2 = \frac{1}{2}I_0\cos^2 60° = \frac{1}{2}(3{,}0\ \text{W/m}^2)(0{,}500)^2$ $= \boxed{0{,}38\ \text{W/m}^2}$

COMPROBACIÓN El primer polarizador hace disminuir la intensidad a la mitad de la incidente, de tal forma que la intensidad cuando la luz atraviesa todo el dispositivo, es decir, la segunda película polarizadora, debería ser menor que la mitad de la incidente, que era de 3,0 watts. El resultado del paso 3 es coherente con lo esperado.

OBSERVACIÓN Conviene tener en cuenta que la segunda película polarizadora, produce una rotación del plano de polarización de 60°.

POLARIZACIÓN POR REFLEXIÓN

Cuando la luz no polarizada se refleja en una superficie plana entre dos medios transparentes, por ejemplo la que separa el aire y el vidrio o el aire y el agua, la luz reflejada está parcialmente polarizada. El grado de polarización depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de ambos medios. Para un cierto ángulo de incidencia llamado ángulo de polarización θ_p, la luz reflejada está completamente polarizada. Cuando el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de polarización, los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí. David Brewster (1781-1868), científico escocés inventor de numerosos instrumentos (incluyendo el caleidoscopio), hizo este descubrimiento de forma experimental en 1812. El ángulo de polarización también se denomina ángulo de Brewster.

La figura 31.30 muestra la luz incidente con el ángulo de polarización θ_p para el cual la luz reflejada está completamente polarizada. El campo eléctrico de la luz incidente puede descomponerse en dos componentes, una paralela y el otra perpendicular al plano de incidencia. La luz reflejada está completamente polarizada con su vector del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia. Podemos establecer una relación entre el ángulo de polarización θ_p y los índices de refracción de los medios utilizando la ley de Snell (ley de la refracción). Si n_1 es el índice de refracción del primer medio y n_2 el del segundo medio, tenemos

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_p = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

siendo θ_2 el ángulo de refracción. A partir de la figura 31.30, vemos que la suma del ángulo de reflexión y del ángulo de refracción es 90°. Como el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, tenemos

$$\theta_2 = 90° - \theta_p$$

Entonces

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_p = n_2 \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_2 \cos\theta_p$$

o sea

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{n_2}{n_1} \qquad 31.17$$

ÁNGULO DE POLARIZACIÓN

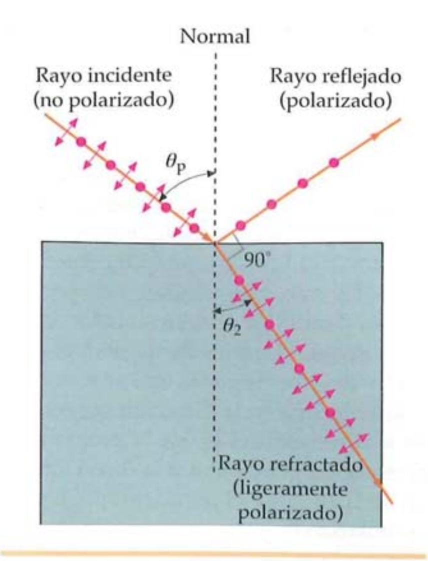


FIGURA 31.30 Polarización por reflexión. La onda incidente no está polarizada y tiene componentes del campo eléctrico paralelos al plano de incidencia (flechas) y componentes perpendiculares al mismo (puntos). Si la incidencia se realiza con el ángulo de polarización, la onda reflejada está completamente polarizada, con su campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

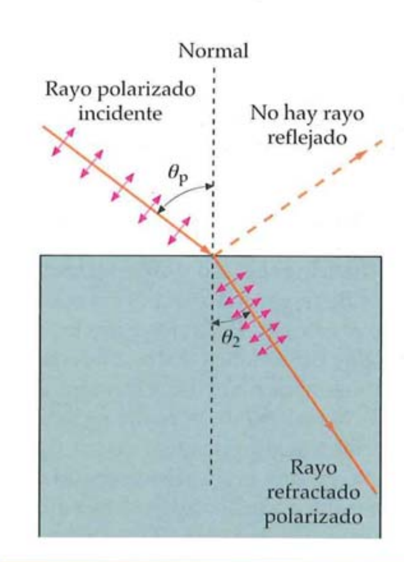


FIGURA 31.31 Luz polarizada incidiendo con el ángulo de polarización. Cuando la luz está polarizada de forma que $\vec{E}$ está en el plano de incidencia, no hay rayo reflejado.

Aunque la luz reflejada está completamente polarizada cuando el ángulo de incidencia es θ_p, la luz transmitida está sólo parcialmente polarizada, debido a que sólo se refleja una pequeña fracción de la luz incidente. Si la propia luz incidente está polarizada con su vector campo eléctrico contenido en el plano de incidencia, no existe ninguna luz reflejada cuando el ángulo de incidencia es θ_p. Podemos comprender el resultado cualitativamente a partir de la figura 31.31. Si consideramos las moléculas del segundo medio de modo que estén oscilando en la dirección del campo eléctrico del rayo refractado, no puede haber rayo reflejado porque en una antena dipolar eléctrica no se radia energía en la dirección de la línea de oscilación. (Cada una de las moléculas oscilantes es una pequeña antena dipolar eléctrica.)

Debido a la polarización de la luz reflejada, los cristales de gafas de sol hechos de material polarizante pueden ser muy eficaces para eliminar los deslumbramientos. Si la luz se refleja en una superficie horizontal, como un lago o la nieve del suelo, el campo eléctrico será predominantemente horizontal, mientras que el plano de incidencia (gafas) será predominantemente vertical. Los cristales polarizados con sus ejes de transmisión vertical reducirán entonces el deslumbramiento por absorber gran parte de la luz reflejada. Si se dispone de unas gafas de sol polarizadas, se podrá observar este fenómeno mirando a través de ellas a dicha luz reflejada y haciendo girar luego las gafas un ángulo de 90°, de modo que se verá cómo se transmite mucha más cantidad de luz.

POLARIZACIÓN POR DISPERSIÓN (O *SCATTERING*)

El fenómeno de absorción e irradiación subsiguiente se denomina **dispersión** o *scattering*. Puede comprobarse la existencia de la dispersión si se hace pasar un haz de luz a través de un recipiente con agua a la que se ha añadido una pequeña cantidad de leche en polvo. Las partículas de leche absorben la luz y la vuelven a radiar, haciendo visible el haz de luz. De forma análoga, pueden hacerse visibles los haces de láser introduciendo partículas de tiza o de humo en el aire para que dispersen la luz. Un ejemplo conocido de la dispersión de la luz es el de las moléculas del aire, que tienden a dispersar más las longitudes de onda cortas que las largas, dando así al cielo su color azul.

Podemos comprender la polarización por dispersión si consideramos a una molécula absorbente como una antena dipolar eléctrica que radia ondas con una intensidad máxima en la dirección perpendicular al eje de la antena y con intensidad cero en la dirección del eje de la propia antena. El vector campo eléctrico de la luz dispersada perpendicular a la dirección de propagación está contenido en el plano del eje de la antena y el punto campo. La figura 31.32 muestra un haz de luz inicialmente no polarizada que se mueve a lo largo del eje z y que incide sobre un centro de dispersión (una molécula por ejemplo) situado en el origen. El campo eléctrico del haz de luz tiene componentes en las dos direcciones x e y perpendiculares a la dirección de movimiento del haz de luz. Estos campos provocan oscilaciones de las cargas interiores a las moléculas en el plano $z = 0$, pero no aparece ninguna oscilación en la dirección z. Estas oscilaciones pueden considerarse como una superposición de una oscilación a lo largo del eje x y otra a lo largo del eje y, cada una de las cuales produce radiación dipolar. La oscilación en la dirección x no produce radiación a lo largo de la misma, lo que significa que la luz radiada en la dirección x es producto únicamente de la oscilación en la dirección y. Por lo tanto, la luz radiada en la dirección x está polarizada con su campo eléctrico paralelo al eje y. Como la elección de los ejes no tiene ninguna importancia en este razonamiento, el resultado puede generalizarse. Es decir, la luz dispersada en la dirección perpendicular al haz de luz incidente está polarizada con su campo eléctrico perpendicular tanto al haz incidente como a la dirección de propagación de la luz dispersada. Esto puede verse fácilmente examinando la luz dispersada mirándola a través de un trozo de película polarizadora.

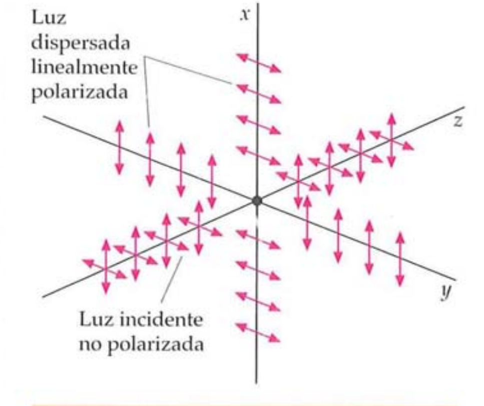
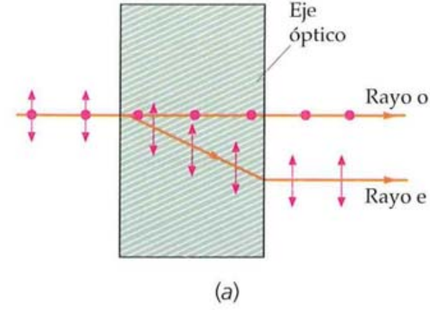


FIGURA 31.32 Polarización por dispersión. La luz no polarizada que se propaga en la dirección z incide sobre un centro de dispersión situado en el origen. La luz dispersada en el plano $z = 0$ a lo largo de la dirección x está polarizada en la dirección y, mientras que la dispersada en la dirección y está polarizada en la dirección x.

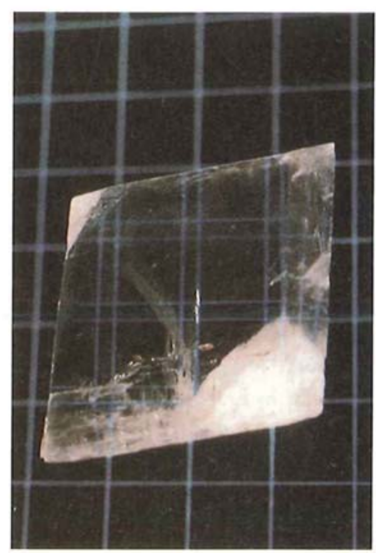
POLARIZACIÓN POR BIRREFRINGENCIA

La **birrefringencia**, o **doble refracción**, es un fenómeno complejo que se presenta en la calcita y otros cristales no cúbicos y en algunos plásticos sometidos a tensión como el celofán. En la mayoría de los materiales, la velocidad de la luz es la misma en todas direcciones. Estos materiales son **isótropos**. Debido a su estructura atómica, los materiales birrefringentes son **anisótropos**. La velocidad de la luz depende del plano de la polarización y de su dirección de propagación a través del material. Cuando un rayo de luz está incidiendo sobre estos materiales, puede separarse en dos rayos denominados *rayo ordinario* y *rayo extraordinario*. Estos rayos están polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares y se propagan con diferentes velocidades. Dependiendo de la orientación relativa del material y de la luz incidente, los rayos pueden propagarse también en direcciones diferentes.

Existe una dirección particular en un material birrefringente en que ambos rayos se propagan con la misma velocidad. Esta dirección se denomina **eje óptico** del material. (Este eje óptico es más bien una dirección y no una recta en el material.) Cuando la luz se propaga a lo largo del eje óptico, no ocurre nada inusual. Sin embargo, cuando la luz está incidiendo en ángulo con respecto al eje óptico como se ve en la figura 31.33, los rayos se propagan en distintas direcciones y emergen



(*a*)



(*b*)

FIGURA 31.33 (*a*) Un haz estrecho de luz que incide sobre un cristal birrefringente como la calcita se divide en dos haces, denominados rayo ordinario (rayo o) y rayo extraordinario (rayo e), con polarizaciones mutuamente perpendiculares. Si se hace girar el cristal, el rayo extraordinario gira en el espacio. (*b*) Imagen doble del cuadriculado del fondo producido por este cristal birrefringente de carbonato cálcico. (*Fotografías de Pau Silverman.*)

separados en el espacio. Si se hace girar el material, el rayo extraordinario (el rayo e en la figura) gira en el espacio respecto del rayo ordinario (rayo o).

Si la luz está incidiendo sobre una lámina birrefringente de forma perpendicular a su cara cristalina y perpendicular al eje óptico, los dos rayos se propagan en la misma dirección, pero con velocidades diferentes. El número de longitudes de onda de los dos rayos contenidos en la lámina es diferente porque las longitudes de onda ($\lambda = v/f$) de ambos difieren entre sí. Los rayos emergen con una diferencia de fase que depende del espesor de la lámina y de la longitud de onda de la luz incidente. En una **lámina de cuarto de onda**, el espesor es tal que existe una diferencia de fase de 90° entre las ondas de una longitud de onda determinada cuando emergen, mientras que en las **láminas de media onda**, al emerger los rayos poseen una diferencia de fase de 180°.

Supongamos que la luz incidente está polarizada linealmente de forma que el vector campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje óptico, como se indica en la figura 31.34. Los rayos ordinario y extraordinario parten en fase y tienen amplitudes iguales. En el caso de una lámina de cuarto de onda, las ondas emergen con una diferencia de fase de 90°, de modo que el campo eléctrico resultante tiene componentes $E_x = E_0$ sen ωt y $E_y = E_0$ sen $(\omega t + 90°) = E_0 \cos \omega t$. Por lo tanto, el vector campo eléctrico rota barriendo un círculo y la onda está **polarizada circularmente**.

Con una lámina de media onda, las ondas emergen con una diferencia de fase de 180°, de modo que el campo eléctrico resultante está polarizado linealmente con componentes $E_x = E_0$ sen ωt y $E_y = E_0$ sen $(\omega t + 180°) = -E_0$ sen ωt. El efecto neto es que la dirección de polarización de la onda ha girado en 90° respecto a la de la luz incidente, como se ve en la figura 31.35.

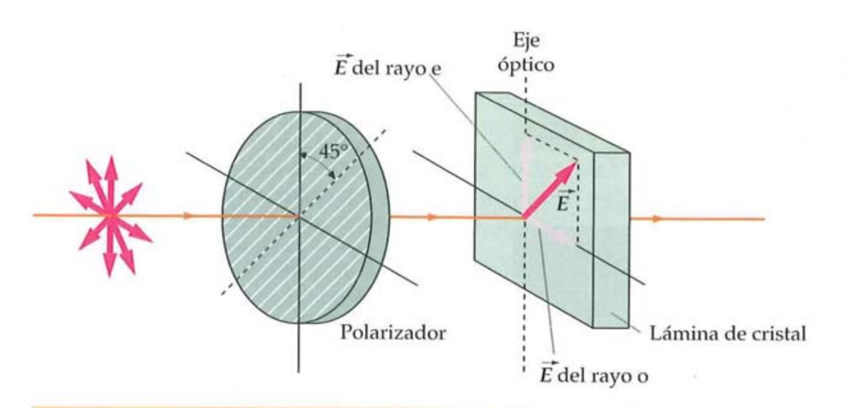


FIGURA 31.34 Luz polarizada que emerge de un polarizador y que incide sobre un cristal birrefringente de tal forma que el vector de campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje óptico, que es perpendicular al haz luminoso. Los rayos ordinario y extraordinario se mueven en la misma dirección, pero con diferentes velocidades. La polarización del rayo emergente depende del espesor del cristal y de la longitud de onda de la luz.

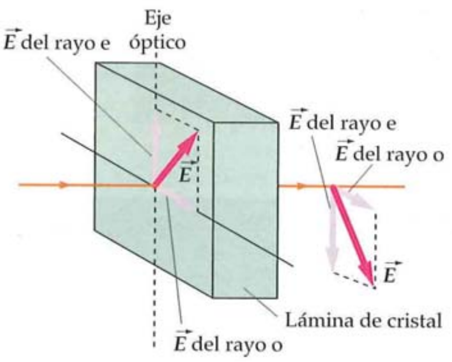
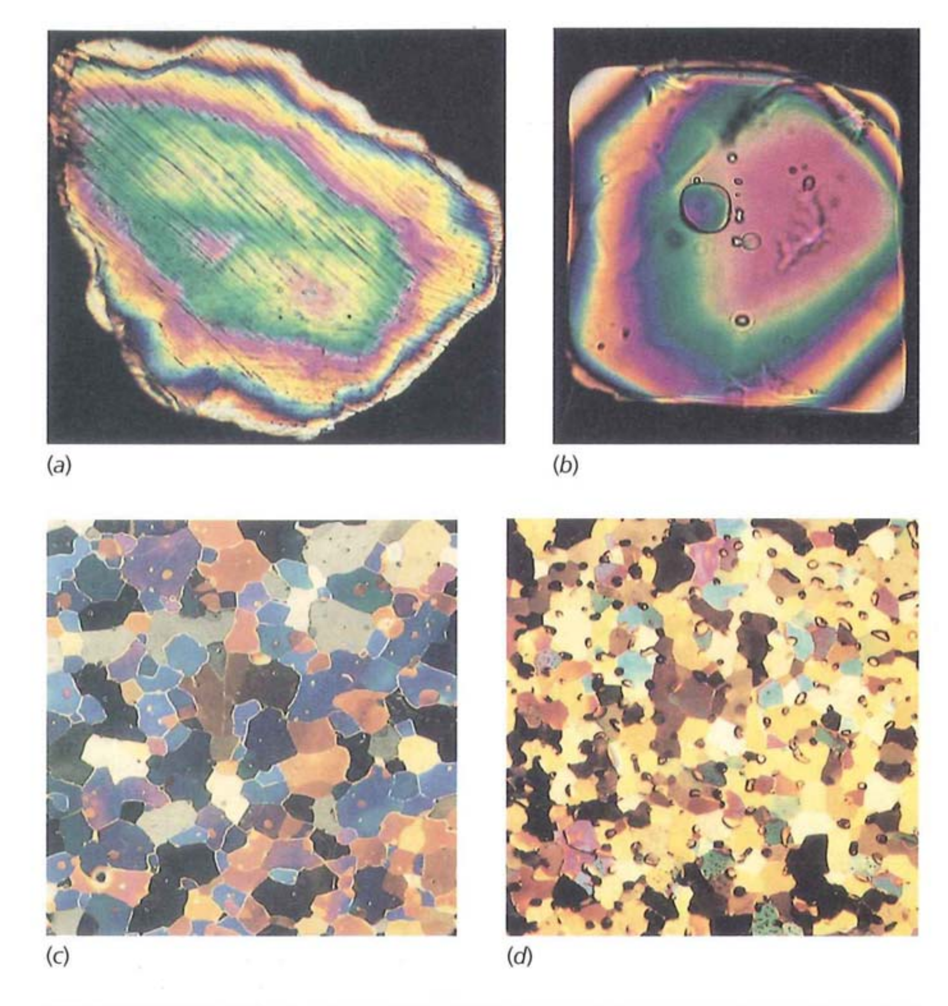
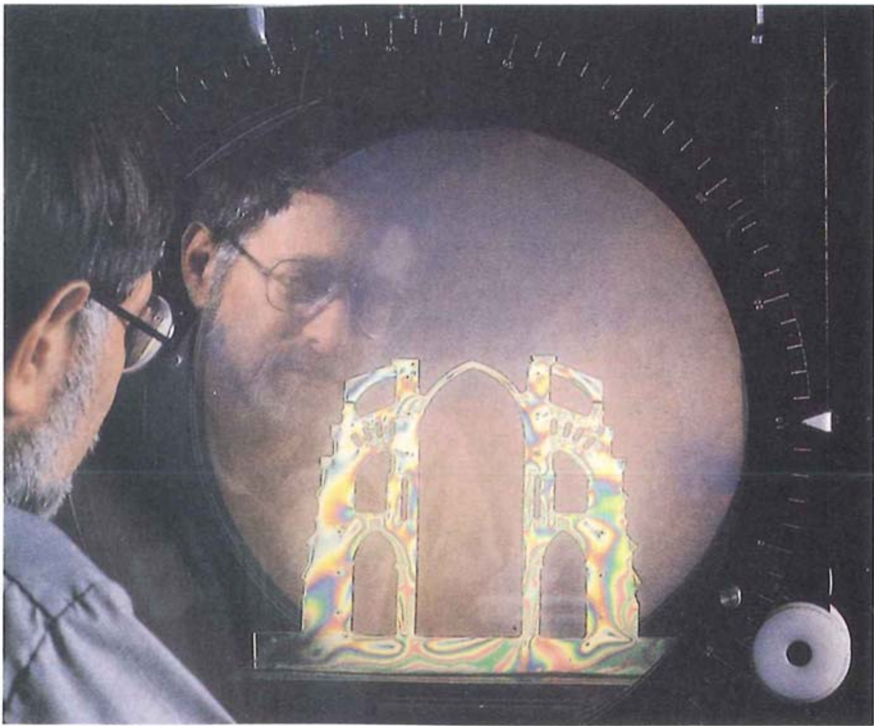


FIGURA 31.35 Si el cristal birrefringente de la figura 31.34 es una lámina de media onda, y si el vector eléctrico de la luz incidente forma un ángulo de 45° con el eje óptico, la luz emergente tiene girada su dirección de polarización en 90°.

Pueden observarse interesantes y bellos diagramas, colocando materiales birrefringentes, como el celofán o un trozo de plástico sometido a tensión, entre dos láminas polarizadoras que tengan sus ejes de transmisión perpendiculares entre sí. Normalmente, no se transmite nada de luz a través de láminas polarizadoras cruzadas. Sin embargo, si colocamos un material birrefringente entre láminas polarizadoras cruzadas, el material actúa como una lámina de media onda para la luz de un determinado color, dependiendo del espesor del material. La dirección de polarización resulta girada y cierta cantidad de luz atraviesa ambas láminas. Cuando se someten a tensiones, diversos vidrios y plásticos resultan birrefringentes. De esta forma, podemos observar el diagrama de tensiones cuando se coloca el material entre láminas polarizadoras cruzadas.



(a) (b) (c) (d)



(e)

Cuando los ejes de transmisión de dos películas polarizadoras son perpendiculares, se dice que ambos están cruzados y no se transmite luz a través suyo. Sin embargo, muchos materiales son birrefringentes o se vuelven así bajo tensión. Estos materiales giran la dirección de polarización de la luz de modo que la luz de una longitud de onda particular se transmite a través de ambos polarizadores. Cuando se observa un material birrefringente situado entre polarizadores cruzados, se obtiene cierta información acerca de sus estructura interna. (*a*) Corte fino de un grano de cuarzo procedente de un cráter creado por un meteorito. La estructura en capas, evidenciada por las líneas paralelas, se debe al fuerte golpe recibido durante el impacto del meteorito. (*b*) Grano de cuarzo típico de los que se encuentran en rocas volcánicas silíceas. No se ven líneas originadas por choques. (*c*) Cortes delgados de un núcleo de hielo procedente del manto de hielo antártico donde se revela la existencia de burbujas de CO_2 atrapadas, que aparecen de color ámbar. Esta muestra se tomó a una profundidad de 194 metros, correspondiente a aire atrapado hace 1600 años, mientras que en (*d*) se tomó a una profundidad de sólo 56 metros, correspondiente a aire atrapado hace 450 años. Las medidas en el núcleo de hielo han sustituido la técnica menos fiable de analizar el carbono que aparece en los anillos de los árboles para comparar los niveles actuales de CO_2 atmosférico con los del pasado reciente. (*e*) Robert Mark de la Escuela de Arquitectura de Princenton examina los esquemas de tensiones que aparecen en un modelo de plástico de la estructura de la nave de la Catedral de Chartres. *((a, b) Glen A. Izett Informe Geológico US, (c, d) Dr Antony J Gow/ Laboratorio de Investigación e Ingeniería de Regiones Frías.)*

31.5 DEDUCCIÓN DE LAS LEYES DE REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Las leyes de reflexión y refracción pueden deducirse mediante el principio de Huygens o mediante el principio de Fermat.

PRINCIPIO DE HUYGENS

Reflexión La figura 31.36 muestra un frente de onda plano *AA'* que incide sobre un espejo en el punto *A*. Como puede verse en la figura, el ángulo ϕ_1 que forma el frente de onda con el espejo es igual al ángulo de incidencia θ_1, que es el ángulo que forma la perpendicular al espejo y los rayos (que son perpendiculares al frente de onda). De acuerdo con el principio de Huygens, cada punto de un frente de onda puede considerarse como un foco puntual de ondas elementales secundarias. La posición del frente de onda al cabo de un tiempo *t* se determina dibujando las ondas elementales de radio *ct* con centros en el frente de onda *AA'*. Las ondas elementales que aún no han incidido en el espejo forman la parte *BB'* del nuevo frente de onda. Las ondas elementales que ya han incidido en el espejo se reflejan y forman la parte *BB''* del nuevo frente de onda. Mediante una construcción semejante, se obtiene el frente de onda *C''C* a partir de las ondas elementales de Huygens que se originan en el frente de onda *B''B*. La figura 31.37 es una parte aumentada de la figura 31.36 en la que se muestra *AP*, que es parte del frente de onda original. Durante el tiempo *t*, la onda elemental procedente del punto *P* alcanza al espejo en el punto *B* y la onda elemental procedente del punto *A* alcanza el punto *B''*. El frente de onda reflejado *BB''* forma un ángulo con el espejo que es igual al ángulo de reflexión entre el rayo reflejado y la normal al espejo. Los triángulos *ABP* y *BAB''*, son ambos triángulos rectángulos con la hipotenusa común *AB* y los catetos iguales $AB'' = BP = ct$. De aquí que estos triángulos sean semejantes y que los ángulos ϕ_1 y ϕ_1' sean iguales, lo cual implica que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia θ_1 (ley de la reflexión).

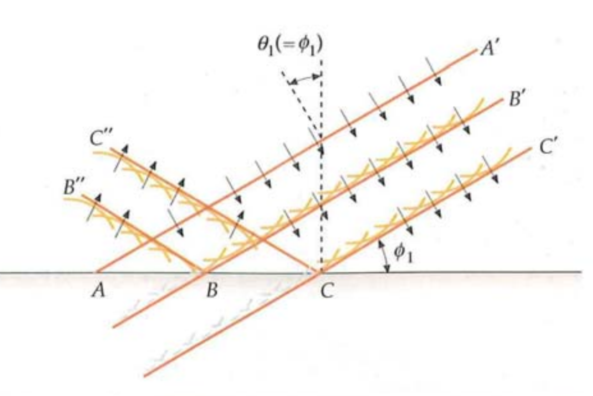


FIGURA 31.36 Onda plana reflejada en un espejo plano. El ángulo θ_1 entre el rayo incidente y la normal al espejo es el ángulo de incidencia. Es igual al ángulo ϕ_1 que forma el frente de onda incidente con el espejo.

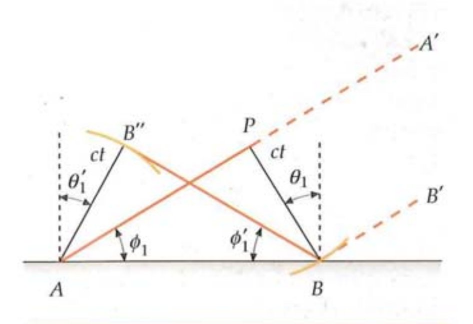


FIGURA 31.37 Geometría del principio de Huygens para el cálculo de la ley de la reflexión. El frente de onda *AP* incide inicialmente en el espejo en el punto *A*. Después de un tiempo *t*, la onda secundaria de Huygens procedente de *P* incide en el espejo en el punto *B* y la de *A* alcanza el punto *B''*.

Refracción La figura 31.38 muestra una onda plana que incide sobre una superficie plana aire-vidrio. Apliquemos el principio de Huygens para hallar el frente de onda de la onda transmitida. El segmento *AP* indica una porción del frente de onda en el medio 1 que incide sobre la superficie de vidrio con un ángulo de incidencia ϕ_1. En el instante *t*, la onda elemental procedente de *P* recorre la distancia v_1t y alcanza el punto *B* sobre la línea *AB* que separa ambos medios, mientras que la onda elemental procedente del punto *A* recorre una distancia menor v_2t dentro del segundo medio. El nuevo frente de onda *BB'* no es paralelo al frente de onda original *AP* porque son diferentes las velocidades v_1 y v_2. Del triángulo *APB*,

$$\operatorname{sen}\phi_1 = \frac{v_1t}{AB}$$

o bien

$$AB = \frac{v_1t}{\operatorname{sen}\phi_1} = \frac{v_1t}{\operatorname{sen}\theta_1}$$

dado que, como se ve en la figura 31.38, el ángulo ϕ_1 es igual al de incidencia θ_1. Análogamente, según el triángulo *AB'B*,

$$\operatorname{sen}\phi_2 = \frac{v_2t}{AB}$$

o bien

$$AB = \frac{v_2t}{\operatorname{sen}\phi_2} = \frac{v_2t}{\operatorname{sen}\theta_2}$$

donde $\theta_2 = \phi_2$ es el ángulo de refracción. Igualando los dos valores obtenidos para *AB*, se tiene

$$\frac{1}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2 \qquad 31.18$$

Si en esta ecuación reemplazamos $v_1 \times c/n_1$ y $v_2 \times c/n_2$ y multiplicamos ambos lados de la ecuación por *c*, obtenemos $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$, que es la ley de Snell.

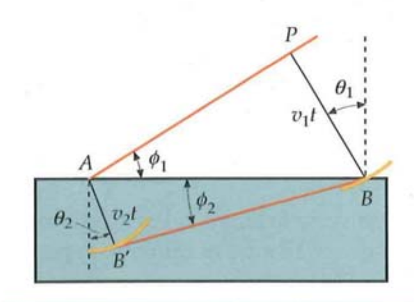


FIGURA 31.38 Aplicación del principio de Huygens a la refracción de ondas planas en la superficie que separa un medio en el que la velocidad de la onda es v_1, de otro medio en el que la velocidad es v_2, inferior a v_1. El ángulo de refracción θ_2 en este caso es menor que el de incidencia θ_1.

PRINCIPIO DE FERMAT

Reflexión La figura 31.39 muestra dos trayectorias en las cuales la luz sale del punto A, choca contra la superficie plana, que podemos considerar como un espejo, y se propaga hasta el punto B. El problema para la aplicación del principio de Fermat a la reflexión puede plantearse del modo siguiente: ¿en qué punto P de la figura debe incidir la luz sobre el espejo de forma que el recorrido entre los puntos A y B se realice en el menor tiempo posible? Como en este problema la luz se está moviendo siempre dentro del mismo medio, el tiempo será mínimo cuando la distancia sea mínima. En la figura 31.39, la distancia APB es la misma que la distancia $A'PB$, donde el punto A' está sobre la perpendicular al espejo trazada desde A equidistante del espejo y detrás de éste. Evidentemente, si variamos el punto P, la distancia $A'PB$ es mínima cuando los puntos A', P y B están en línea recta. En la figura se ve fácilmente que esto ocurre cuando el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

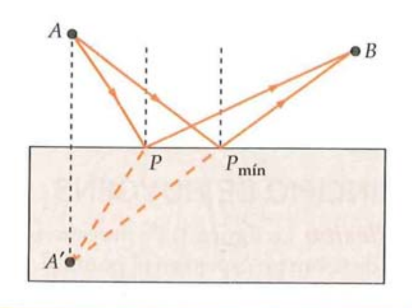


FIGURA 31.39 Construcción geométrica para la deducción de la ley de la reflexión a partir del principio de Fermat. El tiempo que tarda la luz en ir del punto A al punto B es un mínimo cuando la luz incide en un punto $P_{mín}$ de la superficie.

Refracción La deducción de la ley de Snell de la refracción utilizando el principio de Fermat es más complicada que la de la ley de la reflexión. En la figura 31.40 se ven los trayectos posibles para que la luz se propague desde el punto A en el aire hasta el punto B en el vidrio. El punto P_1 está sobre la recta que une A y B, pero este trayecto no corresponde al menor tiempo de recorrido porque la luz se mueve con menor velocidad en el vidrio. Si nos desplazamos ligeramente a la derecha de P_1, la longitud del trayecto total es mayor, pero la distancia recorrida en el medio donde la velocidad es más baja es inferior a la que se recorría en el trayecto que pasaba por P_1. Parece difícil identificar en la figura cuál de los trayectos posibles es el de tiempo mínimo, pero no resulta sorprendente que un trayecto que esté ligeramente a la derecha del camino rectilíneo emplee menos tiempo, porque el tiempo que se gana al recorrer una distancia más corta en el vidrio compensa sobradamente el tiempo perdido al recorrer una distancia mayor en el aire. Así, cuando desplazamos el punto de intersección de la posible trayectoria a la derecha del punto P_1, disminuye el tiempo total empleado en ir de A a B hasta que se alcanza un mínimo en el punto $P_{mín}$. Más allá de este punto, el tiempo ahorrado en recorrer una distancia más corta en el vidrio ya no compensa el tiempo adicional que se necesita emplear en la mayor distancia recorrida en el aire.

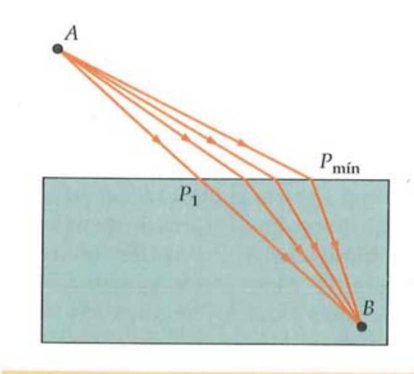


FIGURA 31.40 Construcción geométrica para la obtención de la ley de Snell de la refracción mediante el principio de Fermat. El punto $P_{mín}$ es el punto en que debe incidir la luz sobre el vidrio para que el tiempo de propagación desde A hasta B sea mínimo.

La figura 31.41 indica la geometría que sirve para determinar el trayecto de mínimo tiempo. Si la distancia recorrida en el medio 1 (con índice de refracción n_1) es L_1 y la recorrida en el medio 2 (con índice de refracción n_2) es L_2, el tiempo que tarda la luz en recorrer el trayecto total AB es

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_1}{c/n_1} + \frac{L_2}{c/n_2} = \frac{n_1 L_1}{c} + \frac{n_2 L_2}{c} \qquad 31.19$$

Queremos hallar el punto $P_{mín}$ para el cual el tiempo es mínimo. Para ello expresaremos el tiempo en función de un solo parámetro x que indique la posición de dicho punto $P_{mín}$. En función de la distancia x:

$$L_1^2 = a^2 + x^2 \quad \text{y} \quad L_2^2 = b^2 + (d - x)^2 \qquad 31.20$$

Puede verse la curva del tiempo t en función de x en la figura 31.42. Para el valor de x en que el tiempo es mínimo, la pendiente de esta curva es cero:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Derivando cada término de la ecuación 31.20 respecto a x e igualando el resultado a cero, se obtiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\left(n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx}\right) = 0 \qquad 31.21$$

Estas derivadas pueden calcularse mediante las ecuaciones 31.20. En efecto:

$$2L_1 \frac{dL_1}{dx} = 2x \quad \text{o} \quad \frac{dL_1}{dx} = \frac{x}{L_1}$$

Pero x/L_1 es precisamente el sen θ_1, siendo θ_1 el ángulo de incidencia. Por lo tanto,

$$\frac{dL_1}{dx} = \operatorname{sen}\theta_1 \qquad 31.22$$

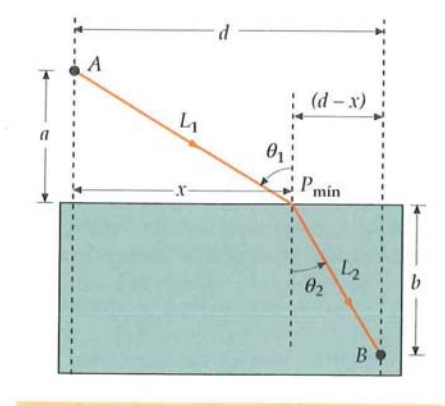


FIGURA 31.41 Construcción geométrica para calcular el tiempo mínimo en la deducción de la ley de Snell a partir del principio de Fermat.

Análogamente,

$$2L_2\frac{dL_2}{dx} = 2(d - x)(-1)$$

o bien

$$\frac{dL_2}{dx} = -\frac{d - x}{L_2} = -\operatorname{sen}\theta_2 \qquad 31.23$$

siendo θ_2 el ángulo de refracción. De aquí que la ecuación 31.21 sea

$$n_1\frac{dL_1}{dx} + n_2\frac{dL_2}{dx} = 0 \qquad 31.24$$

Sustituyendo dL_1/dx y dL_2/dx por los resultados de las ecuaciones 31.22 y 31.23, se obtiene

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 + n_2(-\operatorname{sen}\theta_2) = 0$$

o sea,

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

que es la ley de Snell.

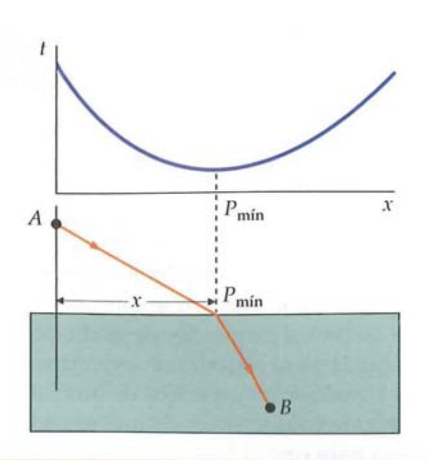


FIGURA 31.42 Representación gráfica del tiempo que emplea la luz para ir desde A hasta B en función de x, longitud medida a lo largo de la superficie refractante. El tiempo es un mínimo en el punto en que los ángulos de incidencia y de refracción obedecen la ley de Snell.

31.6 DUALIDAD ONDA-PARTÍCULA

La naturaleza ondulatoria de la luz fue demostrada por vez primera por Thomas Young, al observar el diagrama de interferencia de dos fuentes luminosas coherentes producidas al iluminar un par de rendijas paralelas y estrechas con una sola fuente. (En la sección 3 del capítulo 33, se presenta el experimento de Young.) La teoría ondulatoria de la luz culminó en 1860 con las predicciones de Maxwell sobre las ondas electromagnéticas. La naturaleza corpuscular de la luz fue definitivamente propuesta por Albert Einstein en 1905 al explicar el efecto fotoeléctrico. Un corpúsculo luminoso o **fotón** posee una energía E relacionada con la frecuencia f y la longitud de onda λ de la onda luminosa por la ecuación de Einstein

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad 31.25$$

ECUACIÓN DE EINSTEIN PARA LA ENERGÍA DEL FOTÓN

donde c es la velocidad de la luz y h la constante de Planck:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} = 4{,}136 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV\cdot s}$$

Frecuentemente, las energías se expresan en electronvolts y las longitudes de onda en nanómetros. Por ello, es conveniente expresar el producto hc en eV · nm. Así, tenemos

$$hc = (4{,}1357 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV\cdot s})(2{,}9979 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}) = 1{,}2398 \times 10^{-6}\ \mathrm{eV\cdot m}$$

o también

$$hc = 1240\ \mathrm{eV\cdot nm} \qquad 31.26$$

La forma en que se produce la propagación de la luz se explica por sus propiedades ondulatorias, mientras que el intercambio de energía entre luz y materia viene determinado por sus propiedades corpusculares. Esta dualidad onda-partícula es una propiedad general de la naturaleza. Así, los electrones (y otras "partículas") también se propagan como ondas, pero cuando intecambian energía entre sí, o con otras partículas, lo hacen como partículas.

* El efecto fotoeléctrico se trata en el capítulo 34.

31.7 ESPECTROS DE LUZ

Newton fue el primero en darse cuenta que la luz blanca es una mezcla de luz de todos los colores de, aproximadamente, igual intensidad. Para ello, hizo pasar un rayo de luz solar a través de un prisma de vidrio y observó el espectro de la luz refractada (figura 31.43). Como el ángulo de refracción de un prisma de vidrio depende ligeramente de la longitud de onda, el haz refractado se difunde en el espacio separándose sus colores o longitudes de onda, como en el arco iris. En la figura 31.44 se muestra un espectroscopio, que es un aparato para analizar los espectros de una fuente luminosa. La luz de la fuente pasa a través de una estrecha ranura, atraviesa una lente para que el haz sea paralelo, e incide sobre un prisma de vidrio, donde se refracta dos veces (una vez cuando entra y otra cuando sale del vidrio). El haz refractado se observa con un telescopio, el cual se monta sobre una plataforma rotatoria, de modo que el ángulo del haz refractado, dependiente de su longitud de onda, pueda medirse. Así, el espectro de la fuente luminosa puede analizarse en función de sus longitudes de onda componentes. Como el espectro de la luz solar contiene una gama continua de longitudes de onda, se dice que es un **espectro continuo**. La luz emitida por los átomos de los gases a baja presión, como los átomos de mercurio en una fuente fluorescente, contiene sólo una serie discreta de longitudes de onda. Cada longitud de onda emitida por la fuente produce una imagen separada de la rendija de colimación del espectroscopio. Tal espectro se llama **espectro de rayas** (o de líneas). En la fotografía que se adjunta se muestran el espectro visible continuo y los espectros de rayas (o líneas espectrales) de varios elementos.

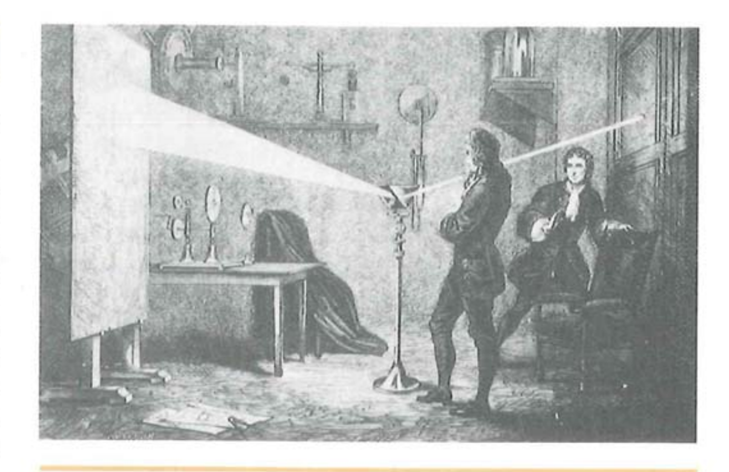


FIGURA 31.43 Newton demostrando el espectro de la luz solar mediante un prisma de vidrio. *(Corbis/Bettmann.)*

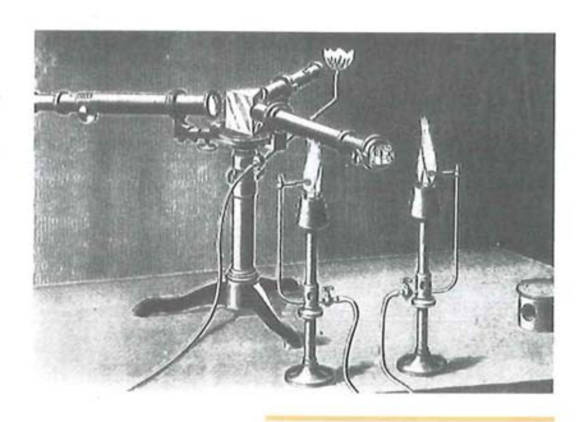
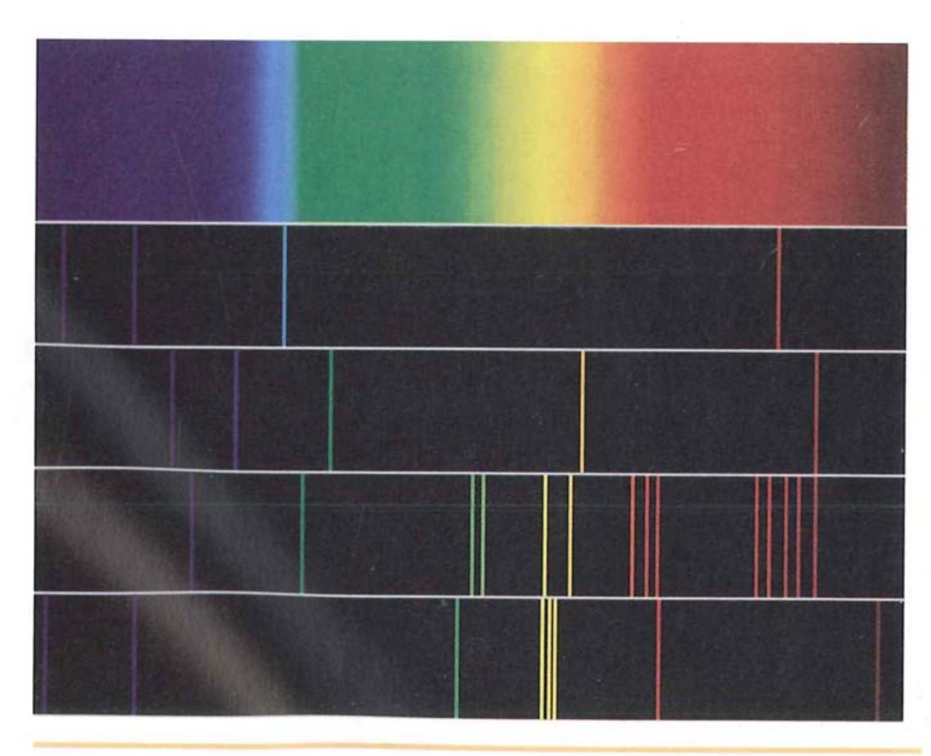


FIGURA 31.44 Espectroscopio de finales del siglo XIX que perteneció a Gustave Kirchhoff. Los espectroscopios modernos para estudiantes suelen tener básicamente el mismo diseño. *(Corbis/Bettmann.)*



Espectro visible continuo (arriba) y líneas espectrales del hidrógeno, helio, bario y mercurio (de arriba a abajo). *(Diversos espectros por Eastman Kodak y la Wabash Instrument corporation.)*

* 31.8 FUENTES LUMINOSAS

LÍNEAS ESPECTRALES

Las fuentes más comunes de luz visible son las transiciones de los electrones externos que tienen lugar en los átomos. Normalmente, un átomo se encuentra en el estado fundamental con sus electrones en sus niveles energéticos permitidos más bajos, lo cual es compatible con el principio de exclusión. (Este principio, enunciado por Wolfgang Pauli en 1925 para explicar la estructura electrónica de los átomos, establece que dos electrones en un átomo no pueden encontrarse en el mismo estado cuántico.) Los electrones de baja energía están más próximos al núcleo y altamente ligados, formando un núcleo más interno estable. El electrón o los dos electrones de los estados de mayor energía se encuentran mucho más lejos del núcleo y son más fácilmente excitados para ocupar los estados energéticos vacantes más elevados. Estos electrones más externos son los responsables de los cambios energéticos del átomo que se producen en la emisión o absorción de luz visible.

Cuando un átomo choca con otro átomo o con un electrón libre, o cuando absorbe energía electromagnética, los electrones externos pueden excitarse a estados energéticos más elevados. Después de aproximadamente 10 ns (1 ns $= 10^{-9}$ s), estos electrones externos verifican espontáneamente transiciones a estados de menor energía con la emisión de un fotón. Este proceso, llamado **emisión espontánea**, es aleatorio; los fotones emitidos por dos átomos diferentes no tienen entre sí ninguna correlación. Por lo tanto, la luz emitida no es coherente. De acuerdo con el principio de conservación energética, la energía del fotón emitido es la diferencia $|\Delta E|$ entre las energías de los estados inicial y final. La frecuencia de la onda luminosa está relacionada con la energía por la ecuación de Einstein, $|\Delta E| = hf$. La longitud de onda de la luz emitida es, por lo tanto,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{|\Delta E|} \qquad 31.27$$

Las energías de los fotones correspondientes a las longitudes de onda más corta (400 nm) y más larga (700 nm) del espectro visible son

$$E_{400\,\text{nm}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{400\ \text{nm}} = 3{,}10\ \text{eV} \qquad 31.28a$$

y

$$E_{700\,\text{nm}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{700\ \text{nm}} = 1{,}77\ \text{eV} \qquad 31.28b$$

Como los niveles energéticos de los átomos forman una serie discreta, los espectros de luz procedentes de los átomos aislados o átomos en gases a baja presión constan de una serie de líneas discretas y definidas que son características del elemento. Estas líneas están algo ensanchadas por los desplazamientos Doppler debidos al movimiento relativo del átomo respecto al observador y por las colisiones con otros átomos, pero, en general, si la densidad es suficientemente baja, las líneas espectrales son estrechas y están bien separadas unas de otras. El estudio de las líneas espectrales del hidrógeno y otros átomos condujeron a la primera comprensión de los niveles energéticos de los átomos.

Espectros continuos Cuando los átomos están próximos entre sí e interaccionan fuertemente, como ocurre en los líquidos y sólidos, los niveles energéticos de los átomos individuales se dispersan en bandas energéticas, dando lugar a bandas esencialmente continuas de niveles energéticos. Cuando las bandas se solapan, lo cual es frecuente, se forma un espectro continuo de energías posibles y un espectro de emisión continua. En un material incandescente, tal como un filamento metálico al rojo, los electrones se aceleran en todas direcciones por colisiones frecuentes dando lugar a un espectro amplio de radiación térmica. La potencia radiante en este caso es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.* La radiación

* Esta propiedad se conoce como ley de Stefan-Boltzmann. Esta y otras propiedades de la radiación térmica, como la ley del desplazamiento de Wien fueron tratadas más ampliamente en la sección 20.4.

emitida por un cuerpo a temperaturas inferiores a 600 °C está concentrada en la zona del infrarrojo y, por lo tanto, no es visible. A medida que un objeto se calienta, la energía radiada tiene longitudes de onda cada vez más cortas. Entre unos 600 °C y 700 °C, una parte importante de la energía radiada corresponde al espectro visible y el cuerpo resplandece con un color rojo oscuro. Si la temperatura sigue aumentando, el cuerpo toma un aspecto rojo brillante y, por último, blanco. La longitud de onda, λ_{pico}, para la cual la potencia es un máximo varía en razón inversa con la temperatura, resultado que se conoce como ley del desplazamiento de Wien. La superficie del Sol a $T = 6000$ K emite un espectro continuo de intensidad aproximadamente constante en el intervalo de longitudes visibles por el ojo humano.

ABSORCIÓN, DISPERSIÓN, EMISIÓN ESPONTÁNEA Y EMISIÓN ESTIMULADA

La radiación se emite al verificarse la transición de un átomo desde un estado excitado a otro de menor energía; la radiación se absorbe cuando la transición de un átomo tiene lugar entre un estado a otro de mayor energía. Cuando los átomos se irradian con un espectro de radiación continuo, el espectro transmitido muestra rayas oscuras correspondientes a la absorción de la luz de determinadas longitudes de onda. Los espectros atómicos de absorción fueron los primeros espectros de rayas observados. Como los átomos y moléculas a temperaturas normales se encuentran en sus estados fundamentales o en estados excitados de bajo nivel, sólo se observan transiciones desde el estado fundamental (o desde un estado próximo a éste) a estados más excitados. Por este motivo, normalmente los espectros de absorción presentan menos líneas que los de emisión.

La figura 31.45 ilustra diversos fenómenos interesantes que pueden ocurrir cuando un fotón incide sobre un átomo. En la figura 31.3*a*, la energía del fotón incidente es demasiado pequeña para que el átomo pase a un estado excitado; el átomo permanece en su estado fundamental y se dice que el fotón se ha dispersado. Como los fotones incidentes y los fotones salientes (dispersados) tienen la misma energía, se dice que la dispersión es elástica. Si la longitud de onda de la luz incidente es grande comparada con el tamaño del átomo, la dispersión puede describirse en función de la teoría electromagnética clásica y se llama **dispersión Rayleigh**, en honor a Lord Rayleigh, quien desarrolló en 1871 los aspectos teóricos de este fenómeno. La probabilidad de que se verifique la dispersión Rayleigh varía como $1/\lambda^4$. Esto significa que la luz azul se dispersa mucho más fácilmente que la luz roja, lo que explica el color azulado del cielo. La separación de la luz azul por dispersión Rayleigh explica también el color rojizo de la luz transmitida en las puestas de sol.

La **dispersión inelástica**, también llamada **dispersión de Raman**, se produce cuando se absorbe un fotón que tiene justo la energía necesaria para que la molécula experimente una transición hacia un estado más energético. Después, al realizar una transición hacia un estado de menor energía, la molécula emite un fotón cuya energía es distinta a la del fotón incidente. Si la energía del fotón dispersado hf' es menor que la del fotón incidente hf (figura 31.45*b*), se trata de una dispersión de Stokes-Raman, y si es mayor, (figura 31.45*c*) la llamamos **dispersión anti-Stokes-Raman**.

En la figura 31.45*d*, la energía del fotón incidente es justamente igual a la diferencia de energía entre el estado inicial y un estado más excitado. El átomo absorbe el fotón y realiza una transición a este estado más excitado en un proceso denominado **absorción por resonancia** (o absorción resonante).

En la figura 31.45*e*, un átomo que se halla en un estado excitado experimenta espontáneamente una transición hacia un estado menos energético en un proceso llamado **emisión espontánea**. A menudo, dicho átomo realiza varias transiciones hasta estados intermedios antes de alcanzar el estado fundamental. Así ocurre, por ejemplo, cuando un átomo se excita por luz ultravioleta y emite luz visible al volver al estado fundamental mediante transiciones múltiples. Este proceso, conocido como **fluorescencia**, es el que se da en la lámina fina que reviste el interior de los tubos de las lámparas fluorescentes. Como la vida media de un estado atómico excitado típico es del orden de 10 ns, este proceso parece que ocurra espontáneamente. Sin embargo, algunos estados excitados tienen vidas medias mucho más largas, del orden de milise-

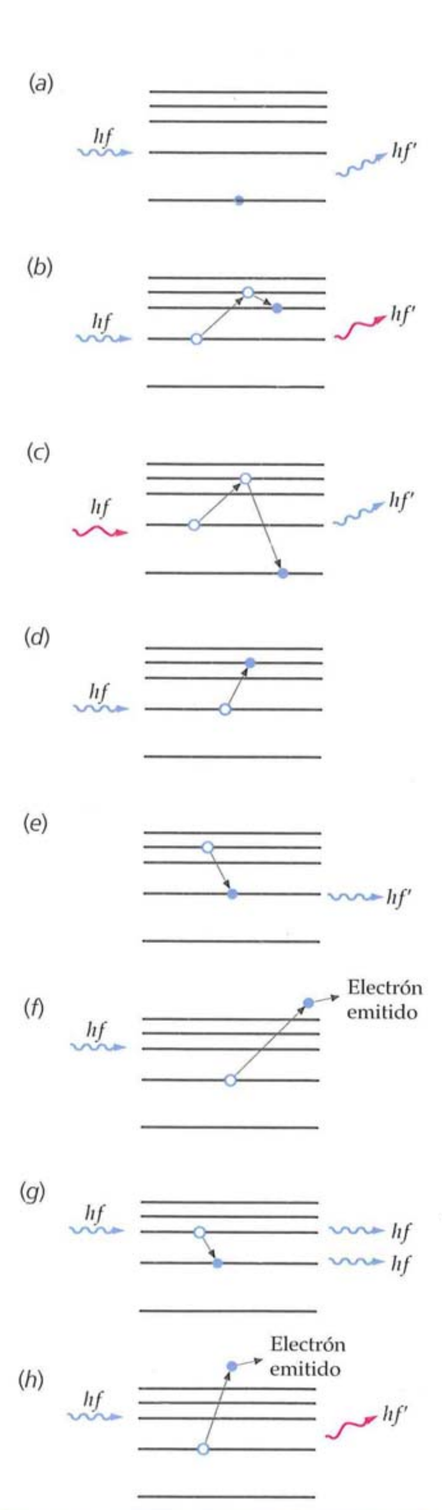


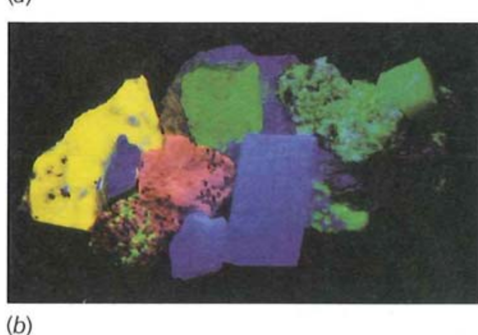
FIGURA 31.45 Interacciones fotón-átomo y fotón-molécula. (*a*) Dispersión elástica. (*b*) Dispersión de Stokes-Raman. (*c*) Dispersión anti-Stokes-Raman. (*d*) Absorción resonante. (*e*) Emisión espontánea. (*f*) Efecto fotoeléctrico. (*g*) Emisión estimulada. (*h*) Dispersión de Compton.

gundos y, ocasionalmente, de segundos o incluso minutos. Este estado se denomina **estado metaestable**. Los **materiales fosforescentes** son aquellos que tienen estados metaestables de vida muy larga, es decir, emiten luz mucho después de la excitación original.

La figura 31.45*f* ilustra el efecto fotoeléctrico, en el cual la absorción del fotón ioniza el átomo causando la emisión de un electrón. La figura 31.45*g* ilustra la **emisión estimulada**. Este proceso tiene lugar cuando el átomo o molécula está inicialmente en un estado excitado de energía E_H y la energía del fotón incidente es igual a $E_H - E_L$, siendo E_L la energía de un estado inferior. En este caso, el campo electromagnético oscilante asociado al fotón incidente estimula al átomo o molécula excitado, el cual emite un fotón en la misma dirección que el fotón incidente y en fase con él. Los fotones de los átomos o moléculas estimulados pueden estimular a su vez la emisión de otros fotones, que se propagan en la misma dirección y con la misma fase. Este proceso amplifica el fotón emitido inicialmente, dando lugar a un haz de luz que se origina a partir de átomos distintos, pero que es coherente. En consecuencia, puede observarse la interferencia de la luz procedente de un gran número de diferentes átomos.



(*a*)



(*b*)

(*c*)

Colección de minerales en (*a*) a la luz del día y (*b*) a la luz ultravioleta (a veces llamada luz negra). En (*c*) se identifican los minerales mediante un número: 1, powellita; 2, willemita; 3, scheelita; 4, calcita; 5, calcita y willemita compuesta; 6, calcita óptica; 7, willemita; y 8, ópalo. El cambio de color es debido a la fluorescencia de los minerales bajo la luz ultravioleta. En la calcita óptica se presentan tanto la fluorescencia como la fosforescencia. (*Paul Silverman/Fundamental Photographs.*)

La figura 31.45*h* ilustra la **dispersión Compton**, que tiene lugar cuando la energía del fotón incidente es mucho mayor que la energía de ionización. Obsérvese que en la dispersión Compton se absorbe y emite un fotón, mientras que en el efecto fotoeléctrico, se absorbe un fotón, pero no se emite ninguno.

Ejemplo 31.7 Absorción y emisión resonantes

El primer estado excitado del potasio es $E_1 = 1{,}62$ eV por encima del estado fundamental E_0, el cual consideramos de valor cero. El potasio posee también los niveles energéticos $E_2 = 2{,}61$ eV y $E_3 = 3{,}07$ eV. (*a*) ¿Cuál es la máxima longitud de onda de radiación que puede ser absorbida por el potasio en su estado fundamental? Calcular la longitud de onda de la radiación emitida en la transición (*b*) desde el tercer estado excitado (E_3) al estado fundamental y (*c*) desde el tercer estado excitado (E_3) al segundo estado excitado (E_2).

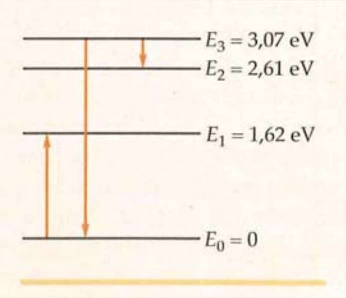


FIGURA 31.46

PLANTEAMIENTO En la figura 31.46 se muestran el estado fundamental E_0 y los tres primeros niveles energéticos excitados. (*a*) Como la longitud de onda está relacionada con la energía de un fotón por $\lambda = hc/\Delta E$, las longitudes de onda mayores corresponden a diferencias energéticas menores. La diferencia de energía más pequeña para una transición con origen en el estado fundamental es el paso al primer estado excitado. (*b*) Las longitudes de onda de los fotones emitidos al pasar de un estado excitado a otro de menor energía dependen de las diferencias correspondientes de energía según $\lambda = hc/|\Delta E|$.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular la longitud de onda de la radiación absorbida en una transición del estado fundamental al primer estado excitado:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_1 - E_0} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}62\ \text{eV} - 0} = \boxed{765\ \text{nm}}$$

(*b*) Para la transición de E_3 al estado fundamental, la energía del fotón es $E_3 - E_0 = E_3$. Calcular la longitud de onda de la radiación emitida en esta transición:

$$\lambda = \frac{hc}{|\Delta E|} = \frac{hc}{E_3 - E_0} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{3{,}07\ \text{eV} - 0} = \boxed{404\ \text{nm}}$$

(*c*) Para la transición de E_3 a E_2, la energía del fotón es $E_3 - E_2$. Calcular la longitud de onda de la radiación emitida en esta transición:

$$\lambda = \frac{hc}{|\Delta E|} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{3{,}07\ \text{eV} - 2{,}61\ \text{eV}} = \boxed{2{,}70\ \mu\text{m}}$$

COMPROBACIÓN El resultado de la parte (*b*) es menor que el de la (*a*), tal como se esperaba, puesto que cuanta mayor energía tiene un fotón menor es su longitud de onda.

OBSERVACIÓN La longitud de onda de la radiación emitida en la transición de E_1 al estado fundamental E_0 es 765 nm, la misma que para la radiación absorbida en la transición del estado fundamental a E_1. Esta transición y la correspondiente de E_3 al estado fundamental dan lugar a fotones que pertenecen al espectro visible.

LÁSERES

El *láser* (*light amplification by stimulated emission of radiation*) es un dispositivo que produce un haz intenso de fotones coherentes por emisión estimulada. Consideremos un sistema formado por átomos que poseen un estado fundamental de energía E_0 y un estado metaestable excitado de energía E_1. Si estos átomos se irradian con fotones de energía $E_1 - E_0$, los que se encuentren en el estado fundamental pueden absorber un fotón y pasar al estado E_1 y los átomos que ya se encuentran en el estado excitado pueden ser estimulados y pasar al estado fundamental. Las probabilidades relativas de absorción y emisión estimulada fueron estudiadas por Einstein, quien demostró por vez primera que eran iguales. Normalmente, casi todos los átomos del espectro a temperaturas ordinarias se encuentran inicialmente en el estado fundamental, de modo que el efecto principal será la absorción. Para conseguir un número mayor de transiciones por emisión estimulada que transiciones por absorción, es necesario tener más átomos en el estado excitado que en el estado fundamental. Esta condición, denominada *inversión de la población*, se consigue mediante el bombeo óptico, de tal modo que los átomos son bombeados hasta niveles de mayor energía que E_1 por absorción de una radiación auxiliar intensa. Estos átomos pasan entonces al estado E_1 por emisión espontánea o por transiciones no radiactivas, como las debidas a colisiones.

Electrodo de disparo

Haz

Tubo de descarga

FIGURA 31.47 Diagrama esquemático del primer láser de rubí.

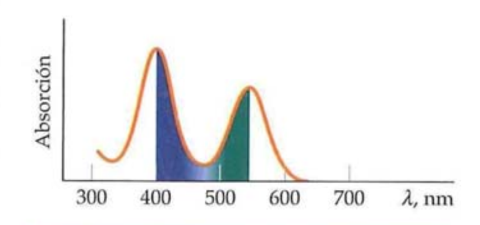


FIGURA 31.48 Absorción de luz en función de la longitud de onda para el Cr^{3+} del rubí. Este se presenta rojo debido a la fuerte absorción del verde y el azul por parte de los iones de cromo.

La figura 31.47 muestra un diagrama esquemático del primer láser, un láser de rubí construido por Theodore Maiman en 1960. Consta de una barra de rubí de unos pocos centímetros de longitud rodeada por un tubo helicoidal de descarga gaseosa que emite un amplio espectro de luz. Los extremos de la barra de rubí son planos y perpendiculares al eje de la barra. El rubí es un cristal transparente de Al_2O_3 con una pequeña cantidad (aproximadamente 0,05%) de cromo. Se presenta rojo porque los iones de cromo (Cr^{3+}) poseen intensas bandas de absorción en las regiones azul y verde del espectro, como se muestra en la figura 31.48. Los niveles energéticos del cromo que son importantes para el funcionamiento del láser de rubí se muestran en la figura 31.49. Cuando se dispara el tubo de descarga, se produce un destello intenso de luz que dura unos pocos milisegundos. La absorción de fotones excita muchos de los iones de cromo a las bandas de los niveles energéticos que se indican con colores sombreados en la figura 31.49. Entonces, los iones de cromo decaen hacia un par de estados metaestables, E_1 en la figura, muy cercanos entre sí, que se

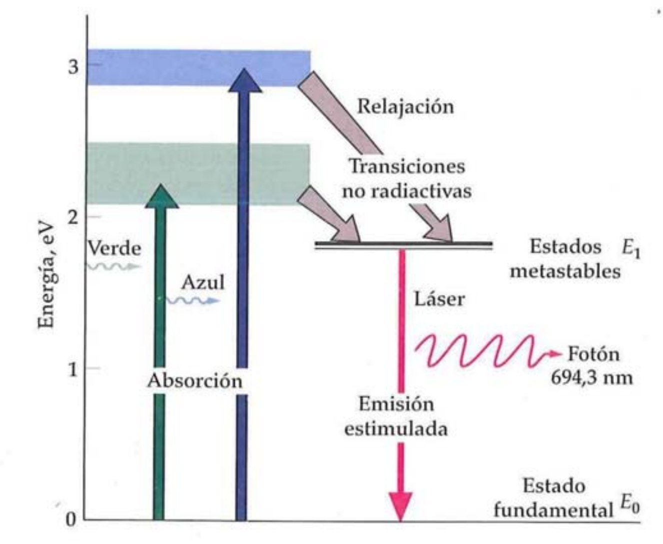


FIGURA 31.49 Niveles energéticos en un láser de rubí. Para conseguir que la población de los estados metaestables sea superior a la del estado fundamental, el cristal de rubí se somete a una intensa radiación que contiene energía en las longitudes de onda verde y azul. Esto excita a los átomos del estado fundamental a las bandas de los niveles energéticos sombreados, a partir de los cuales pasan a los estados metaestables por transiciones no radiactivas. Después, los átomos realizan una transición desde los estados metaestables al estado fundamental.

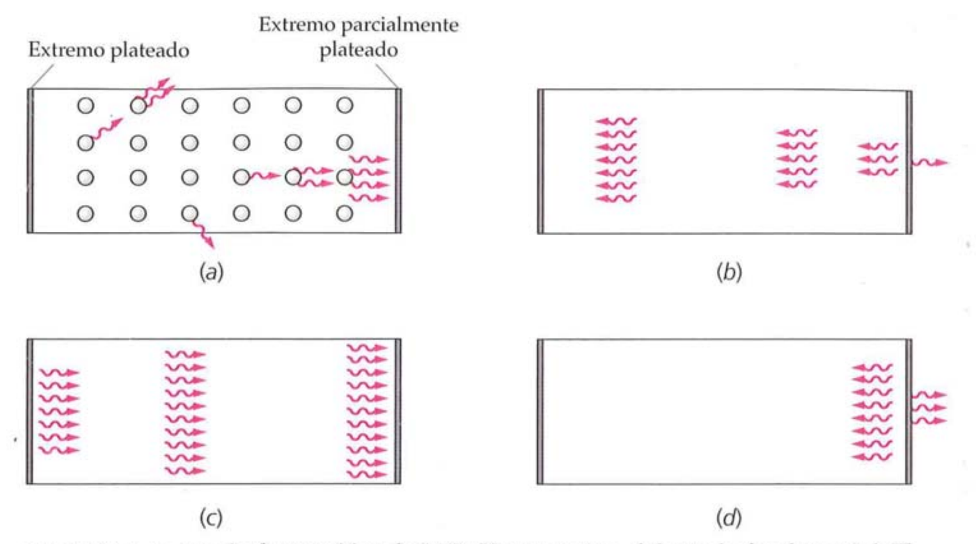


FIGURA 31.50 Formación de un haz de fotones en un láser. (*a*) Al irradiarse, algunos átomos emiten fotones espontáneamente y una fracción de ellos se propagan hacia la derecha y estimulan a otros átomos que emiten fotones paralelos al eje del cristal. (*b*) De los cuatro fotones que chocan contra la cara derecha, uno se transmite y tres se reflejan. Los fotones reflejados atraviesan de nuevo el cristal láser y estimulan a otros átomos que emiten fotones y el haz va creciendo. En (*c*) son ya muchos los fotones que llegan a la cara derecha del cristal. En (*d*) una parte de estos fotones se transmite y el resto se refleja.

encuentran en un nivel energético de 1,79 eV por encima del estado fundamental. El tiempo medio que un ion de cromo permanece en uno de estos estados metaestables es de unos 5 ms; pasado este tiempo, el ion de cromo emite espontáneamente un fotón y decae al estado fundamental. Un milisegundo es un tiempo muy grande para un proceso a escala atómica. Como consecuencia, si el destello es suficientemente intenso, el número de átomos que realizan la transición a los estados E_1 es superior a los que permanecen en el estado fundamental. Por lo tanto, durante el tiempo que el tubo de descarga está encendido, las poblaciones atómicas del estado fundamental y de los estados metaestables se invierten. Cuando los iones de los estados E_1 pasan al estado fundamental por emisión espontánea, emiten fotones de energía 1,79 eV y longitud de onda 694,3 nm. Estos fotones tienen la energía justa para estimular iones de cromo que se encuentran en estados metaestables, los cuales, al desexcitarse y caer al estado fundamental, emiten fotones de la misma energía y longitud de onda. Los fotones también tienen la energía necesaria para estimular a otros iones de cromo que se encuentran en el estado fundamental, los cuales sufren una transición a estados metaestables por absorción electromagnética. Estos procesos son competitivos y los procesos de emisión estimulada son dominantes siempre y cuando el número de iones de cromo en estados metaestables sea superior a la población de éstos en el estado fundamental.

En el láser de rubí, un extremo del cristal está completamente recubierto de plata, de modo que es 100% reflector, mientras que el otro, llamado conector de salida, lo está sólo parcialmente y es 85% reflector. Cuando los fotones se propagan paralelamente al eje del cristal, chocan contra los extremos plateados; todos ellos se reflejan en la cara trasera y el 85% se reflejan en la cara frontal, escapando el 15% a través de esta última. En cada recorrido a través del cristal, los fotones estimulan cada vez más átomos, de modo que el haz emitido desde la cara parcialmente plateada llega a ser muy intenso (figura 31.50). Como la duración de cada destello del tubo de descarga es de entre dos y tres segundos, el haz láser se produce en pulsos que duran unos pocos milisegundos. Los láseres modernos de rubí generan haces intensos de luz con energía de 50 a 100 J. El haz puede tener un diámetro tan pequeño como 1 mm y una divergencia angular dentro de un intervalo de 0,25 a 7 milirradianes, aproximadamente.

La inversión de población se alcanza de un modo distinto en el láser helio-neón. Los niveles energéticos del helio y el neón de importancia en la operación del láser se muestran en la figura 31.51. El helio posee un estado energético excitado $E_{1\,\mathrm{He}}$ de 20,61 eV sobre el estado fundamental. Los átomos de helio se excitan al estado $E_{1\,\mathrm{He}}$ por medio de una descarga eléctrica. El neón posee un estado excitado $E_{2\,\mathrm{Ne}}$ de 20,66 eV por encima de su estado fundamental. Este valor se encuentra sólo a 0,05 eV por encima del primer estado excitado del helio. Los átomos de neón se excitan al estado $E_{2\,\mathrm{Ne}}$ por colisiones con los átomos excitados de helio. La energía cinética de los átomos de helio suministra los 0,05 eV extra de la energía necesaria para excitar los átomos de neón. Además, existe otro estado excitado del neón que posee una energía de 18,70 eV por encima de su estado fundamental y 1,96 eV por debajo del estado

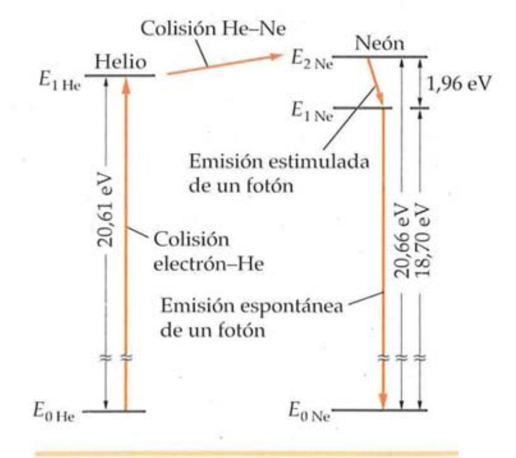


FIGURA 31.51 Niveles energéticos del helio y neón que son importantes en el láser helio-neón. Los átomos de helio se excitan por descarga eléctrica alcanzando un estado energético de 20,61 eV por encima de su estado fundamental. Al chocar con los átomos de neón, excitan a algunos de éstos hasta un estado energético de 20,66 eV. Así se alcanza la inversión de población entre este nivel y el situado 1,96 eV por debajo. La emisión espontánea de fotones de energía 1,96 eV estimula a otros átomos del estado superior que emiten fotones de energía 1,96 eV.

$E_{2\,Ne}$. Como el estado $E_{1\,Ne}$ está normalmente desocupado, la inversión entre los estados $E_{2\,Ne}$ y $E_{1\,Ne}$ se obtiene inmediatamente. La emisión estimulada que tiene lugar entre estos estados da lugar a fotones de energía 1,96 eV y longitud de onda 632,8 nm, que producen una luz brillante roja. Después de la emisión estimulada, los átomos de neón del estado $E_{1\,Ne}$ decaen al estado fundamental por emisión espontánea.

Obsérvese que en el láser helio-neón están implicados cuatro niveles energéticos, mientras que en el láser de rubí sólo se implicaban tres. En el láser de tres niveles, la inversión de población es difícil de alcanzar, pues deben excitarse más de la mitad de los átomos del estado fundamental. En un láser de cuatro niveles, la inversión de población se alcanza fácilmente, pues el estado después de la emisión estimulada no es el fundamental, sino un estado excitado normalmente desocupado.

En la figura 31.52, se muestra un diagrama esquemático de un láser helio-neón utilizado habitualmente en demostraciones de física. Consta de un tubo de gas que contiene un 15% de gas helio y un 85% de gas neón. En un extremo del tubo de gas hay montado un espejo plano totalmente reflector y en el otro extremo se sitúa un espejo cóncavo 99% reflector. El espejo cóncavo enfoca la luz paralela en el espejo plano y actúa también como una lente que transmite parte de la luz de modo que emerja como un haz paralelo.

Un haz láser es coherente, muy estrecho e intenso. Su coherencia hace que el haz láser sea útil en la producción de hologramas, que será tratada en el capítulo 33. Gracias a la dirección precisa y a la pequeña dispersión angular del haz, es muy útil como herramienta quirúrgica en la destrucción de células cancerosas o en la fijación de una retina desprendida. Los láseres son utilizados también por los topógrafos para el alineamiento preciso en grandes distancias. Las distancias pueden medirse con precisión por reflexión de un pulso láser en un espejo, midiendo el tiempo que el pulso tarda en llegar al espejo y regresar al punto de partida. La distancia a la Luna se midió con un error de unos pocos centímetros utilizando un espejo que fue situado por los astronautas en su superficie con este propósito. Los haces láser se han utilizado también en las investigaciones de fusión nuclear. Un pulso intenso de láser se enfoca sobre pequeñas esferas de deuterio-tritio en una cámara de combustión. El haz calienta las esferitas a temperaturas del orden de 10^8 K en un tiempo muy corto, haciendo que el deuterio y el tritio se fusionen y liberen la energía de fusión.

La tecnología láser avanza tan rápidamente que sólo es posible mencionar algunos de sus desarrollos más recientes. Además del láser rubí, existen muchos otros láseres en estado sólido, con haces de longitudes de onda comprendidas entre 170 y 3900 nm, aproximadamente. Se han construido láseres que generan una potencia continua superior a 1 kW. Los láseres de pulsos pueden suministrar ahora una potencia superior a 10^{14} W en pulsos de nanosegundos. Existen láseres de gas capaces de producir haces con longitudes de onda variables desde el infrarrojo lejano al ultravioleta. Los láseres de semiconductores (también llamados diodos láser o láseres de unión) se han reducido en unos 10 años desde el tamaño de una cabeza de alfiler a unas mil millonésimas de metro (10^{-9} m). Los láseres líquidos que utilizan pigmentos químicos pueden sintonizarse en cierto intervalo de longitudes de onda (aproximadamente 70 nm en los láseres continuos y más de 170 nm en láseres de pulsos). Un láser relativamente nuevo, el láser de electrones libres, extrae energía luminosa de un haz de electrones libres que se mueven a través de un campo mag-

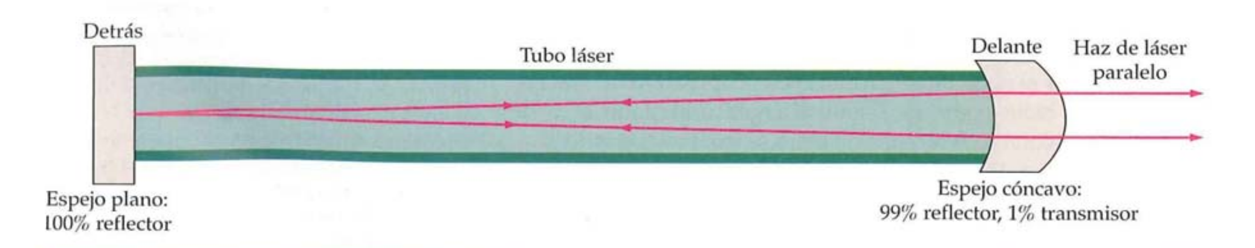
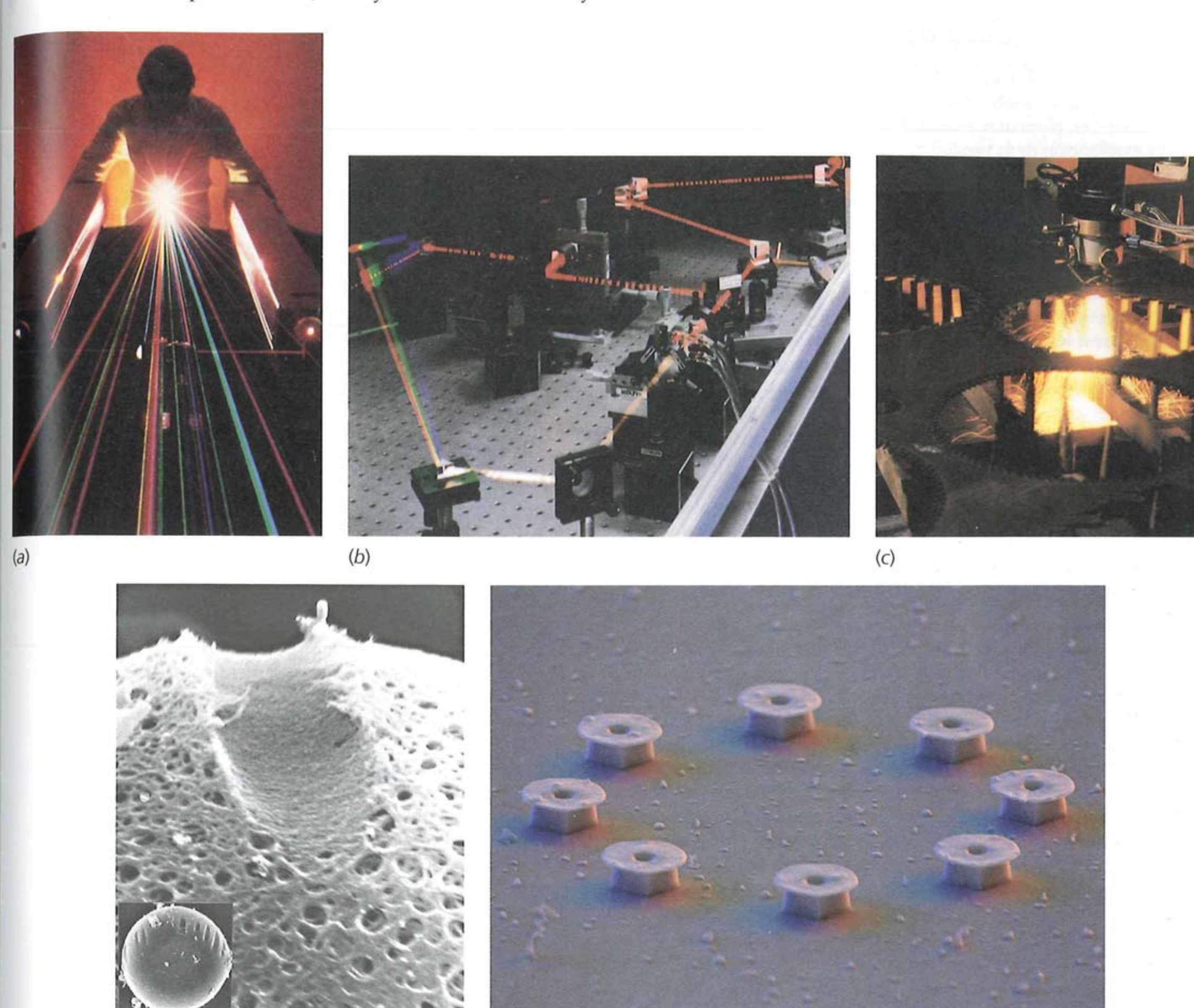


FIGURA 31.52 Dibujo esquemático de un láser helio-neón. El uso de un espejo cóncavo en lugar de un segundo espejo plano, hace menos crítico el alineamiento de los espejos como ocurre en el láser de rubí. El espejo cóncavo también se utiliza como lente que enfoca la luz emitida en un haz paralelo.

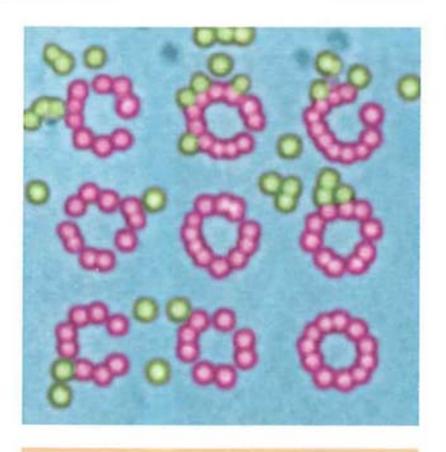
nético especialmente variable. Este láser posee una enorme potencia y un alto rendimiento y puede sintonizarse dentro de un amplio intervalo de longitudes de onda. Aparentemente, no hay límite en la variedad y usos de los láseres modernos.



(*a*) Haces de un láser de criptón y otro de argón, descompuestos en sus longitudes de onda componentes. En estos láseres de gas, los átomos de criptón y argón han sido privados de múltiples electrones, formando iones positivos. Las transiciones energéticas con emisión de luz tienen lugar cuando los electrones excitados de los iones pasan de un nivel superior a otro. En este caso, tienen lugar simultáneamente varias transiciones de energía, correspondientes cada una a una luz de diferente longitud de onda. (*b*) Un láser de pulsos de femtosegundos. Mediante una técnica llamada *de bloqueo*, dentro de una cavidad del láser interfieren diferentes modos excitados y se crean una serie de pulsos ultracortos, del orden de picosegundos, que corresponden al tiempo que tarda la luz en oscilar adelante y atrás dentro de la cavidad. Los pulsos ultracortos se han utilizado como sondas para estudiar el comportamiento de las moléculas durante las reacciones químicas. (*c*) Un láser de dióxido de carbono tarda justamente dos minutos en recortar una hoja de sierra de acero. (*d*) Surco trazado en la zona transparente (cubierta exterior protectora) del óvulo de un ratón mediante una tijera láser para facilitar la implantación. Esta técnica se ha aplicado ya en terapias de fertilidad humana. Diversos efectos contribuyen a la capacidad del láser de enfocar de forma precisa para cortar a escala tan delicada: la absorción de fotones puede calentar el blanco, romper enlaces moleculares, o impulsar reacciones químicas. (*e*) Los llamados nanoláseres aquí mostrados son discos semiconductores de un diámetro de pocas micras y de una anchura del orden de una fracción de micra. Estos diminutos láseres funcionan como sus "colegas" macroscópicos. Aprovechando los efectos cuánticos que prevalecen a esta escala microscópica, los nanoláseres prometen un futuro de gran rendimiento y están siendo ensayados como dispositivos de conmutación, ultrarrápidos y de baja energía. *((a, c) Chuck O'rear/West Light. (b) Gentileza de Ahmed H. Zewail. (d) Michael W. Berns/Scientific American. (e) David Scharf.)*

Temas de actualidad en Física

Pinzas y vórtices ópticos: trabajar con la luz



Las esferas de silicio en agua quedan atrapadas en una red de tres por tres de vórtices ópticos *(Gentileza de David G. Grier, de E. Curtis, B. A. Koss and D. G. Grier, "Dynamic holographic optical tweezers," Optics Communications 207, 169-175 (2002).)*

La presión ejercida por la radiación electromagnética a las frecuencias del visible (luz) se usa para medir la fuerza de ésta sobre las moléculas biológicas[1] en general y las proteínas[2] (dobladas y desdobladas) en particular, e incluso para "enfriar" y confinar átomos[3] con el objeto de analizarlos. La utilización de la presión de radiación de la luz aplicada a partículas microscópicas en pequeñas localizaciones espaciales es la acción que define las denominadas "*pinzas ópticas*", las cuales permiten la manipulación de dichas partículas.

En 1970, un grupo de investigación de los Laboratorios Bell, dirigido por Arthur Ashkin, utilizó la presión de radiación de la luz para hacer levitar pequeñas gotas de agua con dimensiones entre 1 y 40 micrómetros de diámetro.[4] Después de muchos años de experimentación, este grupo demostró que mediante un simple láser se podía controlar la posición de un virus en un portaobjetos de microscopio.[5] Los biólogos moleculares y microbiólogos comenzaron rápidamente a utilizar estas singulares pinzas en sus estudios.

Con frecuencia, se utilizan láseres para construir trampas ópticas que trasmiten luz cuya longitud de onda se acerca a los 1000 nanómetros,[6] siendo el objetivo estudiar materiales biológicos, muchos de los cuales son relativamente transparentes ante estas longitudes de onda del infrarrojo cercano. El sustrato o soporte líquido que se usó para mantener las muestras biológicas absorbía luz dispersada de frecuencias cercanas a los citados 1000 nanómetros.[7,8] (Esto implicaba una menor probabilidad de que el objeto confinado quedara dañado por la luz.) Otras longitudes de onda se pueden usar en función de los objetos que deban ser confinados. La fuerza que ha de ejercerse sobre la moléculas biológicas para que queden atrapadas es de unos piconewtons.[9]

Las trampas ópticas funcionan tanto mediante la presión de la luz como utilizando la fuerza ejercida por el gradiente de intensidad lumínica existente en un rayo láser fuertemente focalizado. Si el rayo de luz brilla a través de un pequeño objeto esférico, transparente e inmerso en dicho rayo, la luz se refractará. La presión media de un rayo cuando se refracta mantendrá el citado objeto en el centro del rayo. Cuanto más focalizada esté la luz, más y mejor confinada quedará la partícula cerca del foco debido a presencia de un mayor valor del gradiente de intensidad de luz.[10,11] Este hecho permite un control de la posición del objeto en el espacio de tres dimensiones. Al estudiar moléculas biológicas, una molécula es adherida a una esfera de poliestireno de entre 100 nm y 2 μm de diámetro. Moviendo la esfera es posible estirar, doblar y colocar la molécula en el foco con la ayuda de las pinzas ópticas. Objetos de mayor dimensión como células enteras se pueden mover también con estas pinzas.[12]

Lentes digitales especiales pueden producir determinados rizos de luz láser cuidadosamente calculados. Estos rizos lumínicos se denominan *vórtices* o *torbellinos ópticos* que tienen múltiples usos, en particular, pueden ser usados como pinzas ópticas especiales que tienen un momento angular definido.[13] Estos vórtices con diversos valores del momento angular se utilizan para hacer girar e incluso rotar a diferentes partículas. Los vórtices ópticos han sido usados para rotar una partícula alrededor de otra con objeto de combinar ambas.

Físicos de la Universidad de Chicago han desarrollado un método para generar centenares de diferentes pinzas ópticas procedentes del mismo rayo haciendo pasar rayos láser a través de lentes controladas digitalmente.[14] Estas pinzas pueden incluir vórtices ópticos que ejercen diferentes pares de torsión sobre las partículas. El método de pinzas ópticas holográficas para crear vórtices ópticos se patentó con la idea de manipular partículas, bombear, mezclar, ordenar fluidos y objetos microscópicos.[15,16] Los constructores de máquinas miniaturizadas se muestran entusiasmados con esta tecnología porque, a pesar de ser diminutas, la luz no las degrada.[17]

---

1 Mehta, A. D., et al., "Single-Molecule Biomechanics with Optical Methods." *Science*, Mar. 12, 1999, Vol. 283, No. 5408, pp. 1689–1695.
2 Cecconi, C., et al., "Direct Observation of the Three-State Folding of a Single Protein Molecule." *Science*, Sept. 23, 2005, Vol. 309, No. 5743, pp. 2057–2060.
3 Nagel, B., "Presentation Speech for 1997 Nobel Prize in Physics." *Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 1997*, Ed. Tore Frängsmyr [Nobel Foundation], Stockholm, 1998, at http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1997/presentation-speech.html As of Dec. 2006.
4 Ashkin, A., and Dziedzic, J., M., "Optical Levitation of Liquid Drops by Radiation Pressure." *Science*, Mar. 21, 1975, Vol. 187, No. 4181, pp. 1073–1075.
5 Ashkin, A., and Dziedzic, J., M., "Optical Trapping and Manipulation of Viruses and Bacteria." *Science*, Mar. 20, 1987, Vol. 235, No. 4795, pp. 1517–1520.
6 Mohanty, S. K., Dasgupta, R., and Gupta, P. K., "Three-Dimensional Orientation of Microscopic Objects Using Combined Elliptical and Point Optical Tweezers." *Applied Physics B*, Dec. 2005, Vol. 81, No. 8, pp. 1063–1066.
7 Molloy, J. E., and Padgett, M. E., "Lights, Action: Optical Tweezers." *Contemporary Physics*, Jul./Aug. 2002, Vol. 43, No. 4, pp. 241–258.
8 Block, S. M., "Construction of Optical Tweezers." *Cells: A Laboratory Manual. Vol. 2, Sect. 7*, Eds. D. L. Spector, R. D. Goldman, and L. A. Leinwand. Cold Spring Harbor: Cold Spring Harbor Laboratory Press, 1998. At http://www.cshlpress.com/chap_cells.tpl#intro As of Dec. 2006.
9 Mehta, A. D., et al., op. cit.
10 Block, S. M., op. cit.
11 Molloy, J. E., and Padgett, M. J., op. cit.
12 Pool, R., "Trapping with Optical Tweezers." *Science*, Aug. 26, 1988, Vol. 241, No. 4869, p. 1042.
13 Dholakia, K., Spalding, G., and MacDonald, M., "Optical Tweezers: The Next Generation." *Physics World*, Oct. 2002, Vol. 15, No. 9, pp. 31–35.
14 Curtis, J. E., Koss, B. A., and Grier, D. G., "Dynamic Holographic Optical Tweezers." *Optics Communications*, 2002, Vol. 207, pp. 169–175.
15 Curtis, J. E., Koss, B. A., and Grier, D. G., *Use of Multiple Optical Vortices for Pumping, Mixing and Sorting*. U.S. Patent 6,858,833 B2. Feb. 22, 2005.
16 Curtis, J. E., Koss, B. A., and Grier, D. G., *Multiple Optical Vortices for Manipulating Particles* U.S. Patent 6,995,351 B2. Feb. 7, 2006.
17 "Motors of Light May Resolución Dilemma of How to Power MEMS." *Small Times*, April 4, 2004. At http://www.smalltimes.com/document_display.cfm?document_id=5796 As of May 2006.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Velocidad de la luz	La unidad de longitud en el SI, el metro, se define de tal modo que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente $c = 299\,792\,458$ m/s	31.1
v en un medio transparente	$v = \frac{c}{n}$ donde n es el índice de refracción del medio.	31.3
2. Reflexión y refracción	Cuando la luz incide sobre la superficie de separación de dos medios en los que la velocidad de la luz es diferente, parte de la energía luminosa se transmite y parte se refleja.	
Ley de reflexión	El rayo reflejado se encuentra en el plano de incidencia y forma un ángulo θ'_1 con la normal que es igual al ángulo de incidencia. $\theta'_1 = \theta_1$	31.4
Intensidad reflejada, incidencia normal	$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0$	31.7
Índice de refracción	$n = \frac{c}{v}$	31.3
Ley de refracción (ley de Snell)	$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$	31.5*b*
Reflexión interna total	Cuando la luz que se propaga en un medio con un índice de refracción n_1 incide sobre la superficie de separación con un segundo medio con menor índice de refracción $n_2 < n_1$, la luz se refleja totalmente si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico θ_c dado por	
Ángulo crítico	$n_1 \operatorname{sen}\theta_c = n_2 \operatorname{sen} 90° \qquad n_1 > n_2$	31.8
Dispersión	La velocidad de la luz en un medio y, por lo tanto, su índice de refracción depende de la longitud de onda de la luz. Debido a la dispersión, un haz de luz blanca que incide sobre un prisma de refracción se dispersa en sus colores componentes. Análogamente, la reflexión y la refracción de la luz solar en las gotas de lluvia originan el arco iris.	
3. Polarización	Las ondas transversales pueden polarizarse. Los cuatro fenómenos que producen ondas electromagnéticas polarizadas partiendo de ondas no polarizadas son (1) absorción, (2) dispersión o *scattering*, (3) reflexión y (4) birrefringencia.	
Ley de Malus	Cuando dos polarizadores tienen sus ejes de transmisión formando un ángulo θ, la intensidad trasmitida por el segundo polarizador se reduce en un factor $\cos^2\theta$: $I = I_0 \cos^2\theta$	31.16
4. Principio de Huygens	Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de pequeñas ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a la de la onda primaria. Al cabo de cierto tiempo, el frente de onda primario es la envolvente de estas ondas elementales.	
5. Dualidad onda-partícula	La luz se propaga como una onda, pero interacciona con la materia como una partícula.	
Energía del fotón	$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$	31.25
Constante de Planck	$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s $= 4{,}136 \times 10^{-15}$ eV·s	
hc	$hc = 1240$ eV·nm	31.26

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
6. Emisión de luz	La luz se emite cuando un electrón atómico externo verifica una transición desde un estado excitado a otro estado de menor energía.
Espectro de rayas	Los átomos de gases diluidos emiten una serie discreta de longitudes de onda que constituyen un espectro de rayas. La energía del fotón $E = hf = hc/\lambda$ es igual a la diferencia de energía entre los estados inicial y final del átomo.
Espectro continuo	Los átomos de los sólidos, líquidos y gases de alta densidad presentan bandas de niveles energéticos continuas, es decir, emiten un espectro continuo de luz. La radiación térmica es visible si la temperatura del cuerpo emisor es superior a unos 600 °C.
Emisión espontánea	Un átomo que esté en un estado excitado verificará espontáneamente una transición a un estado energético más bajo con emisión de un fotón. Este proceso es aleatorio y tiene una vida media característica de unos 10^{-8} s. Los fotones emitidos por dos o más átomos no están correlacionados, por lo que la luz emitida es incoherente.
Emisión estimulada	La emisión estimulada tiene lugar si un átomo se encuentra inicialmente en un estado excitado y sobre él incide un fotón cuya energía es igual a la diferencia energética entre dicho estado y otro de nivel inferior. El campo electromagnético oscilante del fotón incidente estimula el átomo excitado y éste emite otro fotón en la misma dirección y fase que el fotón incidente. La luz emitida es coherente.
7. Luz visible	El ojo humano es sensible a radiación electromagnética en el intervalo de longitudes de onda entre 400 nm (color violeta) hasta 700 nm (color rojo). El rango de energías del fotón está entre 1,8 eV y 3,1 eV. El Sol emite radiación electromagnética cuya distribución es uniforme y por ello, nuestros ojos la detectan como si fuera luz blanca.
8. Láseres	Un láser produce un haz de fotones intenso, coherente y estrecho como resultado de una emisión estimulada. El funcionamiento de un láser depende de una inversión de población, en la cual existen más átomos en un estado excitado que en el estado fundamental o en un estado excitado de energía inferior.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

31.1 Hay 720 dientes y 720 saltos, de tal forma que la anchura de un diente es menor que $\frac{1}{720}$ de la circunferencia de la rueda. Por consiguiente, la rueda realmente tiene que girar menos de $\frac{1}{720}$ revoluciones para que la luz vuelva a poder observarse en el espejo lejano.

Respuestas a los problemas prácticos

31.1 (*a*) $4{,}57 \times 10^6$ km (*b*) $3{,}05 \times 10^8$ m/s

31.2 1,28 s cada camino

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Un rayo de luz se refleja en un espejo. El ángulo entre el rayo incidente y el reflejado es de 70°. ¿Cuál es el ángulo de reflexión? (*a*) 70°. (*b*) 140°. (*c*) 35°. (*d*) Faltan datos para calcular este ángulo. SSM

2 • Un rayo de luz en el aire incide sobre una pieza de vidrio. El ángulo entre el rayo incidente y la normal a la superficie es de 40° y el formado por el rayo refractado y la normal es de 28°. ¿Qué ángulo forman los rayos incidente y refractado? (*a*) 12°. (*b*) 28°. (*c*) 40°. (*d*) 68°.

3 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un experimento, se miden índices de refracción de materiales transparentes utilizando un láser de helio-neón. Para un determinado ángulo de incidencia, el ángulo de refracción es de 28° en el material A y de 26° en el B. ¿Qué material tiene mayor índice de refracción? (*a*) A. (*b*) B. (*c*) Los dos iguales. (*d*) Con los datos aportados no se puede determinar.

4 • Un rayo de luz pasa del aire al agua incidiendo en la superficie de separación con un ángulo de 45°. ¿Cuáles de las siguientes magnitudes de la luz se modifican cuando ésta penetra en el agua? (1) Longitud de onda. (2) Frecuencia. (3) Velocidad de propagación. (4) Dirección de propagación. (*e*) Ninguna de las citadas anteriormente.

5 • La densidad de la atmósfera decrece con la altura y, por ello, también disminuye el índice de refracción. Explicar por qué puede verse el Sol después de su puesta. ¿Por qué el Sol poniente aparece aplanado? (El horizonte se define como la extensión de un plano tangente a la superficie de la Tierra.)

6 • Una alumna de física que juega al billar desea lanzar su bola de modo que choque contra una banda y luego lo haga de lleno contra la bola ocho. Escoge varios puntos sobre la banda y para cada uno de ellos mide la distancia desde dicho punto hasta la bola que ha de lanzar y hasta la bola ocho. Pretende hallar un punto para el cual la suma de estas distancias sea mínima. (*a*) ¿Podrá con este método hacer chocar su bola contra la bola ocho? (*b*) ¿Cómo se relaciona este método con el principio de Fermat? Despreciar cualquier efecto debido a la rotación.

7 • Una nadadora situada en el punto S de la figura 31.53 sufre un calambre mientras se encuentra nadando cerca de la orilla de un lago en calma y pide socorro. Una socorrista situada en el punto L oye esta llamada. La socorrista puede correr a 9 m/s y nadar a 3 m/s. Ha estudiado física y sabe elegir la trayectoria según la cual tardará menos tiempo en alcanzar a la nadadora. ¿Cuál de las trayectorias que se muestran en la figura 31.53 elige? SSM

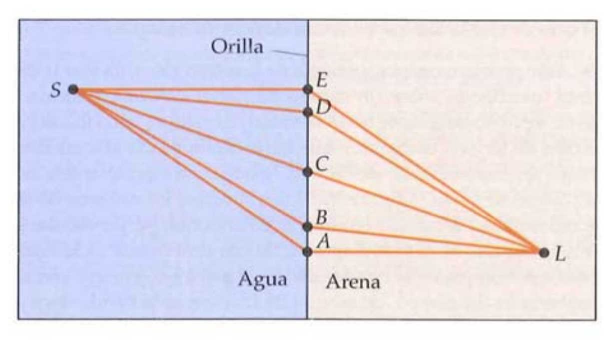


FIGURA 31.53 Problema 7

8 • Un material A tiene un índice de refracción mayor que otro B. ¿Cuál de ellos tendrá mayor ángulo crítico de reflexión total, cuando los materiales están en el aire? (*a*) A. (*b*) B. (*c*) El mismo ángulo crítico. (*d*) Faltan datos para responder.

9 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** El ojo humano percibe los colores por medio de unas estructuras llamadas *conos* que se localizan en la retina. Las moléculas de los conos son de tres tipos que responden a procesos similares a los de absorción electromagnética resonante correspondiente al rojo, verde y azul, respectivamente. Teniendo en cuenta este hecho, explicar por qué el color de un objeto azul (de 450 nm en el aire) no cambia cuando se sumerge en agua incolora, a pesar de que la longitud de onda de la luz se acorta según la ecuación 31.6. SSM

10 • Los ejes de dos láminas polarizadoras forman ángulo θ. Hacemos incidir luz polarizada sobre la primera de estas láminas. ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida a través de ambas? (*a*) $I\cos^2\theta$. (*b*) $(I\cos^2\theta)/2$. (*c*) $(I\cos^2\theta)/4$. (*d*) $I\cos\theta$. (*e*) $(I\cos\theta)/4$. (*f*) Ninguno de estos resultados.

11 •• Dibujar un diagrama para explicar cómo unas gafas de sol polaroid reducen la luminosidad y brillo de la luz solar reflejada en una superficie especular horizontal tal como la superficie del agua de una piscina. El diagrama dibujado deberá indicar claramente la dirección de polarización de la luz cuando se propaga en dirección a la superficie reflectante y después al ojo pasando a través de las gafas. SSM

12 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** ¿Por qué es menos peligroso colocarse frente a un rayo intenso de luz roja que frente a un rayo de baja intensidad de rayos gamma?

13 • Sean tres estados de un átomo cuyas energías son A, B y C. La energía del B es 2,0 eV mayor que la del A y la del C 3,0 eV mayor que la del B. ¿Qué transición atómica será la de menor longitud de onda en la emisión electromagnética de luz? (*a*) B → A. (*b*) C → B. (*c*) C → A. (*d*) A → C.

14 • En el problema 13, si el átomo ocupa inicialmente el estado A, ¿qué transición aportará luz de mayor longitud de onda? (*a*) A → B. (*b*) B → C. (*c*) A → C. (*d*) B → A.

15 • ¿Qué papel juega el helio en el láser de helio-neón? SSM

16 • Al observarse con el espectroscopio un rayo de luz visible que atraviesa un gas de hidrógeno atómico a temperatura ambiente, se aprecian rayas oscuras con las longitudes de onda correspondientes a su serie de emisión. Los átomos que intervienen en la absorción resonante emiten luz en estas longitud de onda al volver al estado fundamental. Explíquese por qué el espectro que se observa nunca exhibe líneas oscuras muy pronunciadas.

17 • ¿Cuál de los siguientes tipos de luz tiene los fotones de mayor energía? (*a*) Roja. (*b*) Infrarroja. (*c*) Azul. (*d*) Ultravioleta. SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 • Hacer una estimación del tiempo requerido para que la luz recorra la trayectoria completa en la experiencia realizada por Galileo para determinar la velocidad de la luz. Compárese el tiempo que emplea la luz en el viaje de vuelta con el de respuesta del ojo humano. ¿Qué precisión tiene el experimento?

19 • Estímese el tiempo de retraso en llegar la luz a la retina cuando se utilizan gafas de sol con respecto al que tarda sin ellas.

20 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Estimar el número de fotones que se reciben en el ojo procedentes del Sol por décima de segundo. ¿Cuánta energía se recibe en ese tiempo suponiendo que se absorben todos los fotones, si la potencia total emitida por el Sol es de $4{,}2 \times 10^2$ watts?

21 •• El método de Ole Römer para medir la velocidad de la luz requiere la predicción precisa del tiempo en el que sucede el eclipse de la luna de Júpiter Io. Teniendo en cuenta que un eclipse tiene lugar la medianoche del 1 de junio cuando la Tierra se encuentra en la posición A de la figura 31.54, predecir el tiempo estimado de observación del eclipse de un cuarto de año después cuando la Tierra se encuentra en la posición B de la misma figura, asumiendo (*a*) que la velocidad de la

luz es infinita y (*b*) que la velocidad de la luz es 2,998 $\times 10^8$ m/s.

22 •• Si el ángulo de incidencia es suficientemente pequeño, puede usarse la aproximación sen $\theta \approx \theta$ para simplificar la ley de Snell. Calcular el ángulo de incidencia que haría que el error en el ángulo de refracción no fuera mayor que el 1% con respecto al que se obtendría utilizando la fórmula exacta. Esta aproximación se usará en el capítulo 32 en el caso de formación de imágenes mediante superficies esféricas.

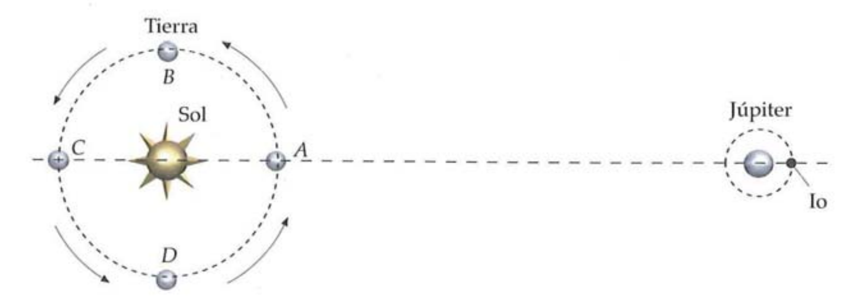


FIGURA 31.54 Problema 21

LA VELOCIDAD DE LA LUZ

23 • Desde la estación de control se envía una breve señal para despertar a los astronautas a bordo de un lejano vehículo espacial. Cinco segundos después de enviada la señal, se oyen las voces de los astronautas en la estación de control. ¿A qué distancia (máxima) de la Tierra se encuentra el vehículo? (*a*) 7,5 $\times 10^8$ m. (*b*) 15 $\times 10^8$ m. (*c*) 30 $\times 10^8$ m. (*d*) 45 $\times 10^8$ m. (*e*) El vehículo está en la Luna.

24 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La distancia entre un punto situado en la superficie de la Tierra y otro en la superficie de la Luna se mide enviando un haz de luz láser a un reflector situado en la superficie lunar y midiendo el tiempo que emplea la luz en su viaje de ida y vuelta. La incertidumbre en la distancia medida Δx está relacionada con la incertidumbre en la medida del tiempo Δt mediante $\Delta x = \frac{1}{2}c\,\Delta t$. Si pueden medirse intervalos de tiempo de hasta un ± 1 ns, hallar la incertidumbre de la distancia en metros.

25 •• Ole Römer descubrió que la velocidad de la luz era finita partiendo de observaciones sobre la luna de Júpiter. Estimar la sensibilidad que debería tener su sistema de medida para poder detectar una diferencia en el tiempo de respuesta cuando la luna de Júpiter está en el perigeo (3,63 $\times 10^5$ km) y cuando está en el apogeo (4,06 $\times 10^5$ km). Asumir que el instrumento podía medir, al menos, una décima parte del total del efecto que se deseaba medir. SSM

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

26 • Calcular la fracción de energía luminosa reflejada en la interfase aire-agua si el rayo incidente coincide con la normal.

27 • Un rayo de luz incide en un par de espejos colocados formando un ángulo recto. El plano de incidencia es perpendicular a ambos espejos. Demostrar que tras reflejarse la luz en los dos espejos, el rayo emerge en dirección opuesta a la de incidencia, independientemente del ángulo de incidencia.

28 •• **HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Un rayo de luz en el aire incide en la superficie de separación entre el aire y agua. Utilizando una hoja de cálculo, hacer una gráfica del valor del ángulo de refracción en función del de incidencia desde 0° a 90°. (*b*) Repetir el apartado (*a*) de este problema pero con el rayo inicialmente en el agua y dirigiéndose a la superficie de interfase aire-agua. En el apartado (*b*) de este problema, ¿qué significa el resultado para ángulos de incidencia superiores al ángulo límite?

29 •• La luz roja de un láser helio-neón posee en el aire una longitud de onda de 632,8 nm. Determinar las siguientes magnitudes de la luz del láser de helio-neón en el aire, agua y vidrio: (*a*) la velocidad, (*b*) la longitud de onda y (*c*) la frecuencia. (El índice de refracción del vidrio es 1,5.)

30 •• El índice de refracción del vidrio *flint* de silicato es 1,66 para la luz con una longitud de onda de 400 nm y 1,61 para la luz con una longitud de onda de 700 nm. Dos rayos, uno de luz roja y otro de violeta, se refractan ambos en el vidrio *flint* con un ángulo de 30° cuando inciden desde el aire. (*a*) ¿Cuál incide con mayor ángulo, el rojo o el violeta? (*b*) ¿Cuál es la diferencia entre sus ángulos de incidencia? Explique las respuestas.

31 •• Un lámina de vidrio con índice de refracción 1,50 se sumerge en agua cuyo índice de refracción es 1,33. La luz incide desde el agua en el vidrio. Determinar el ángulo de refracción si el ángulo de incidencia es: (*a*) 60°, (*b*) 45° y (*c*) 30°. SSM

32 •• Repetir el problema 31 en el caso de un haz de luz que se desplaza inicialmente en el vidrio y que incide sobre la superficie vidrio-agua con los mismos ángulos.

33 •• Un rayo de luz incide desde el aire en la dirección de la normal sobre una lámina de vidrio de índice de refracción $n = 1{,}5$. Se produce reflexión en ambas superficies de la lámina. ¿Qué porcentaje aproximado de energía de la luz incidente es transmitida por la lámina? (Considerar la luz reflejada en ambos lados.)? Repetir el apartado anterior en el caso de que la lámina estuviera sumergida en agua.

34 •• Este problema es una analogía de la refracción. Una banda de música está marchando sobre un campo de fútbol con una velocidad constante v_1. Aproximadamente hacia la mitad del campo, la banda llega a una sección de terreno embarrado que tiene un límite claramente distinguible que forma un ángulo de 30° con la línea correspondiente a las 50 yardas, según se ve en la figura 31.55. En el barro, los músicos de la banda se mueven con velocidad igual a $\frac{1}{2}v_1$ en dirección perpendicular a la fila en la que están. Hacer un diagrama de cómo se desvía cada línea de personas que componen la banda cuando llegan a encontrarse con la sección embarrada del campo, de modo que finalmente la banda llega a marchar en una dirección diferente. Indicar la dirección original mediante un rayo y la dirección final por otro segundo rayo, y hallar los ángulos entre estos rayos y la línea perpendicular a la del límite entre el terreno normal y el embarrado. ¿Se desvía la dirección del movimiento hacia la perpendicular a la línea límite, o se aleja de la misma? Explicar la solución del ejercicio en términos de refracción.

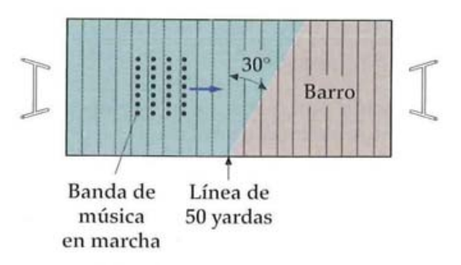


FIGURA 31.55 Problema 34

35 •• En la figura 31.56, la luz se propaga inicialmente en un medio (como el aire) de índice de refracción n_1. Incide con un ángulo θ_1 sobre la superficie de separación de un líquido (como el agua) de índice de refracción n_2. La luz pasa a través de la capa de agua y entra en un vidrio de índice de refracción n_3. Si el ángulo de refracción en el vidrio es θ_3, demostrar que n_1 sen $\theta_1 = n_3$ sen θ_3. Es decir, demostrar que puede despreciarse el segundo medio cuando hay que hallar el ángulo de refracción en el tercer medio. SSM

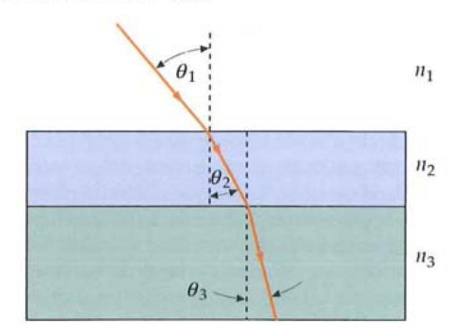


FIGURA 31.56 Problema 35

36 •• Suponga el lector que está intentando pescar mientras vadea un río y observa un pez deslizándose por el agua ante sus ojos. Si la línea que une sus ojos con el pez forma un ángulo de 64° con la horizontal, y asumimos que su arpón sigue en todo momento una trayectoria recta en el aire y en el agua, determine el ángulo con la horizontal con el que deberá lanzarlo para pescar al pez. Considere, además, que el extremo del arpón está a una distancia de 1,50 m por encima de la superficie del agua y que el pez está 1,20 m por debajo.

37 ••• Cuando un observador se coloca erguido en el borde de una piscina mirando al lado opuesto, observa el fondo de éste con un ángulo de 28° con la horizontal y por debajo. Sin embargo, cuando hace lo mismo, pero sentado en el borde de la piscina, lo ve con un ángulo de 14°. Con estos datos empíricos, calcule la anchura y profundidad de la piscina. *Ayuda: tendrá que hacer una estimación de la altura de sus ojos sobre la piscina en cada una de las dos posiciones, de pie y sentado.*

38 ••• La figura 31.57 muestra un haz de luz que incide sobre una placa de vidrio de espesor d e índice de refracción n. (*a*) Determinar el ángulo de incidencia tal que la separación entre el rayo reflejado en la superficie superior y el rayo reflejado en la superficie del fondo que sale por la superior sea un máximo. (*b*) ¿Cuánto vale este ángulo de incidencia si el índice de refracción del vidrio es 1,60? ¿Cuál es la separación de los dos haces si el espesor de la placa de vidrio es 4,0 cm?

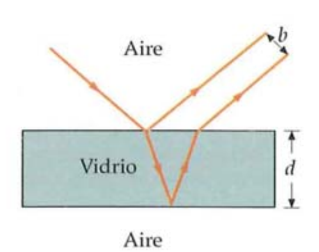


FIGURA 31.57 Problemas 38 y 48

REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

39 • ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión interna total de la luz cuando se desplaza desde el agua y es incidente sobre una superficie agua-aire? SSM

40 • Una superficie de vidrio tiene depositada encima una capa de agua ($n_{\text{vidrio}} = 1{,}50$, $n_{\text{agua}} = 1{,}33$). Luz procedente del vidrio incide sobre la superficie vidrio-agua. Hallar el ángulo crítico para la reflexión interna total.

41 • Un foco luminoso puntual está situado a 5 m por debajo de la superficie de un gran estanque de agua. Hallar el área de la mayor circunferencia en la superficie del estanque a través de cuyo círculo puede emerger directamente luz del foco.

42 •• Un rayo de luz incide en dirección perpendicular a la cara mayor de un prisma, cuya sección es un triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuál es la velocidad de la luz en este prisma justo cuando se produce la reflexión interna total?

43 •• Un foco puntual de luz está situado en el fondo de un depósito de acero y sobre él se coloca una cartulina circular opaca de radio 6 cm. Se añade con mucho cuidado un fluido transparente al depósito, de forma que la cartulina flota en su superficie con su centro situado directamente encima del foco. Un observador situado por encima de la superficie no ve ninguna luz hasta que el fluido tiene una profundidad de 5 cm. ¿Cuál es el índice de refracción de dicho fluido?

44 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una fibra óptica permite que los rayos de luz se propaguen a grandes distancias por reflexión total. Tal como se muestra en la figura 31.58, la fibra óptica consta de un material interno de índice de refracción n_2 y radio b revestido de otro material cuyo índice es $n_3 < n_2$. Se define como *apertura numérica* de la fibra el sen θ_1, donde θ_1 es el ángulo de incidencia del rayo de luz que entra por el extremo de la fibra de tal forma que ésta lo refleja con un ángulo límite en la superficie de separación de los dos materiales, el interno y el de revestimiento. A partir del esquema de la figura, demostrar que la apertura numérica viene dada por $\operatorname{sen}\theta_1 = \sqrt{n_2^2 - n_3^2}$. Considérese que el rayo incide desde el aire. (*Sugerencia: el teorema de Pitágoras puede ser útil para llegar al resultado.*)

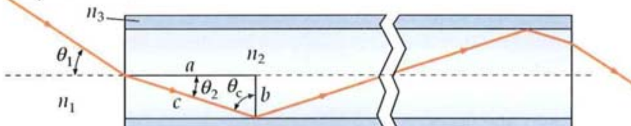


FIGURA 31.58 Problemas 44, 45 y 46

45 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Hallar el ángulo máximo de incidencia del rayo que podría propagarse a través de una fibra óptica con índice de refracción de 1,492, radio del material interno de 50 μm, e índice de refracción del material de revestimiento de 1,489. Véase el problema 44. SSM

46 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Calcular la diferencia de tiempo que necesitan dos pulsos de luz para recorrer 15 km en la fibra del problema 44. Asumir que un pulso entra con incidencia normal y el segundo con el máximo ángulo de incidencia calculado en el problema 45 (véase la figura 31.58). En fibras ópticas, este efecto se denomina *dispersión modal*.

47 ••• Analizar cómo afecta al ángulo crítico una delgada capa de agua sobre una superficie de vidrio. Tómese $n = 1{,}33$ para el agua y $n = 1{,}5$ para el vidrio. (*a*) ¿Cuál es el ángulo crítico de la reflexión total interna en la superficie vidrio-agua? (*b*) ¿Son posibles rayos incidentes de ángulo mayor que θ_c para la refracción vidrio-aire, de modo que los rayos de luz abandonen el vidrio y el agua y pasen al aire?

48 •• Un haz láser incide sobre una placa de vidrio de 3 cm de espesor. El vidrio tiene un índice de refracción de 1,5 y el ángulo de incidencia es 40° (ver figura 31.57). Las superficies superior e inferior del vidrio son paralelas y ambas producen haces reflejados de casi la misma intensidad. Determinar cuál es la distancia b entre dos rayos reflejados adyacentes, medida sobre la perpendicular.

DISPERSIÓN

49 • Un haz de luz incide sobre una superficie plana de vidrio *flint* de silicato con un ángulo de incidencia de 45°. El índice de refracción del vidrio varía con la longitud de onda, como se indica en el gráfico de la figura 31.59. ¿Cuánto menor es el ángulo de refracción de la luz violeta de longitud de onda de 400 nm respecto a la luz roja de 700 nm?

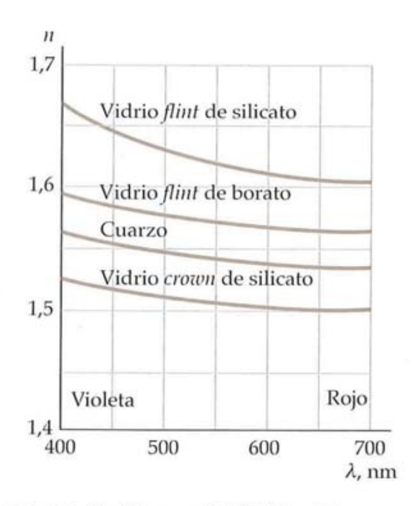


FIGURA 31.59 Problemas 49, 50, 73 y 77

50 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En los sistemas dispersivos, la luz de diferentes frecuencias puede propagarse a diferentes velocidades (este fenómeno se denomina dispersión de la luz). Esto puede causar problemas en sistemas de comunicación basados en fibras ópticas en los que pulsos de luz deberán recorrer grandes distancias en la fibra. Considerando una fibra de vidrio *crown* de silicato, calcular la diferencia de tiempo que necesitan dos pulsos cortos de luz para recorrer 15 km de fibra si el primero tiene una longitud de onda de 700 nm y el segundo de 500 nm.

POLARIZACIÓN

51 • ¿Cuál es el ángulo de polarización en aire que incide en (a) el agua con $n = 1{,}33$ y (b) el vidrio con $n = 1{,}5$? SSM

52 • Un haz de luz polarizado en la dirección horizontal incide sobre una lámina polarizadora. Se observa que sólo el 15 por ciento de la intensidad de la luz incidente se transmite a través de la lámina. ¿Qué ángulo forma el eje de transmisión de la lámina con la horizontal?

53 • Dos láminas polarizadoras tienen sus direcciones de transmisión cruzadas de modo que no pasa luz a su través. Se inserta una tercera lámina entre las dos de modo que su dirección de transmisión forma un ángulo θ con la primera. Se hace incidir luz no polarizada de intensidad I_0 sobre la primera lámina. Hallar la intensidad transmitida a través de las tres si (a) $\theta = 45°$; (b) $\theta = 30°$.

54 • Un haz horizontal de laser de 5 mW cuya luz está polarizada en la dirección vertical incide en un par de polarizadores. El primero está orientado de tal forma que su eje de transmisión es vertical. El eje del segundo forma un ángulo de 27° respecto al eje del primero. ¿Cuál es la potencia del rayo transmitido después de atravesar la segunda lámina?

55 •• El ángulo de polarización para una determinada sustancia es 60°. (a) ¿Cuál es el ángulo de refracción de la luz que incide con este ángulo? (b) ¿Cuál es el índice de refracción de esta sustancia? SSM

56 •• Dos láminas polarizadoras tienen cruzados sus ejes de transmisión, por lo que no pasa la luz. Se inserta una tercera lámina de modo que su eje de transmisión forme un ángulo θ con el de la primera lámina, como en el problema 53. Calcular la intensidad de la luz transmitida en función de θ. Demostrar que la intensidad transmitida a través de las tres láminas es máxima cuando $\theta = 45°$.

57 •• Si la lámina polarizadora intermedia del problema 56 está girando con una velocidad angular ω alrededor de un eje paralelo al haz luminoso, hallar la intensidad luminosa transmitida a través de las tres láminas en función del tiempo. Suponer que $\theta = 0$ en el instante $t = 0$.

58 •• **HOJA DE CÁLCULO** Un sistema de $N + 1$ láminas polarizadoras ideales está dipuesto de forma que cada lámina está girada con respecto a la que la precede un ángulo de $\pi/(2N)$ radianes. Una onda plana, linealmente polarizada de intensidad I_0 incide normalmente al sistema. La luz incidente se polariza a lo largo del eje de transmisión de la primera lámina y, por lo tanto, es perpendicular al eje de transmisión del eje de la última. (a) Demostrar que la intensidad transmitida a través del sistema de láminas viene dada por la expresión $I_0 \cos^{2N}[\pi/(2N)]$. (b) Usando una hoja de cálculo o un programa de gráficos, dibujar la intensidad transmitida en función de N para valores de N desde 2 hasta 100. (c) ¿Cuál es la dirección de polarización del rayo transmitido en cada caso?

59 •• **HOJA DE CÁLCULO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El dispositivo descrito en el problema 58 podría servir como *polarizador por rotación*, es decir, un sistema que cambia el plano de polarización de una dirección a otra. La eficacia de tal dispositivo se mide mediante la relación de la intensidad de salida en una dirección de polarización dada con la intensidad de entrada. El resultado del problema anterior sugiere que la mejor manera para hacer esto debería ser mediante un número N grande. Pero en un polarizador real, se pierde una pequeña intensidad con independencia de la polarización de entrada. Para cada polarizador, asumir que la intensidad transmitida es el 98% de la cantidad predicha por la ley de Malus. Usando una **hoja de cálculo**, determinar el número óptimo de láminas que deberían usarse para girar la polarización 90°. SSM

60 •• Demostrar matemáticamente que una onda linealmente polarizada puede considerarse como la superposición de una onda polarizada circularmente hacia la derecha y otra polarizada circularmente hacia la izquierda.

61 •• Supongamos que en el problema 53 la lámina del medio se reemplaza por dos láminas polarizadoras. Si el ángulo entre las direcciones de polarización de las láminas adyacentes es 30°, ¿cuál es la intensidad de la luz transmitida? Comparar esta intensidad con la obtenida en el problema 53.

62 •• Demostrar que el campo eléctrico de una onda circularmente polarizada que se propaga en la dirección x puede expresarse mediante $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)\hat{j} + E_0 \cos(kx + \omega t)\hat{k}$.

63 •• Una onda polarizada circularmente se dice que está polarizada a la derecha cuando los campos eléctrico y magnético giran en sentido horario vistos a lo largo de la dirección de propagación, y se dice que está polarizada a la izquierda cuando los campos giran en sentido antihorario. (a) ¿Cuál es el sentido de la polarización circular correspondiente a la onda descrita por la expresión del problema 62? (b) ¿Cuál sería la expresión para una onda polarizada circularmente como en el problema 60 pero rotando en el sentido opuesto? SSM

FUENTES LUMINOSAS

64 • Un láser helio-neón emite luz de longitud de onda 632,8 nm y posee una potencia de 4 mW. ¿Cuántos fotones por segundo emite este láser?

65 •• El primer estado excitado de un átomo de un gas es 2,85 eV por encima del estado fundamental. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación correspondiente a la absorción por resonancia? (*b*) Si el gas se irradia con luz monocromática de 320 nm de longitud de onda, ¿cuál es la longitud de onda de la luz emitida por dispersión Raman?

66 •• Un gas se irradia con luz ultravioleta monocromática de longitud de onda 368 nm. Se observa luz dispersada de la misma longitud de onda y también de 658 nm. Suponiendo que los átomos del gas antes de la irradiación se encontrasen en su estado fundamental, determinar la diferencia de energía entre el estado fundamental y el estado atómico excitado por la irradiación.

67 •• El sodio tiene los estados excitados 2,11 eV, 3,2 eV y 4,35 eV por encima del estado fundamental. (*a*) ¿Cuál es la máxima longitud de onda de la radiación que puede producirse en la fluorescencia por resonancia? ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación fluorescente? (*b*) ¿Qué longitud de onda resultará en la excitación del estado 4,35 eV por encima del estado fundamental? Al excitarse dicho estado, ¿cuáles son las posibles longitudes de onda de la fluorescencia por resonancia que podrían observarse? SSM

68 •• El helio ionizado con una sola carga negativa es un átomo semejante al hidrógeno con una carga nuclear de $2e$. Sus niveles energéticos vienen dados por $E_n = -4E_0/n^2$, donde $E_0 = 13{,}6$ eV. Si un haz de luz blanca visible se envía a través de un gas de este helio ionizado, ¿a qué longitudes de onda se encontrarán líneas oscuras en el espectro de la radiación transmitida? (Puede asumirse que los iones del gas antes de radiar están todos en un estado de energía E_1.)

69 • Un pulso de un láser de rubí tiene una potencia media de 10 MW y una duración de 1,5 nanosegundos. (*a*) ¿Cuál es la energía total del pulso? (*b*) ¿Cuántos fotones emite? SSM

PROBLEMAS GENERALES

70 • Un haz de luz roja de 700 nm de longitud de onda en el aire se propaga en el agua. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda en el agua? (*b*) ¿Un nadador bajo el agua observará el mismo color o un color diferente para esta luz?

71 • El ángulo crítico para la reflexión total interna de una sustancia es 48°. ¿Cuál es su ángulo de polarización? SSM

72 •• Demostrar que cuando un espejo plano es girado un ángulo θ alrededor de un eje localizado en el plano de dicho espejo, un rayo que se refleje y que sea perpendicular al eje de rotación modifica su trayectoria 2θ.

73 •• Utilizar la figura 31.59 para calcular los ángulos críticos correspondientes a la reflexión interna total de la luz procedente de vidrio *flint* de silicato que incide sobre una interfase vidrio-aire: (*a*) si la luz es violeta de longitud de onda 400 nm y (*b*) si es roja de longitud de onda 700 nm. SSM

74 •• Sobre una lámina de material transparente incide luz con un ángulo θ_1, como se ve en la figura 31.60. La lámina tiene un espesor t y un índice de refracción n. Demostrar que $n = \text{sen}(\theta_1)/\text{sen}[\text{arctg}(d/t)]$, siendo d la distancia indicada en la figura.

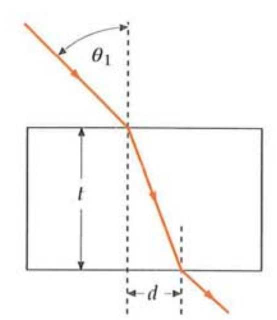


FIGURA 31.60 Problema 74

75 •• Un rayo de luz comienza en el punto $x = -2$ m, $y = 2$ m, incide sobre un espejo situado en el plano xz en un cierto punto x y se refleja pasando por el punto $x = 2$ m, $y = 6$ m. (*a*) Hallar el valor de x que hace que sea mínima la distancia total recorrida por el rayo. (*b*) ¿Cuál es el ángulo de incidencia sobre el plano reflector? (*c*) ¿Cuál es el ángulo de reflexión?

76 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una ventana de Brewter es usada en láseres para transmitir de forma preferencial la luz con una determinada polarización, tal como se muestra en la figura 31.61. Demostrar que si θ_{P1} es el ángulo de polarización para la superficie de la interfase n_1/n_2, θ_{P2} es el ángulo de polarización para la interfase n_2/n_1.

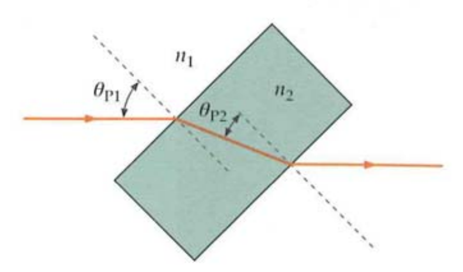


FIGURA 31.61 Problema 76

77 •• Con lo datos proporcionados en la figura 31.59, calcular el ángulo de polarización para la interfase aire-vidrio, utilizando luz de longitud de onda 550 nm en cada uno de los cuatro tipos de vidrio mostrados en la figura. SSM

78 •• Un rayo de luz atraviesa un prisma cuyo ángulo del vértice es α, tal como indica la figura 31.62. La intersección del rayo y la bisectriz del ángulo α forman un ángulo recto. Demostrar que el *ángulo de desviación*, δ, está relacionado con el ángulo α y con el índice de refracción del material del que está construido el prisma, mediante la expresión $\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha + \delta)\right] = n\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

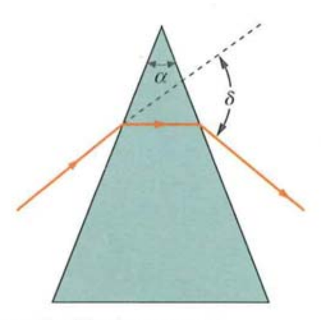


FIGURA 31.62 Problemas 78 y 84

79 •• (*a*) En el caso de un rayo de luz en el interior de un medio transparente que tiene una interfase plana con el vacío, demostrar que el ángulo de polarización y el ángulo crítico para la reflexión interna total satisfacen la expresión $\text{tg}\,\theta_p = \text{sen}\,\theta_c$. (*b*) ¿Qué ángulo es el mayor? SSM

80 •• Un rayo de luz incide desde el aire sobre una sustancia transparente con un ángulo de 58,0° respecto a la normal. Se observa que los rayos reflejado y refractado son mutuamente perpendiculares. (*a*) ¿Cuál es el índice de refracción de la sustancia transparente? (*b*) ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión interna total en esta sustancia?

81 •• Un rayo de luz en un vidrio *flint* denso con un índice de refracción 1,655 incide sobre la cara exterior del mismo. Sobre la superficie del vidrio se condensa un líquido desconocido. La reflexión total interna sobre la superficie vidrio-líquido es 53,7°. (*a*) ¿Cuál es el índice de refracción del líquido desconocido? (*b*) Si se elimina el líquido, ¿cuál

es el ángulo de incidencia para la reflexión interna total? (*c*) Para el ángulo de incidencia calculado en el apartado (*b*), ¿cuál es el ángulo de refracción del rayo dentro de la película de líquido? ¿Emergerá un rayo a través de la película de líquido hacia el aire que está encima? Suponer que el vidrio y el líquido tienen superficies perfectamente planas.

82 ••• (*a*) Demostrar que la intensidad transmitida a través de una placa de vidrio con un índice de refracción n y rodeada de aire para luz con incidencia normal vale, aproximadamente, $I_T = I_0[4n/(n+1)^2]^2$. (*b*) Utilizando la fórmula del apartado (*a*) encontrar la relación entre las intensidades incidente y transmitida a través de las N láminas paralelas de vidrio cuando la incidencia es normal. (*c*) ¿Cuántas láminas de vidrio de índice de refracción de 1,5 se requieren para reducir la intensidad hasta llegar al 10% de la intensidad incidente?

83 ••• La ecuación 31.14 nos da la relación existente entre el ángulo de desviación ϕ_d de un rayo de luz incidente sobre una gota esférica de agua en función del ángulo de incidencia θ_1 y del índice de refracción del agua. (*a*) Suponer que $n_{aire} = 1$ y derivar ϕ_d respecto a θ_1. [*Indicación*: si $y = \text{arcsen}\, x$, $dy/dx = (1 - x^2)^{-1/2}$.] (*b*) Hacer $d\phi_d/d\theta_1 = 0$ y demostrar que el ángulo de incidencia θ_{1m} correspondiente a la desviación mínima viene dado por $\cos\theta_{1m} = \sqrt{\frac{1}{3}(n^2 - 1)}$. (*c*) El índice de refracción para una determinada luz roja es de 1,3318 y para otra azul de 1,3435. Utilizar el resultado de la parte (*a*) para hallar la separación angular de estos colores en el arco iris.

84 ••• Demostrar que el ángulo de desviación δ es un mínimo si el ángulo de incidencia es tal que el rayo pasa a través del prisma simétricamente, como se indica en la figura 31.62.

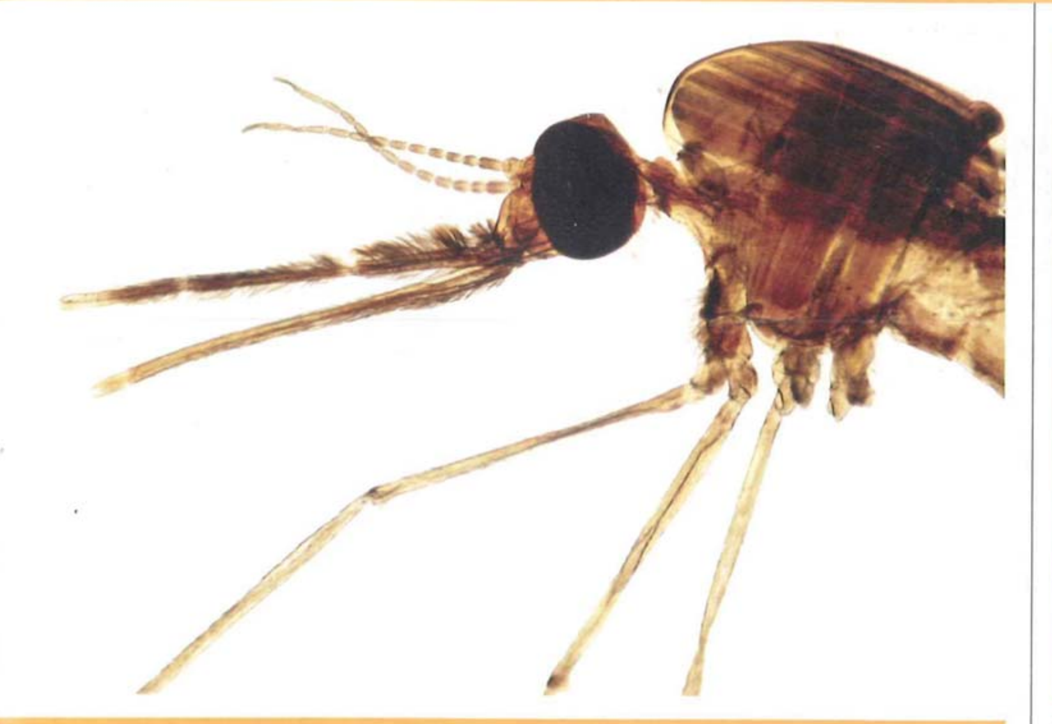




IMAGEN DE LA HEMBRA DE UN MOSQUITO OBTENIDA CON UN MICROSCOPIO. *(Nuridsany & Perennou/Photo Researchers.)*

Imágenes ópticas

¿Cómo se puede determinar el aumento de un microscopio compuesto? (Véase el ejemplo 32.15.)

La longitud de onda de la luz suele ser muy pequeña en comparación con el tamaño de los obstáculos o aberturas que se encuentra a su paso, por lo que, en general, podemos despreciar los efectos de la difracción (la desviación de las ondas alrededor de los bordes y esquinas). Por consiguiente, el modelo de rayos u Óptica geométrica, que considera que las ondas se propagan en línea recta, puede considerarse válido.

En este capítulo, aplicaremos las leyes de la reflexión y de la refracción para estudiar la formación de imágenes por espejos y lentes.

32.1 ESPEJOS

ESPEJOS PLANOS

La figura 32.1 muestra un haz de rayos luminosos que proceden de una fuente puntual o punto objeto P, y divergen exactamente como si procediesen de un punto P', detrás del plano del espejo. El punto P' se denomina **imagen del objeto** P. Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que pudieran proceder de una fuente situada en P' sin que hubiese espejo. El plano del espejo es perpendicular al plano bisector de la recta que une el punto objeto P y el punto imagen P', como se muestra. La imagen se denomina **imagen virtual** debido a que la luz no procede realmente de la imagen. La imagen puede verse siempre que el ojo esté en

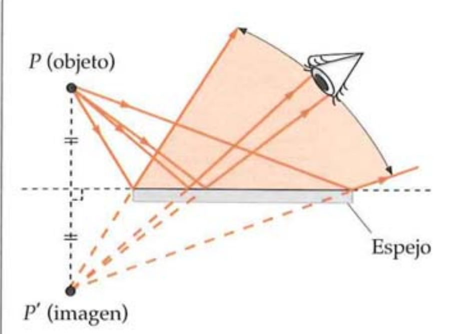


FIGURA 32.1 Imagen formada por un espejo plano. Los rayos procedentes del punto P que inciden sobre el espejo y entran en el ojo parecen proceder del punto imagen P', detrás del espejo. El ojo puede ver la imagen siempre que se encuentre en la región sombreada.

cualquier lugar de la región sombreada, de modo que una línea trazada desde la imagen al ojo pase cortando el espejo. En la figura se observa que el objeto no necesita estar directamente delante del espejo. Siempre que el objeto no esté detrás del plano del espejo, existe una posición en la cual puede situarse el ojo para ver la imagen.

Si levantamos la mano derecha frente a un espejo, la imagen que vemos es del mismo tamaño, pero parece una mano izquierda (figura 32.2). Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una **inversión en profundidad**; es decir, la mano derecha se transforma en una mano izquierda porque el espejo ha invertido la palma y el dorso de la mano. En la figura 32.3 se ilustra también esta inversión en profundidad. La figura 32.4 muestra la imagen especular de un sistema de coordenadas rectangular. El espejo transforma un sistema de coordenadas ordenado según la regla de la mano derecha, denominado normalmente directo, para el cual $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, en un sistema de coordenadas invertido, cuyo orden quedaría regulado por una análoga regla de la mano izquierda, para el cual $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$.

En la figura 32.5, se muestra una flecha de altura y paralela a un espejo plano a una distancia s del mismo. Podemos localizar la imagen de la punta de la flecha (y de cualquier otro punto de ésta) dibujando dos rayos. Uno de ellos se dibuja perpendicular al espejo. Incide en el espejo en el punto A y se refleja hacia atrás sobre sí mismo. El otro rayo, que incide en el espejo formando un ángulo θ con la normal al espejo, se refleja formando un ángulo θ igual con el eje x. La prolongación de estos dos rayos hacia atrás, detrás del espejo, sitúa la imagen de la punta de la flecha, como se indica con las líneas a trazos en la figura. Podemos ver en ella que la imagen está detrás del espejo a la misma distancia que el objeto está delante de él, y que la imagen es derecha (apunta en el mismo sentido que el objeto) y tiene el mismo tamaño que el objeto.

En la figura 32.6, se ilustra la formación de imágenes múltiples mediante dos espejos planos que forman un ángulo cualquiera entre sí. Es frecuente ver este fenómeno en las tiendas de ropa, que disponen de sistemas con dos o tres espejos adyacentes. La luz procedente del punto objeto P reflejada en el espejo 1 llega al espejo 2 como si procediese del punto imagen P'_1. La imagen P'_1 es el objeto para el espejo 2, y su imagen en éste es, a su vez, un punto $P''_{1,2}$. Se formará esta imagen siempre que el punto imagen P'_1 esté delante del plano del espejo 2. La imagen que aparece en el punto P'_2 se debe a los rayos procedentes del objeto que se reflejan directamente en el espejo 2. Como P'_2 está detrás del plano del espejo 1, no puede servir de punto objeto para formar otra imagen en el espejo 1. El punto imagen P'_2 no puede servir como objeto para el espejo 1 porque la geometría impide que los rayos



FIGURA 32.2 La imagen de una mano derecha en un espejo plano es una mano izquierda. Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una inversión en profundidad. *(Demitrios Zangos.)*

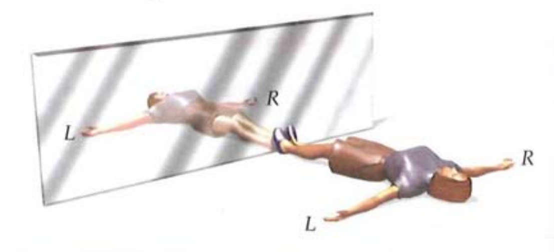


FIGURA 32.3 Una persona tendida en el suelo con sus pies en contacto con un espejo. La imagen está invertida en su dimensión de profundidad.

No se debe cometer el error de pensar que un espejo produce una inversión izquierda-derecha sino delante-detrás.

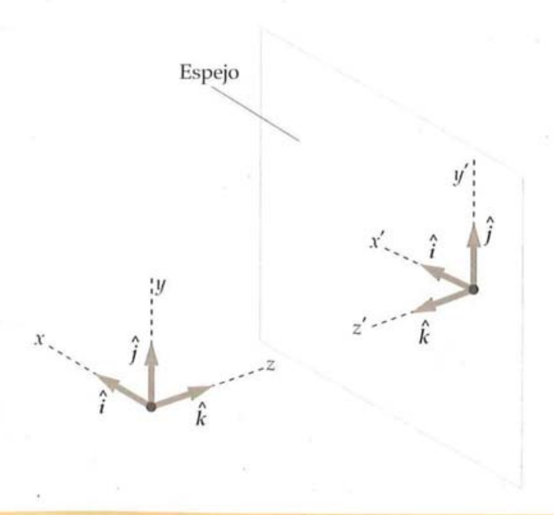


FIGURA 32.4 Imagen de un sistema de coordenadas rectangulares en un espejo plano. El sentido de la flecha a lo largo del eje z está invertido en la imagen. La imagen del sistema de coordenadas original, que es directo (concordante con la regla de la mano derecha), de forma que $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, resulta invertida (concordante con una supuesta regla de la mano izquierda), de modo que $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$.

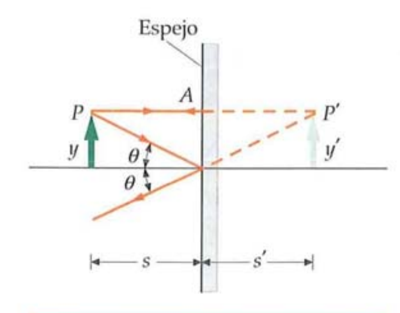


FIGURA 32.5 Diagrama de rayos para localizar la imagen de una flecha en un espejo plano.

FIGURA 32.6 Imágenes formadas por dos espejos planos. P'_1 es la imagen del objeto P en el espejo 1, y P'_2 es la imagen en el espejo 2. El punto $P''_{1,2}$ es la imagen de P'_1 en el espejo 2 vista cuando los rayos procedentes del objeto se reflejan primero en el espejo 1 y luego en el espejo 2. La imagen P'_2 no da ninguna imagen en el espejo 1 porque se encuentra detrás de él.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 32.1

Demostrar que una punto objeto y sus imágenes generadas por dos espejos planos están en posiciones equidistantes con respecto a la intersección de los dos espejos. (El círculo de la figura 32.6 es equidistante de tal intersección.)



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 32.2

¿Cuál es la imagen que Ben ve de él mismo?

procedentes de P que se reflejan directamente en el espejo 2 puedan chocar con el espejo 1. Una manera alternativa de explicar esto es que debido a que P'_2 está detrás del plano del espejo 1, la imagen P'_2 no puede servir como objeto para el espejo 1. El número de imágenes formadas por dos espejos depende del ángulo entre éstos y la posición del objeto.

Supongamos que un observador llamado Ben ubicado en P, lleva puesta una camiseta en la que aparece pintada la palabra BEN y está saludando con su mano derecha. Por otro lado, supongamos que nosotros estamos en el campo visual. Podemos ver una imagen de BEN en tres lugares diferentes. Para la imagen de P'_1 yP'_2, Ben saluda con su mano izquierda y la palabra pintada aparece como ИƎB. Sin embargo, para la imagen de $P''_{1,2}$, Ben saluda con la derecha y la palabra aparece como BEN. Para la imagen de $P''_{1,2}$ se han producido dos inversiones, una por cada reflexión, de tal forma que el resultado es como si no hubiera habido ninguna inversión.

La figura 32.7 ilustra el hecho de que un rayo horizontal reflejado en dos espejos verticales perpendiculares entre sí invierte exactamente su sentido con independencia del ángulo que el rayo forme con los espejos. Además, si se colocan tres espejos perpendiculares entre sí, como las caras de una esquina interior de una caja, todo rayo incidente en uno cualquiera de los espejos procedente de cualquier dirección invierte exactamente su sentido. Un conjunto de tres espejos dispuestos de esta forma recibe el nombre de reflector esquina de cubo. En 1969, los astronautas del *Apolo* 11 colocaron una serie de reflectores de este tipo en la Luna, en el Mar de la Tranquilidad. Un haz láser enviado desde la Tierra dirigido a los espejos se refleja retornando al mismo lugar de la Tierra. Se ha utilizado un haz de este tipo para medir la distancia a los espejos con una precisión de unos centímetros, midiendo el tiempo que emplea la luz en llegar hasta los espejos y regresar de nuevo.

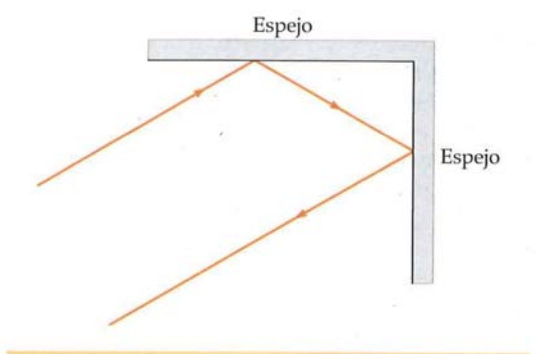


FIGURA 32.7 Un rayo que incide sobre uno de los espejos planos perpendiculares se refleja en el segundo espejo en sentido opuesto al original, cualquiera que sea el ángulo de incidencia.

ESPEJOS ESFÉRICOS

La figura 32.8 muestra un haz de rayos que proceden de un punto P situado en el eje de un espejo esférico cóncavo y que después de reflejarse en él convergen en el punto P'. (Un espejo cóncavo tiene forma de cueva cuando miramos hacia él.) Los rayos divergen entonces desde este punto como si hubiese un objeto en el mismo. Esta imagen se denomina **imagen real**, debido a que la luz realmente emana del punto imagen. Puede ser vista por un ojo cualquiera situado a la izquierda de la imagen y que mire hacia el espejo. Podría observarse también sobre una pequeña pantalla* visora de vidrio o una pequeña película fotográfica colocada en el

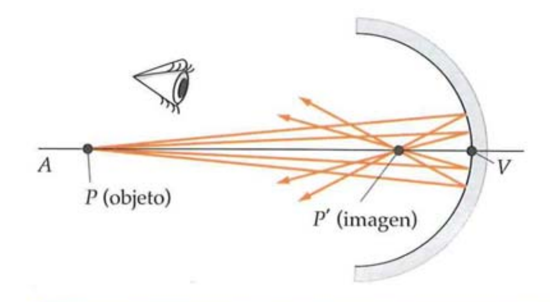


FIGURA 32.8 Los rayos procedentes de un punto objeto P situado sobre el eje AV de un espejo esférico cóncavo forman una imagen en P'. La imagen es nítida si los rayos inciden sobre el espejo cerca del eje y si los rayos son casi paralelos al eje.

* Una pantalla deberá producir reflexión o tansmisión difusa de la luz. Se usan habitualmente vidrios esmerilados para este propósito. La pantalla deberá ser relativamente pequeña, de tal forma que parte de la luz de la fuente llega al espejo sin contactar con la pantalla.

punto imagen. Una imagen virtual, como la que se forma en un espejo plano, no puede ser observada en una pantalla situada en el punto imagen puesto que allí no existe luz. A pesar de esta diferencia entre imagen real y virtual, los rayos luminosos que divergen de una imagen real y los que parecen diverger de una imagen virtual son idénticos para el ojo.

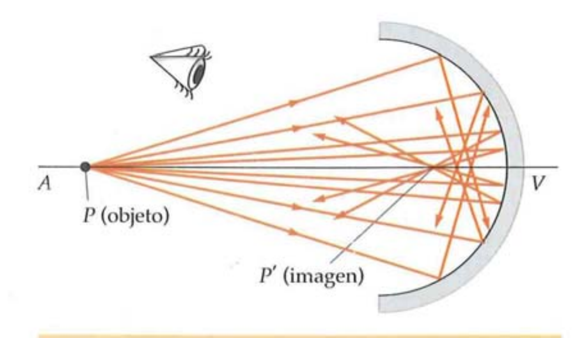


FIGURA 32.9 Aberración esférica de un espejo. Los rayos no-paraxiales, que inciden sobre el espejo en puntos alejados del eje *AV*, no se reflejan pasando por el punto imagen *P′* que definen los rayos paraxiales. Estos rayos no-paraxiales forman una imagen borrosa.

En la figura 32.9, vemos que sólo los rayos que inciden en el espejo en los puntos próximos al eje *AV* se reflejan pasando por el punto imagen. Estos rayos se denominan **rayos paraxiales**. Los rayos que inciden en puntos del espejo alejados de su eje pasan cerca del punto imagen, pero no exactamente por él. Debido a estos rayos la imagen aparece borrosa, efecto denominado **aberración esférica**. La imagen puede hacerse más nítida bloqueando el espejo por los extremos, de modo que no incidan en él rayos que no sean paraxiales. Aunque la imagen es entonces más nítida, se reduce su brillo debido a que se refleja menos intensidad luminosa hacia el punto imagen.

Queremos obtener una ecuación que relacione la posición del punto imagen con el punto objeto. Para hacer esto, dibujamos dos rayos (figura 32.10*a*) desde una posición arbitraria en la que colocamos el punto objeto *P*. Un rayo pasa por el punto *C*, centro de curvatura del espejo, y otro rayo se refleja en un punto arbitrario *A* del espejo. El punto imagen *P′* está localizado en el punto de intersección de estos dos rayos después de haberse reflejado en el espejo. Utilizando la ley de la reflexión, obtenemos la localización del punto *P′*. El rayo que pasa por el punto *C* choca con el espejo con incidencia normal y se refleja sobre sí mismo (invirtiendo el sentido). El rayo que choca en el punto *A* del espejo, lo hace con un ángulo θ con respecto a la normal. (Cualquier línea normal a la superficie esférica pasa por el centro de curvatura.) La distancias de la imagen y el objeto, *s* y *s′*, respectivamente, se miden tomando como referencia el plano tangente al espejo en su vértice *V*. El ángulo β es exterior al triángulo *PAC*, por lo que $\beta = \alpha + \theta$. De forma similar, a partir del triángulo *PAP′* se deduce $\gamma = \alpha + 2\theta$. Eliminado θ de estas ecuaciones, tenemos que



Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Geometría y Trigonometría

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

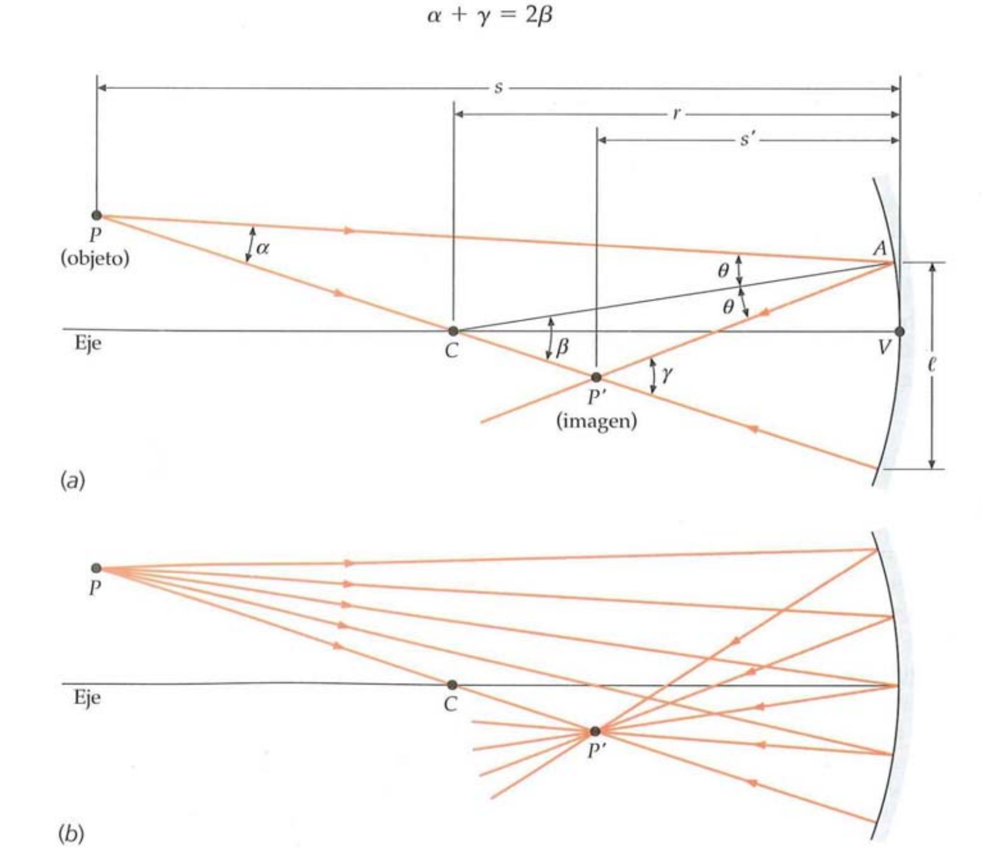


FIGURA 32.10 (*a*) Geometría para el cálculo de la distancia imagen *s′* a partir de la distancia objeto *s* y del radio de curvatura *r*. El ángulo β es externo al triángulo *PAC* y, por lo tanto, $\beta = \alpha + \theta$. De igual modo, en el triángulo *PAP′*, $\gamma = \alpha + 2\theta$. Eliminando θ de estas ecuaciones resulta $2\beta = \alpha + \gamma$. La ecuación 34.1 se obtiene directamente si admitimos las siguientes aproximaciones de ángulo pequeño: $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$ y $\gamma \approx \ell/s'$. (*b*) Los rayos paraxiales procedentes del punto objeto *P* pasan por el punto imagen *P′* después de reflejarse en el espejo.

Suponiendo que todos los rayos son paraxiales, mediante la aproximación de ángulos pequeños se obtiene: $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$, y $\gamma \approx \ell/s'$. Y de todo lo anterior se deduce la ecuación 32.1:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{r} \tag{32.1}$$

Esta ecuación relaciona las distancias del objeto y la imagen con el radio de curvatura. Lo importante de esta ecuación es que no depende de la localización del punto A. Por lo tanto, la ecuación es válida independientemente del punto de contacto del rayo con el espejo, siempre y cuando el punto A esté en la superficie del mismo y los rayos sean paraxiales. Es decir, como se muestra en la figura 32.10*b*, *todos los rayos* paraxiales procedentes de un punto objeto, después de reflejarse en el espejo, pasan a través de un *único* punto imagen.

La ecuación 32.1 especifica la posición del punto imagen con respecto al vértice V del espejo. Ahora podemos determinar la posición de la imagen en función de su distancia medida desde el eje. Primero dibujaremos un único rayo (figura 32.11) que se refleje en el vértice del espejo. Los dos triángulos formados son semejantes; por lo tanto, usando las relaciones de semejanza, tenemos que:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \tag{32.2}$$

El signo negativo significa que y'/y es negativo, ya que los puntos P y P' están en lados opuestos con respecto al eje. De esta forma, si y es positivo, y' negativo, y viceversa.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.1

Demostrar la siguiente expresión para los puntos objeto e imagen de la figura 32.11:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{r/2}{s-(r/2)}$$

Sugerencia: despejar s' de la ecuación 32.1 y aplicar el resultado en la ecuación 32.2.

Cuando la distancia del objeto es grande en comparación con el radio de curvatura del espejo, el término $1/s$ de la ecuación 32.1 es mucho menor que $2/r$ y puede despreciarse. Es decir, para $s \to \infty$, $s' \to \frac{1}{2}r$, donde s' es la distancia imagen. Esta distancia se denomina **distancia focal** del espejo, y el plano en el que resultan enfocados los rayos que inciden en el espejo paralelos a su eje, se denomina **plano focal**. La intersección del eje con el plano focal es el **punto focal** F, como se ilustra en la figura 32.12*a*. (Una vez más, sólo los rayos paraxiales se enfocan en un solo punto.)

$$f=\tfrac{1}{2}r \tag{32.3}$$

DISTANCIA FOCAL DE UN ESPEJO

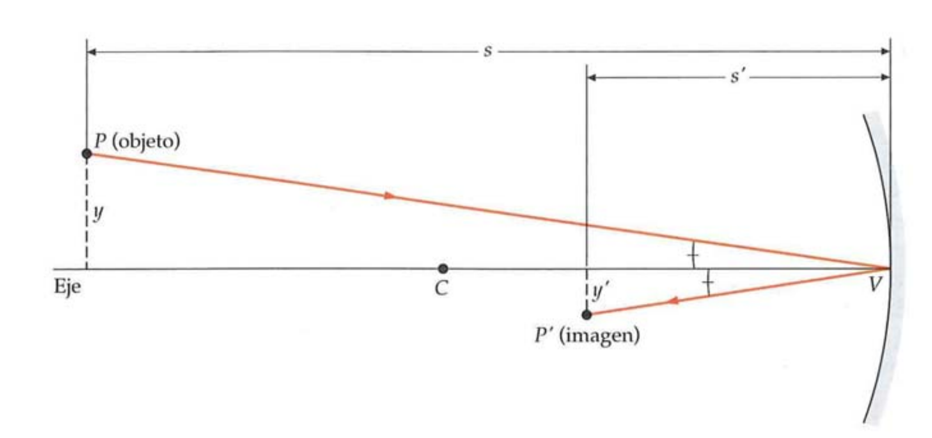


FIGURA 32.11 En esta figura se representa geométricamente, para facilitar su cálculo, la posición del punto imagen, y', con respecto a su distancia del eje.

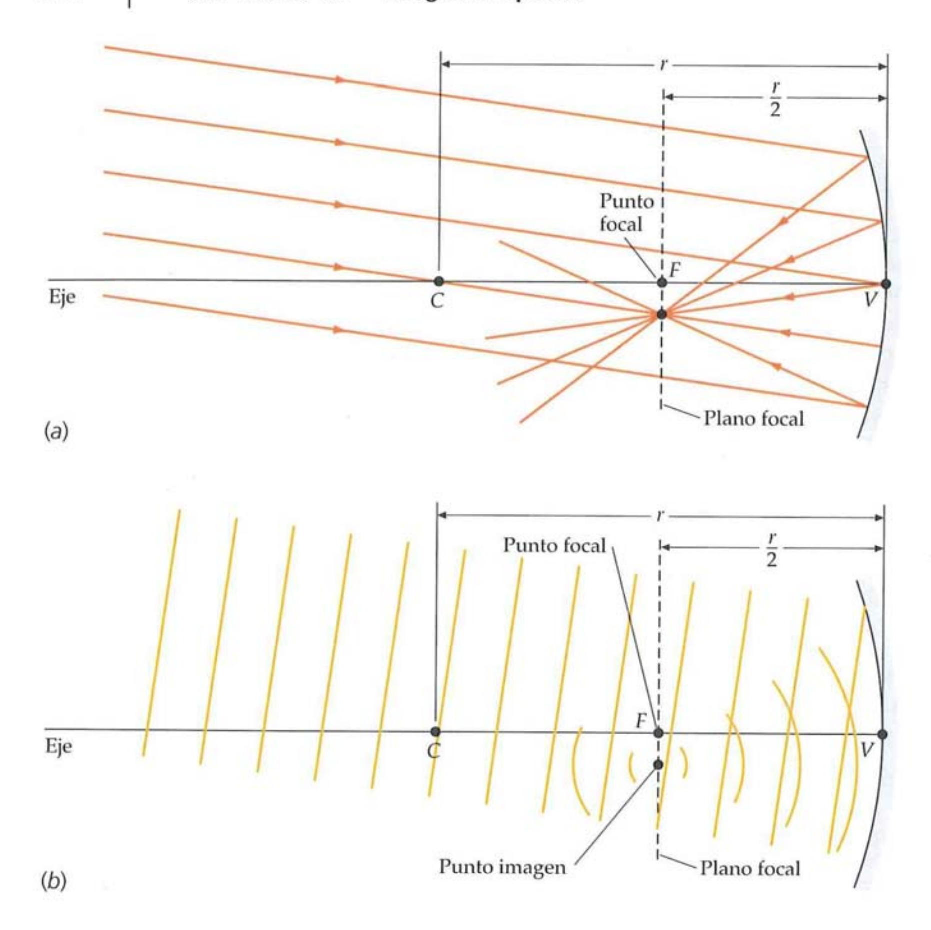


FIGURA 32.12 (*a*) Rayos paralelos que inciden sobre un espejo cóncavo y se reflejan en un punto del plano focal a la izquierda del espejo, siendo la distancia focal $\frac{1}{2}r$. (*b*) Los frentes de onda incidentes son ondas planas; después de la reflexión se convierten en ondas esféricas que convergen en el punto focal y después divergen de éste.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.2

Demostrar que despejando s' en la ecuación 32.1 obtenemos

$$s' = \frac{r}{2 - \frac{r}{s}}$$

y que de esta ecuación se deduce que si $s \rightarrow \infty$, $s' \rightarrow \frac{1}{2}r$.

La distancia focal de un espejo esférico es igual a la mitad del radio de curvatura. En función de la distancia focal f, la ecuación 32.1 toma la forma

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad 32.4$$

ECUACIÓN DEL ESPEJO

La ecuación 32.4 se denomina **ecuación del espejo**.

Cuando un objeto está muy lejos del espejo, los frentes de onda son aproximadamente planos, como se ve en la figura 32.12*b*, y los rayos son paralelos. Obsérvese cómo en esta figura los bordes del frente de onda inciden en la superficie del espejo cóncavo antes que la porción central cercana al eje, dando como resultado un frente de onda esférico después de la reflexión. La figura 32.13 muestra los frentes de onda y los rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre un espejo convexo. En este caso, incide en primer lugar la parte central del frente de onda y las ondas reflejadas parece que procedan del punto focal detrás del espejo.

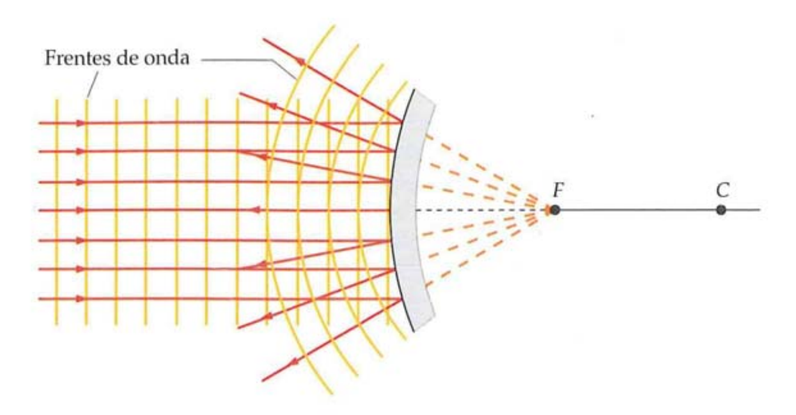


FIGURA 32.13 Reflexión de ondas planas en un espejo convexo. Los frentes de onda reflejados son esféricos, como si emanasen del punto focal F, detrás del espejo. Los rayos son perpendiculares a los frentes de onda y parece que divergen de F.

En la figura 32.14, se ilustra una propiedad de las ondas llamada reversibilidad. Si invertimos el sentido de un rayo reflejado, la ley de la reflexión asegura que el rayo reflejado coincidirá con el rayo incidente original, pero tendrá sentido opuesto. (La reversibilidad se cumple también con los rayos refractados, que se estudiarán en secciones posteriores.) Así pues, si tenemos una imagen real de un objeto que se ha formado mediante una superficie reflectante (o refractante), podemos colocar un objeto en el punto imagen y se formará una nueva imagen real en la posición del objeto original.

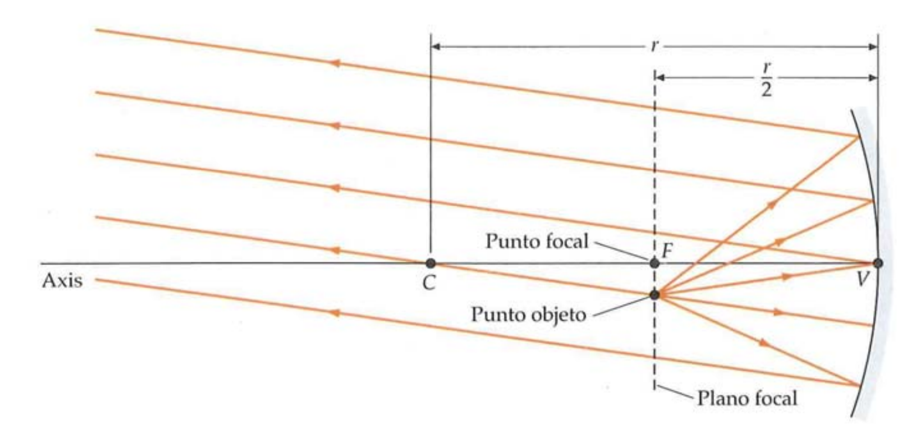


FIGURA 32.14 Reversibilidad. Los rayos que divergen de un punto objeto situado en el plano focal de un espejo cóncavo son reflejados por el espejo como rayos paralelos. Los rayos siguen las mismas trayectorias que en la figura 32.12*a*, pero en sentido opuesto.

Ejemplo 32.1 Imagen en un espejo cóncavo

Un punto objeto está a 12 cm de un espejo cóncavo y 3 cm por encima del eje. El radio de curvatura del espejo es 6 cm. Determinar (*a*) la distancia focal del espejo, (*b*) la distancia imagen y (*c*) la posición de la imagen con respecto al eje.

PLANTEAMIENTO La distancia focal de un espejo esférico es la mitad del radio de curvatura. Una vez que conozcamos la distancia focal, la distancia imagen se determina utilizando la ecuación 32.4 y la distancia de la imagen medida desde el eje mediante la ecuación 32.2. La distancia imagen es la distancia a la que está la imagen medida desde el plano tangente al espejo que pasa por su vértice.

SOLUCIÓN

(*a*) La distancia focal es la mitad del radio de curvatura:

$$f = \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}(6{,}0\text{ cm}) = \boxed{3{,}0\text{ cm}}$$

(*b*) 1. Utilizar la ecuación del espejo para determinar la distancia imagen s':

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

o

$$\frac{1}{12\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{3{,}0\text{ cm}}$$

2. Despejar s':

$$\frac{1}{s'} = \frac{4}{12\text{ cm}} - \frac{1}{12\text{ cm}} = \frac{3}{12\text{ cm}}$$

$$s' = \boxed{4{,}0\text{ cm}}$$

(*c*) 1. Utilizar la ecuación 32.2 para calcular la distancia y' de la imagen al eje:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

2. Despejar y':

$$y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{4{,}0\text{ cm}}{12\text{ cm}}(3{,}0\text{ cm}) = \boxed{-1{,}0\text{ cm}}$$

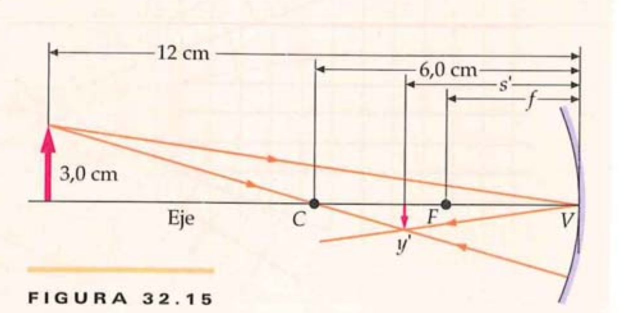


FIGURA 32.15

COMPROBACIÓN En la figura 32.15, se han dibujado dos rayos que salen de la punta de la flecha para localizar el correspondiente punto imagen; se elige uno que pase por C y el que se refleja en el espejo en V. Se deben elegir dos rayos que sean fáciles de trazar. A partir de esta figura, se puede ver que los resultados de la solución son plausibles.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.3 Un espejo cóncavo tiene una distancia focal de 4 cm. (*a*) ¿Cuál es su radio de curvatura? (*b*) Determinar la distancia imagen de un objeto situado a 2 cm del espejo.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 32.3

¿Cuál es el radio de curvatura de un espejo plano?

DIAGRAMAS DE RAYOS PARA LOS ESPEJOS

Un método que resulta útil a la hora de situar imágenes consiste en la construcción de un **diagrama de rayos**. Este método se explica en la figura 32.16, donde el objeto es una figura humana perpendicular al eje a una distancia s del espejo. Mediante una selección razonable de los rayos que parten desde la cabeza, podemos localizar rápidamente la imagen. Existen tres **rayos principales** que conviene utilizar en el diagrama:

1. El **rayo paralelo** al eje. Este rayo se refleja pasando por el punto focal.
2. El **rayo focal**, que pasa por el punto focal. Este rayo se refleja paralelamente al eje.
3. El **rayo radial**, que pasa por el centro de curvatura. Este rayo incide sobre el espejo perpendicularmente a su superficie y, por ello, se refleja coincidiendo consigo mismo.

RAYOS PRINCIPALES CORRESPONDIENTES A UN ESPEJO

Estos rayos se muestran en la figura 32.16. La intersección de dos rayos paraxiales cualesquiera sitúa el punto imagen de la cabeza. Los tres rayos principales son más fáciles de dibujar que cualquier otro rayo. Normalmente, se dibujan dos rayos para localizar la imagen y el tercero sirve para comprobar el resultado. Los diagramas de rayos son más fáciles de dibujar si el espejo se reemplaza por una línea recta que se prolonga lo necesario para interceptar los rayos, como indica la figura 32.17. Obsérvese que en este caso la imagen está invertida y es menor que el objeto.

Cuando el objeto está entre el espejo y su punto focal, los rayos reflejados en el espejo no convergen sino que parecen divergir desde un punto situado detrás del espejo, como se ilustra en la

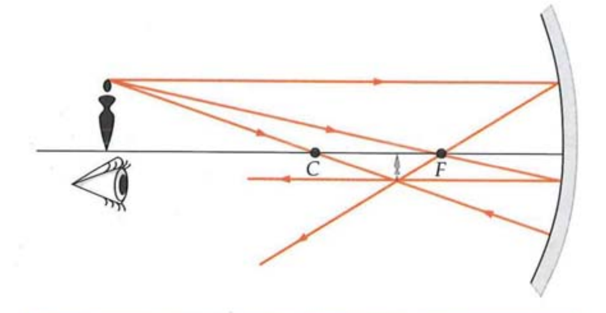


FIGURA 32.16 Diagrama de rayos para la localización de la imagen mediante una construcción geométrica.

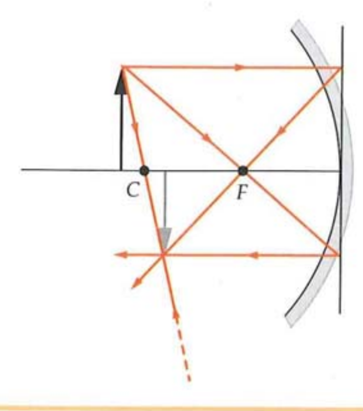


FIGURA 32.17 Los diagramas de rayos son más fáciles de construir si la superficie curva se reemplaza por un plano tangente a la curva en su vértice.

figura 32.17. En este caso, la imagen es virtual y derecha (derecha quiere decir que no está invertida respecto al objeto). En este caso concreto, s es menor que $r/2$, de modo que la distancia imagen s' calculada con la ecuación 32.1 resulta ser negativa. Podemos aplicar las ecuaciones 32.1, 32.2, 32.3 y 32.4 a este caso y a los espejos convexos si adoptamos un convenio de signos conveniente. Con independencia de que el espejo sea convexo o cóncavo, sólo pueden formarse imágenes reales delante del espejo, es decir, en el mismo lado del espejo que la luz reflejada (y el objeto). Se forman imágenes virtuales detrás del espejo, donde no existen rayos luminosos reales. Nuestro convenio de signos es el siguiente:

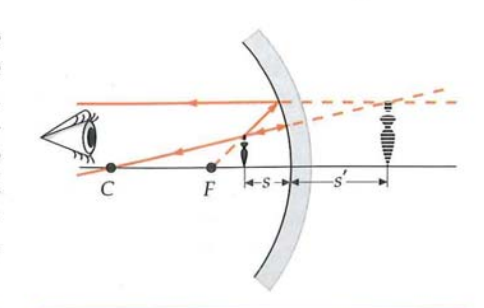


FIGURA 32.18 Imagen virtual formada por un espejo cóncavo cuando el objeto está a una distancia del vértice del espejo menor que su distancia focal. La imagen se localiza mediante la intersección del rayo radial, que se refleja en sentido inverso sobre sí mismo, y del rayo focal, que se refleja paralelo al eje. Estos dos rayos parece que divergen de un punto situado detrás del espejo. El punto imagen se determina extendiendo los rayos reflejados.

1. s es positivo si el objeto está delante del espejo (en el lado del espejo donde incide la luz).
2. s' es positivo si la imagen está delante del espejo (en el lado del espejo donde incide la luz).
3. r y f son positivos si el espejo es cóncavo, es decir, cuando el centro de curvatura está en el lado del espejo donde se encuentran los rayos reflejados.

CONVENIO DE SIGNOS PARA LA REFLEXIÓN

Lógicamente, el lado del espejo por donde incide la luz es el mismo que el lado por donde se refleja. Los parámetros s, s', r y f son todos positivos si un objeto real* que está enfrente de un espejo cóncavo forma una imagen real. Un parámetro es negativo si no reúne las condiciones establecidas para que sea positivo.

La relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto se conoce como **aumento lateral** m de la imagen. A partir de la figura 32.19 y de la ecuación 32.2, podemos ver que el aumento lateral es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad 32.5$$

AUMENTO LATERAL

Un aumento negativo, lo cual tiene lugar cuando s y s' son positivos, significa que la imagen está invertida.

En el caso de espejos planos, el radio de curvatura es infinito. La distancia focal dada por la ecuación 32.3 es entonces también infinita. Entonces, de la ecuación 32.4 vemos que $s' = -s$, lo que indica que la imagen está detrás del espejo y a una distancia igual a la del objeto. La amplificación dada por la ecuación 32.5 da ahora $+1$, lo que significa que la imagen es derecha y tiene el mismo tamaño que el objeto.

Aunque las ecuaciones precedentes combinadas con nuestro convenio de signos son relativamente sencillas de utilizar, es frecuente que sólo se necesite saber si una imagen es real o virtual, si es derecha o invertida, y su posición y amplificación aproximadas. Esta información es normalmente más fácil de obtener con la simple construcción de un diagrama de rayos. Sin embargo, conviene utilizar ambos métodos, gráfico y algebraico, para situar una imagen, de forma que uno de los dos métodos sirva de comprobación del otro.

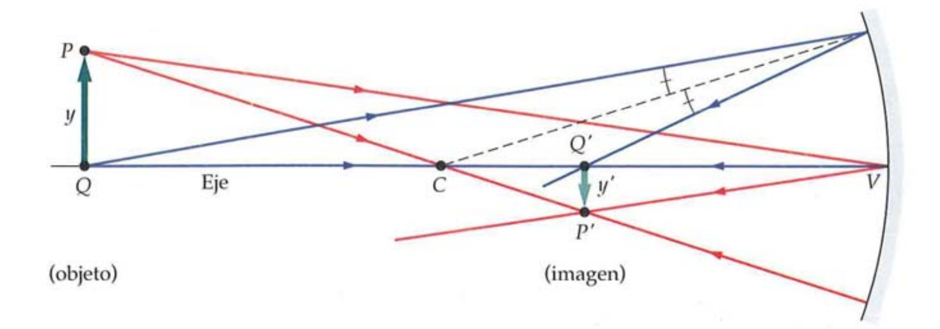


FIGURA 32.19 Geometría para determinar el aumento lateral. Los rayos procedentes de la parte superior del objeto, P, después de reflejarse, se cruzan en P', y los rayos procedentes de la parte inferior Q, en Q'. Las posiciones verticales de P y P' son y e y', respectivamente. El aumento lateral m viene dado por la relación y'/y. De acuerdo con la ecuación 32.2, $y'/y = -s'/s$. El signo menos resulta del hecho de que y'/y es negativo cuando tanto s como s' son positivas. Un valor negativo de m significa que la imagen está invertida.

* Un objeto se denomina real si está ubicado en el mismo lado del espejo que la luz incidente.

Espejos convexos En la figura 32.20, se muestra un diagrama de rayos para un objeto situado delante de un espejo convexo. El rayo central que se dirige hacia el centro de curvatura C es perpendicular al espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo paralelo al eje se refleja como si procediese del punto focal F, detrás del espejo. El rayo focal (no indicado) se dibujaría hacia el punto focal y se reflejaría paralelo al eje. Podemos ver en la figura que la imagen está detrás del espejo y, por lo tanto, es virtual. Además, es derecha y menor que el objeto.

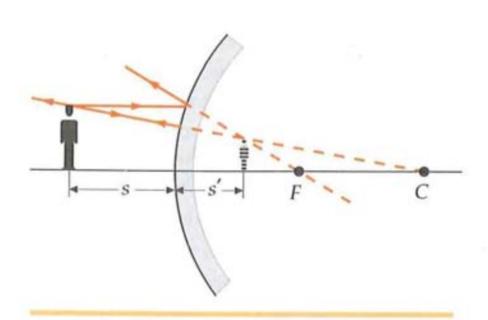


FIGURA 32.20 Diagrama de rayos correspondiente a un espejo convexo.

Ejemplo 32.2 Imagen en un espejo convexo

Un objeto de 2 cm de alto está a 10 cm de un espejo convexo cuyo radio de curvatura es 10 cm. (*a*) Localizar la imagen y (*b*) hallar su altura.

PLANTEAMIENTO El diagrama de rayos para este problema es el mismo que el de la figura 32.20. En ella se ve que la imagen es derecha, virtual y más pequeña que el objeto. Para determinar su localización exacta y su tamaño, utilizaremos la ecuación del espejo siendo $s = 10$ cm y $r = -10$ cm.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La distancia imagen s' está relacionada con la distancia objeto s y la distancia focal f por la ecuación del espejo:
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

2. Calcular la distancia focal del espejo:
$$f = \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}(-10 \text{ cm}) = -5{,}0 \text{ cm}$$

3. Sustituir $s = 10$ cm y $f = -5$ cm en la ecuación del espejo para determinar la distancia imagen:
$$\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-5{,}0 \text{ cm}}$$

4. Despejar s':
$$s' = \boxed{-3{,}3 \text{ cm}}$$

(*b*) 1. La altura de la imagen es m veces la altura del objeto:
$$y' = my$$

2. Calcular el aumento m:
$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-3{,}3 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = +0{,}33$$

3. Usar m para determinar la altura de la imagen:
$$y' = my = (0{,}33)(2{,}0 \text{ cm}) = \boxed{0{,}67 \text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN La distancia imagen es negativa, indicando una imagen virtual detrás del espejo. El aumento es positivo y menor que uno, indicando que la imagen es derecha y más pequeña que el objeto. Los resultados concuerdan con la información obtenida mediante el diagrama de rayos de la figura 32.21.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.4 Determinar la distancia imagen y el aumento para un objeto alejado 5 cm del espejo del ejemplo 32.2.

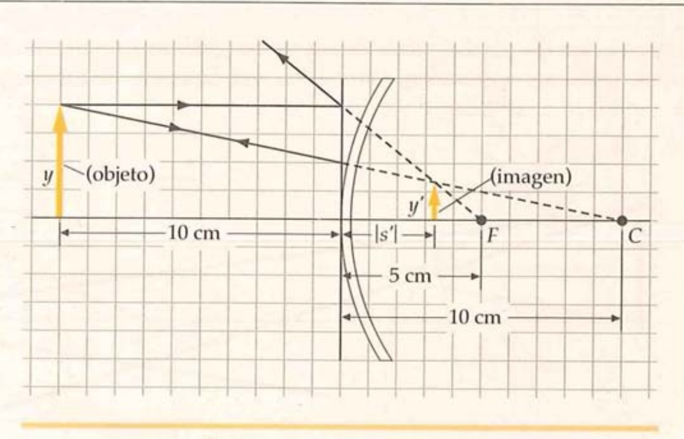


FIGURA 32.21

Ejemplo 32.3 Cálculo de la posición de la imagen en un espejo convexo

Póngalo en su contexto

Supongamos que está trabajando a tiempo parcial en el Club de Golf de Gratas Colinas. El recorrido del hoyo 16 es horizontal en sus 45,72 metros y continúa con un declive no demasiado profundo, tal como indica la figura 32.22, de forma que los que están en el lugar de salida no pueden ver la siguiente etapa del juego. Para evitar que los espectadores tengan que abandonar ese lugar de salida y ayudar a los jugadores que allí se encuentran, se coloca un espejo convexo en un poste en alto que les permita ver el recorrido completo, ya que éste está fuera de su campo visual.* Su jefe dice que se podría obtener una prolongación del campo visual mirando el espejo de tal forma que los jugadores podrían observar la siguiente etapa del juego en la imagen que estaría detrás del citado espejo convexo. De esta forma, los jugadores podrían tener una ayuda eficaz para determinar cuál es la distancia a la que está la próxima etapa del juego con respecto de la salida. Tu jefe sabe que estás estudiando Física, así que te pide que calcules la distancia a la que debe estar la imagen detrás del espejo si la próxima etapa del juego se ubica a 228,60 metros del punto de partida de este hoyo, sabiendo que el espejo que se va a colocar tiene un radio de curvatura de −18,29 metros.

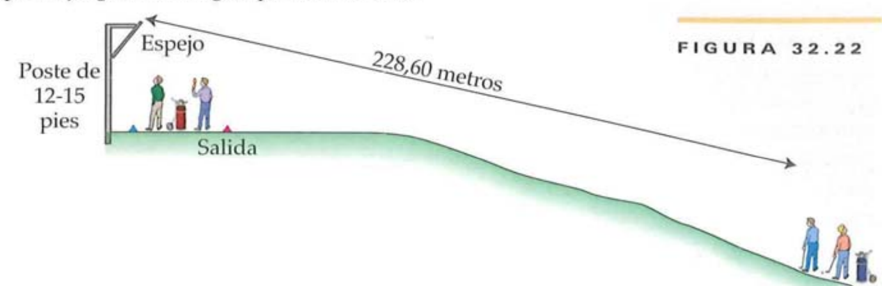


FIGURA 32.22

PLANTEAMIENTO La distancia imagen se relaciona con la distancia objeto mediante la fórmula del espejo, y la distancia focal es la mitad del radio de curvatura.

SOLUCIÓN

1. Usar la ecuación del espejo. Para un espejo convexo el radio de curvatura es negativo:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \text{ y } f = \frac{2}{r}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{228{,}60 \text{ m}} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-18{,}28 \text{ m}}$$

2. La imagen está a 8,79 m detrás del espejo:

$$s' = \boxed{-8{,}79 \text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Tal como era de esperar, el resultado del paso 2 del problema es negativo, dado que la imagen se localiza detrás del espejo.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.5 ¿A qué distancia se encuentra la siguiente etapa del juego si la imagen está a 8,92 metros detrás del espejo?


(a)


(b)

(*a*) Espejo convexo apoyado sobre un papel con unas tiras paralelas espaciadas de forma regular. Obsérvese el gran número de líneas que se ven en la imagen en un pequeño espacio y la reducción del tamaño y la distorsión de su forma. (*b*) Uso de un espejo convexo para controlar la seguridad de un almacén. *(Richard Megna/Fundamental Photographs.)*

* El espejo no se reemplazó después de que fuera derribado durante una tormenta ocurrida hace unos años.

32.2 LENTES

IMÁGENES FORMADAS POR REFRACCIÓN

Se trabaja y se pule un extremo de un cilindro transparente para formar una superficie esférica convexa. La figura 32.23 muestra la formación de una imagen mediante refracción en una superficie como ésta. Supongamos que el cilindro se sumerge en un líquido transparente de índice de refracción n_1 y que el cilindro está hecho de un material plástico de índice de refracción n_2, donde $n_2 > n_1$. Recordar que sólo los rayos paraxiales convergen en un punto. Aplicando la ley de Snell de la refracción puede deducirse una ecuación que relaciona la distancia imagen con la distancia objeto, el radio de curvatura y los índices de refracción, si se utilizan las aproximaciones de los ángulos pequeños. Se indican las relaciones geométricas en la figura 32.24. Los ángulos θ_1 y θ_2 están relacionados por la ley de Snell, n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2. Utilizando la aproximación de ángulos pequeños, sen $\theta \approx \theta$, se tiene $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$. Del triángulo ACP' resulta $\beta = \theta_2 + \gamma = (n_1/\,n_2)\,\theta_1 + \gamma$. Podemos obtener otra relación para θ_1 a partir del triángulo PAC: $\theta_1 = \alpha + \beta$. Eliminando θ_1 entre estas dos ecuaciones, se tiene $n_1\alpha + n_1\beta + n_2\gamma = n_2\beta$. Simplificando, $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$. Utilizando las aproximaciones de ángulo pequeño $\alpha \approx \ell/s$, $\beta \approx \ell/r$ y $\gamma \approx \ell/s'$, se obtiene

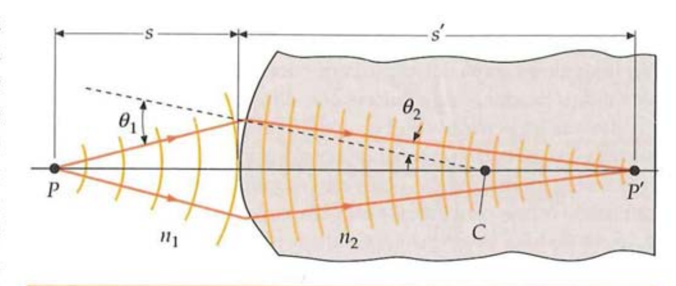


FIGURA 32.23 Imagen formada por refracción en una superficie esférica que separa dos medios diferentes. Las ondas se mueven más lentamente en el segundo medio.

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad 32.6$$

REFRACCIÓN EN UNA SUPERFICIE ÚNICA

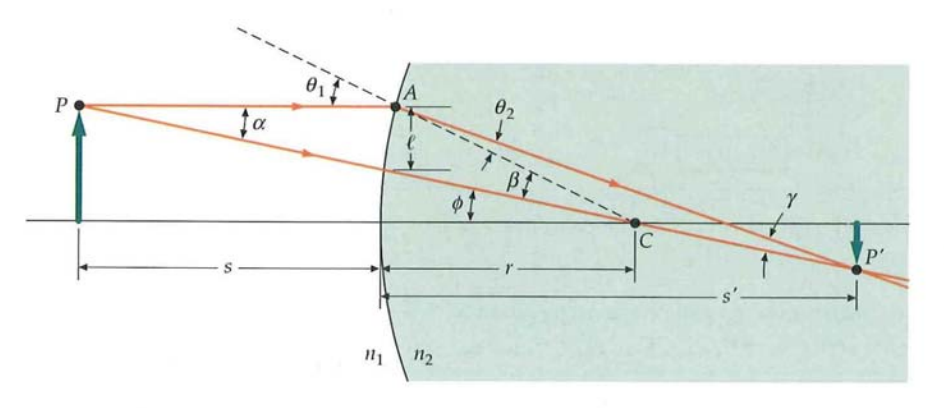


FIGURA 32.24 Construcción geométrica para relacionar la posición de la imagen con la posición del objeto en la refracción producida por una sola superficie esférica.

En la refracción, las imágenes reales se obtienen detrás de la superficie, en el denominado lado de transmisión (o lado de la luz refractada), mientras que las imágenes virtuales se presentan en el lado de incidencia, delante de la superficie. El convenio de signos que utilizamos para la refracción es semejante al empleado en la reflexión:

1. s es positivo para objetos que estén en el semiespacio en el que está la luz incidente.
2. s' es positivo para imágenes que estén en el semiespacio en el que está la luz refractada.
3. r es positivo si el centro de curvatura está en el semiespacio donde se halla la luz refractada.

CONVENIO DE SIGNOS PARA LA REFRACCIÓN*

* El convenio de signos que se elige para trabajos avanzados de diseño óptico es el cartesiano, que puede encontrarse fácilmente en Internet.

Los parámetros s, s' y r son todos positivos si un objeto real está colocado delante de la superficie convexa refractante que forma una imagen real. Un parámetro es negativo si no reúne las condiciones para ser positivo.

Ejemplo 32.4 Aumento debido a una superficie refractante *Inténtelo usted mismo*

Deducir una expresión para el aumento $m = y'/y$ de una imagen formada por una superficie esférica refractante.

PLANTEAMIENTO El aumento es la relación de y' a y. Utilizando las figuras 32.19 y 32.24 como guías, dibujar un diagrama de rayos apropiado para este cálculo. Estas alturas están relacionadas con las tangentes de los ángulos θ_1 y θ_2, como podemos ver en la figura 32.25. Los ángulos están relacionados por la ley de Snell. Con rayos paraxiales puede hacerse la aproximación $\operatorname{tg}\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$.

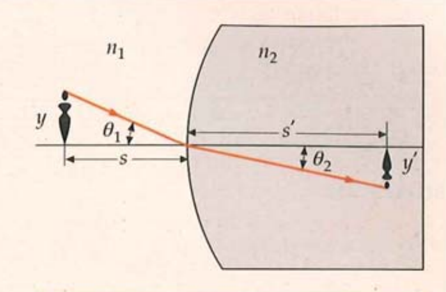


FIGURA 32.25

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos:	Respuestas
1. Utilizando las figuras 32.19 y 32.24 como guías, dibujar un diagrama de rayos apropiado para esta deducción. Este dibujo deberá incluir un objeto, una imagen real, una superficie refractante y un eje. Trazar un rayo de la luz incidente desde el límite superior del objeto hasta su intersección con el eje en la superficie, y dibujar el rayo refractado hasta el correspondiente punto imagen.	
2. Expresar $\operatorname{tg}\theta_1$ y $\operatorname{tg}\theta_2$ en función de las alturas y, $-y'$, y las distancias objeto e imagen, s y s'. (Como y' es negativa, utilizar $-y'$, de modo que $\operatorname{tg}\theta_2$ sea positiva.)	$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{y}{s};\quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-y'}{s'}$
3. Aplicar la aproximación de ángulo pequeño, $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ a ambas expresiones.	$\theta_1 = \frac{y}{s};\quad \theta_2 = \frac{-y'}{s'}$
4. Expresar la ley de Snell que relaciona los ángulos θ_1 y θ_2 mediante la aproximación de ángulo pequeño, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$.	$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$ $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$
5. Sustituir por las expresiones de θ_1 y θ_2 deducidas en el paso 3.	$n_1\left(\frac{y}{s}\right) = n_2\left(\frac{-y'}{s'}\right)$
6. Despejar el aumento $m = y'/y$.	$\boxed{m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}}$

COMPROBACIÓN El valor de m obtenido en el paso 6 no tiene dimensiones, como era de esperar.

Como vemos en el ejemplo 32.4, el aumento debido a la refracción en una superficie esférica es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \qquad 32.7$$

AUMENTO DEBIDO A UNA SUPERFICIE REFRACTANTE

Ejemplo 32.5 Imagen vista por un pez desde su pecera

Dentro de una pecera esférica de radio 15 cm llena de agua con índice de refracción 1,33, se encuentra un pez. Sentado en la mesa hay un gato con la nariz a 10 cm de la superficie de la pecera (figura 32.26). La luz procedente de la nariz del gato se refracta en la superficie aire-agua y forma una imagen. Determinar (*a*) la distancia imagen y (*b*) el aumento de dicha nariz. Despreciar la influencia de la delgada pared de vidrio de la pecera.

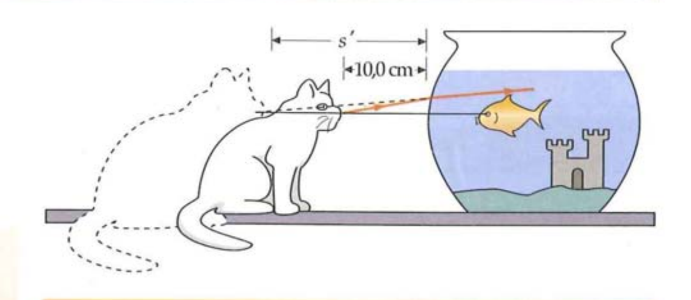


FIGURA 32.26 El pez ve la imagen del gato más alejada de la pecera de lo que realmente está.

PLANTEAMIENTO Determinaremos la distancia imagen y el aumento mediante las ecuaciones 32.6 y 32.7, respectivamente. Dado que nos interesa la luz que se propaga desde la nariz del gato a los ojos del pez, entonces tenemos que la superficie aire-agua es convexa y que el aire es el lado incidente y el agua el lado de la luz refractada. Por lo tanto, $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}33$, $s = +10$ cm y $r = +15$ cm.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La ecuación que relaciona la distancia objeto con la distancia imagen es la ecuación 32.6:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

2. Identificar y asignar a cada parámetro del paso anterior el signo que le corresponda:

$$n_1 = 1{,}00,\ n_2 = 1{,}33,\ s = +10{,}0 \text{ cm, y } r = +15{,}0 \text{ cm}$$

3. Aplicar los valores numéricos y despejar s':

$$\frac{1{,}00}{10{,}0 \text{ cm}} + \frac{1{,}33}{s'} = \frac{1{,}33 - 1{,}00}{15{,}0 \text{ cm}} \quad s' = \boxed{-17{,}1 \text{ cm}}$$

(*b*) Sustituir los valores numéricos en la ecuación 32.7 para determinar el aumento m:

$$m = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = -\frac{(1{,}00)(-17{,}1 \text{ cm})}{(1{,}33)(10{,}0 \text{ cm})} = \boxed{1{,}29}$$

COMPROBACIÓN Como s' es negativa, la imagen es virtual; es decir, la imagen se encuentra en el lado incidente de la pecera, como se muestra en la figura 32.26. El gato parece estar algo más lejos ($|s'| > s$), y se ve algo mayor de lo que realmente es ($|m| > 1$). El hecho de que m sea positivo, indica que la imagen es derecha.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.6 Determinar (*a*) la localización y (*b*) el aumento de la imagen del pez que ve el gato cuando el pez se coloca a 7,5 cm del punto de la pecera más cercano al gato.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.7 Si la pecera se reemplaza por un acuario de paredes planas y el pez sigue estando a 7,5 cm del lugar donde está el gato, determinar mediante la ecuación 32.6 la posición de la imagen del pez que ve el gato.

Ejemplo 32.6 Imagen vista desde arriba

Durante el verano, un pez suele estar bastante tiempo en un pequeño pozo. Mientras nada tranquilamente a una profundidad de 1 m es observado por un gato que está sentado sobre una rama de árbol a 3 m de la superficie del pozo. ¿A qué profundidad estará la imagen del pez que ve el gato? (El índice de refracción del agua es 1,33.)

PLANTEAMIENTO La superficie del pozo es una superficie refractante de radio de curvatura infinito. (Consideramos que el radio de curvatura de la Tierra es infinito.) Por lo tanto, tendremos que utilizar la ecuación 32.6. Como la luz que llega al gato procede del agua, tenemos que $n_1 = 1{,}33$ y $n_2 = 1$.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un esquema de la situación. Poner subíndices a la distancia objeto y a los índices de refracción de los diferentes medios. El pez es el objeto (figura 32.27):

2. Usando la ecuación 32.6, relacionar la posición de la imagen s' con los demás parámetros:
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

3. La superficie refractante es plana. Entonces, $r = \infty$; despejar s':
$$s' = -\frac{n_2}{n_1}s$$

4. Calcular s' mediante la ecuación 34.7 y los valores dados para n_1, n_2, y s:
$$s' = -\frac{1}{1{,}33}(1{,}00 \text{ m}) = -0{,}752 \text{ m}$$
Este valor negativo significa que la imagen se localiza en el lado de la superficie opuesto al de la luz refractada. Esto es, 0,75 m por debajo de la superficie.

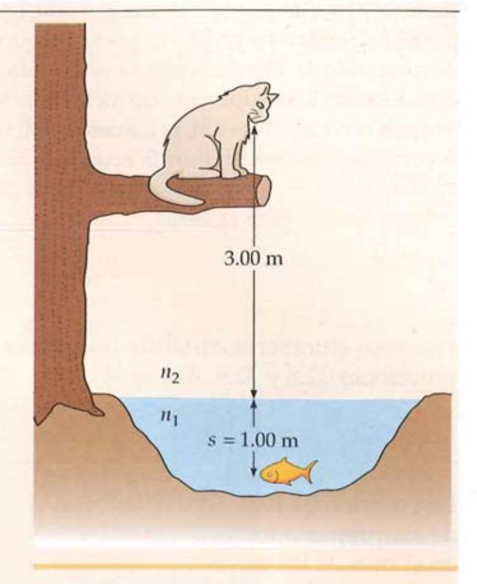


FIGURA 32.27

COMPROBACIÓN La imagen, tal como era de esperar, está entre la posición real del pez y la superficie del agua. Recuerde que si se introduce un remo en el agua con un determinado ángulo, la imagen de la parte del remo que está debajo del agua, parece que está por encima de donde está en realidad.

OBSERVACIÓN (1) Esta imagen sólo puede ser vista en la posición en que ha sido calculada cuando se observa directamente por encima, o desde una posición próxima a ésta. Desde esta posición los rayos pueden considerarse paraxiales, condición necesaria para que la ecuación 32.6 sea válida y se pueda aplicar. Si el gato estuviera en el borde del pozo, los rayos no satisfarían la aproximación paraxial y la ecuación 32.6 no podría predecir la situación correcta de la imagen. (2) La distancia $(n_2/n_1)\,s$ se denomina profundidad aparente del objeto sumergido. Si $n_2 = 1$, la profundidad aparente es igual a s/n_1.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 32.4

Dibujar un diagrama de rayos para construir la imagen del pez tal como se describe en el ejemplo 32.6. Esto es, dibujar varios rayos, al menos dos, que sean divergentes desde un punto P del pez y mostrar cómo después de refractarse, estos rayos parecen diverger desde un punto P' situado un poco por encima del punto objeto.

LENTES DELGADAS

La aplicación más importante de la ecuación 32.6 para la refracción en una superficie simple consiste en determinar la posición de la imagen formada por una lente. Para ello hay que considerar la refracción de cada superficie de la lente por separado con objeto de deducir una ecuación que relacione la distancia imagen con la distancia objeto, con el radio de curvatura de cada superficie de la lente y con su índice de refracción.

Consideraremos una lente muy delgada de índice de refracción n rodeada de aire. Sean r_1 y r_2 los radios de curvatura de cada una de las superficies de la lente. Si un objeto está a una distancia s de la primera superficie (y, por lo tanto, de la lente), puede determinarse la distancia s'_1 de la imagen debida a la refracción en la primera superficie utilizando la ecuación 32.6:

$$\frac{n_{\text{aire}}}{s} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n - n_{\text{aire}}}{r_1} \qquad 32.8$$

Esta imagen no llega a formarse porque la luz se refracta de nuevo en la segunda superficie. En la figura 32.28 se muestra el caso en que la distancia imagen s'_1 para la primera superficie es negativa, indicando que sería una imagen virtual a la izquierda de la superficie. Los rayos dentro del vidrio, refractados por la primera superficie, divergen como si procediesen del punto imagen P'_1. Éstos inciden sobre la segunda superficie formando los mismos ángulos que si se encontrase

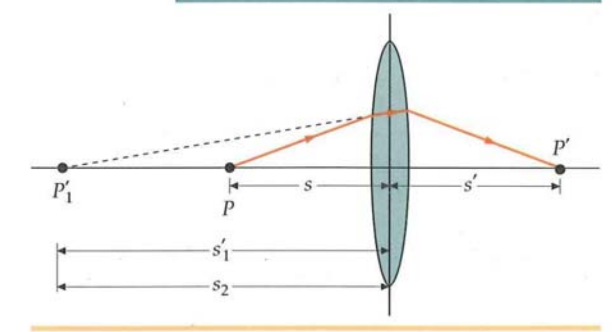


FIGURA 32.28 La refracción se produce en las dos superficies de la lente. En la figura, la refracción en la primera superficie origina una imagen virtual en P'_1. Los rayos inciden sobre la segunda superficie como si provinieran de P'_1. Como las distancias imagen son negativas cuando la imagen está en el lado de incidencia de la superficie, mientras que las distancias objeto son positivas cuando los objetos están en dicho lado, $s_2 = -s_1'$ es la distancia que hay que considerar para el objeto correspondiente a la segunda superficie de la lente.

un objeto en este punto imagen. Por consiguiente, la imagen dada por la primera superficie se convierte en objeto para la segunda superficie. Como la lente es de grosor despreciable, la distancia objeto es de valor igual a s'_1, pero como las distancias objeto delante de la superficie de incidencia son positivas, mientras que las distancias imagen son negativas allí, la distancia objeto para la segunda superficie es $s'_2 = -s'_1$. A continuación, escribimos la ecuación 32.6 para la segunda superficie con $n_1 = n$, $n_2 = 1$, y $s = -s'_1$. La distancia imagen para la segunda superficie es la distancia imagen final s' para la lente:

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{n_{\text{air}}}{s'} = \frac{n_{\text{aire}} - n}{r_2} \qquad 32.9$$

Podemos eliminar la distancia imagen de la primera superficie $-s'_1$ sumando las ecuaciones 32.8 y 32.9. Así, se obtiene

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \left(\frac{n}{n_{\text{aire}}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad 32.10$$

La ecuación 32.10 da la distancia imagen s' en función de la distancia objeto s y de las propiedades de la lente delgada (r_1, r_2 y su índice de refracción n). Como en el caso de los espejos, la distancia focal f de una lente delgada se define como la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita. Haciendo s igual a infinito y escribiendo f en lugar de la distancia imagen s', se tiene

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{aire}}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad 32.11$$

FÓRMULA DEL CONSTRUCTOR DE LENTES

La ecuación 32.11 se denomina **ecuación del constructor de lentes**; nos da la distancia focal de una lente delgada en función de sus propiedades. Sustituyendo el segundo miembro de la ecuación 32.10 por $1/f$, se tiene

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad 32.12$$

ECUACIÓN DE LA LENTE DELGADA

que se denomina **ecuación de la lente delgada**. Obsérvese que es la misma que la ecuación del espejo (ecuación 32.4). Recuérdese, sin embargo, que el convenio de signos para la refracción es un poco diferente del definido para la reflexión. En el caso de las lentes, la distancia imagen s' es positiva cuando la imagen está en el lado de transmisión de la lente, es decir, cuando está en el lado opuesto de aquél por donde incide la luz. El signo de la distancia focal (véase la ecuación 32.11) está determinado por la convención de signos de la refracción en una sola superficie. Es decir, el radio es positivo si el centro de curvatura está en el lado de transmisión de la lente, y negativo si se encuentra en la parte por donde incide la luz. Para lentes como la que se muestra en la figura 32.28, r_1 es positivo y r_2 negativo, de modo que f es positiva.

En la figura 32.29*a*, se muestran frentes de onda planos que inciden sobre una lente biconvexa. Primero incide sobre la lente la parte central del frente de onda. Como la velocidad de la onda en la lente es menor que en aire (suponiendo $n > 1$), la parte central del frente de onda se retrasa respecto a las partes más externas, dando como resultado una onda esférica que converge en el punto focal F'. Los rayos correspondientes a este caso se muestran en la figura 32.29*b*. Dicha lente se denomina **lente convergente**. Como su distancia focal calculada con la ecuación 32.2 es positiva, también se le llama lente positiva. Toda lente que es más gruesa en

* Si s'_1 fuese positivo, los rayos convergirían al incidir sobre la segunda superficie. El objeto para la segunda superficie estaría entonces a la derecha de la segunda superficie y sería, pues, un objeto virtual. Recuerde, $s_2 = -s'_1$.

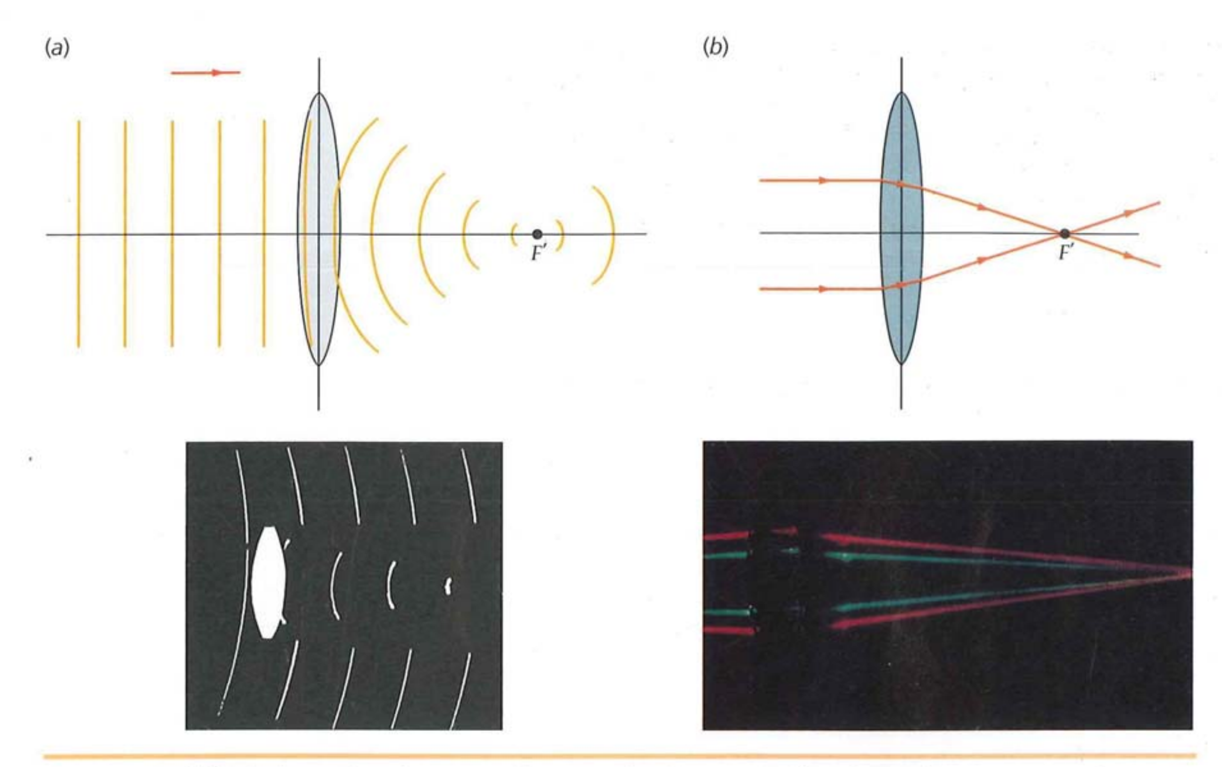


FIGURA 32.29 (*a*) *Arriba*: frentes de onda correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente convergente. La parte central del frente de onda se retrasa más dentro de la lente que la parte exterior, dando como resultado una onda esférica que converge en el punto focal F'. *Abajo*: frentes de onda que pasan a través de una lente. Para conseguir verlos se ha utilizado una técnica fotográfica denominada *registro de la luz en vuelo* que utiliza un láser de pulsos para hacer un holograma de los frentes de onda de la luz. (*b*) *Arriba*: rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente convergente. Los rayos se desvían en cada superficie y convergen en el punto focal. *Abajo*: fotografía de los rayos enfocados por una lente convergente. *((a) Nils Abramson, (b) Fundamental Photographs.)*

el centro que en los bordes es una lente convergente (siempre que el índice de refracción de la lente sea mayor que el del medio que la rodea). La figura 32.30 muestra los frentes de onda y los rayos en el caso de ondas planas incidentes sobre una lente bicóncava. En este caso, las partes exteriores de los frentes de onda se retrasan respecto a las partes centrales, dando como resultado, a la salida, ondas esféricas que divergen desde un punto focal que se encuentra en el lado por el que inciden las ondas. La distancia focal de esta lente es negativa. Toda lente (con índice de refracción mayor que el del medio que la rodea) que es más delgada en la parte central que en los bordes es una **lente divergente**, o **lente negativa**.

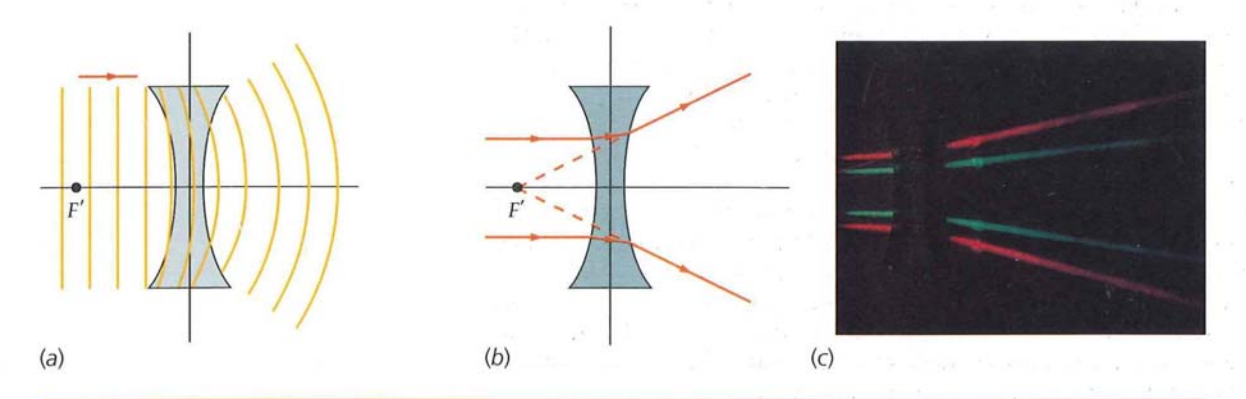


FIGURA 32.30 (*a*) Frentes de onda correspondientes a ondas planas que inciden sobre una lente divergente. En este caso, las partes exteriores de los frentes de onda se retardan más que la parte central, dando como resultado una onda esférica que diverge cuando progresa como si procediese del punto focal F', a la izquierda de la lente. (*b*) Rayos correspondientes a ondas planas que inciden sobre la misma lente divergente. Los rayos se desvían hacia el exterior y divergen como si procediesen del punto focal F'. (*c*) Fotografía de los rayos que pasan a través de una lente divergente. *(Fundamental Photographs.)*

Ejemplo 32.7 Fórmula para construir una lente

Una lente biconvexa de vidrio con un índice de refracción $n = 1,5$ tiene sus radios de curvatura de 10 cm y 15 cm, como se ve en la figura 32.31. Hallar su distancia focal.

PLANTEAMIENTO Mediante la fórmula del constructor de lentes podemos determinar la distancia focal (ecuación 32.11). En este caso, la luz incide sobre la superficie de menor radio de curvatura. El centro de curvatura de esta superficie, C_1, corresponde al lado de transmisión de la lente; por lo tanto, $r_1 = +$ 10 cm. Para la segunda superficie, el centro de curvatura, C_2, se encuentra sobre el lado incidente; por lo tanto, $r_2 = -15$ cm.

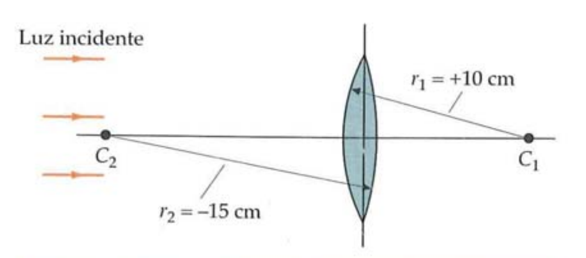


FIGURA 32.31

SOLUCIÓN

Sustituyendo los datos conocidos en la ecuación 32.11, se obtiene la distancia focal f:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{aire}}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1,50}{1,00} - 1\right)\left(\frac{1}{10\text{ cm}} - \frac{1}{-15\text{ cm}}\right) = 0,50\left(\frac{5,0}{30\text{ cm}}\right)$$

$$\therefore f = \boxed{12\text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN La longitud focal calculada es positiva, tal como era de esperar. La lente es más gruesa en el centro que en los extremos y, consecuentemente, la distancia focal es positiva.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.8 Una lente delgada biconvexa tiene un índice de refracción $n = 1,6$ y radios de curvatura del mismo valor. Si su distancia focal es 15 cm, ¿cuál es el valor del radio de curvatura de cada superficie?

PROBLEMA PRÁCTICO 32.9 Demostrar que si invertimos el sentido de la luz incidente sobre la lente del ejemplo 32.7, de modo que incida sobre la superficie con mayor radio de curvatura, se obtiene el mismo resultado para la distancia focal.

Si sobre la lente del ejemplo 32.7 inciden rayos paralelos de luz desde la izquierda, éstos se verán enfocados en un punto situado a 12 cm a la derecha de la lente, mientras que en caso de que incidieran procediendo de la derecha, se enfocarían a 12 cm a la izquierda de la lente. Ambos puntos son los puntos focales o focos de la lente. Utilizando la propiedad de la reversibilidad de los rayos luminosos, podemos ver que la luz que diverge desde un foco e incide sobre la lente, saldrá de ella como un haz de rayos paralelos, como se ve en la figura 32.32. En un problema sobre lentes en particular, en el que se especifique el sentido de la luz incidente, el punto objeto hacia el cual la luz emerge de la lente como un haz de rayos paralelos se denomina **primer punto focal** F y el punto donde se enfocan los rayos incidentes paralelos se llama **segundo punto focal** F'. En el caso de una lente positiva, el primer punto focal está en el lado de incidencia y el segundo, en el lado de transmisión. Si un haz de rayos paralelos incide sobre la lente formando un pequeño ángulo con el eje, como se indica en la figura 32.33, se enfocará en un punto situado en el **plano focal** a una distancia f de la lente.

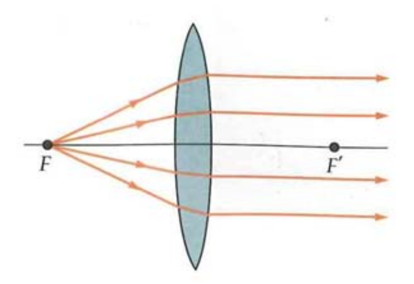


FIGURA 32.32 Los rayos de luz que divergen desde el punto focal de una lente positiva emergen paralelos al eje.

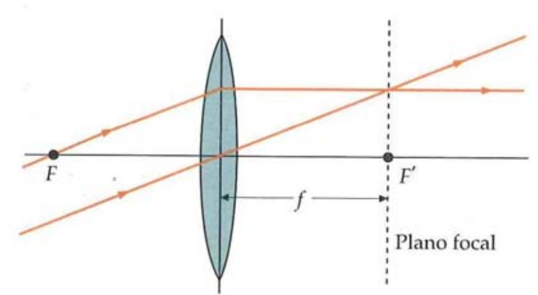


FIGURA 32.33 Los rayos paralelos que inciden sobre una lente, pero formando un ángulo con su eje, se enfocan en un punto del plano focal de la lente.

El valor inverso de la distancia focal se denomina **potencia de la lente**. Cuando la distancia focal se expresa en metros, la potencia viene dada en las unidades inversas (m^{-1}), denominadas **dioptrías** (D):

$$P = \frac{1}{f} \qquad 32.13$$

La potencia de una lente mide su capacidad para enfocar los rayos paralelos a una distancia corta de la misma. Cuanto más corta es la distancia focal, mayor es la potencia. Por ejemplo, una lente con una distancia focal de 25 cm = 0,25 m tiene una potencia de 4 D. Una lente de 10 cm = 0,10 m de distancia focal tiene 10 D. Como la distancia focal de una lente divergente es negativa, su potencia es también negativa.

Ejemplo 32.8 Potencia de una lente

Una lente (figura 32.34) tiene un índice de refracción de 1,5 y los radios de curvatura son de 10 cm y 13 cm, respectivamente. Hallar (*a*) su distancia focal y (*b*) su potencia.

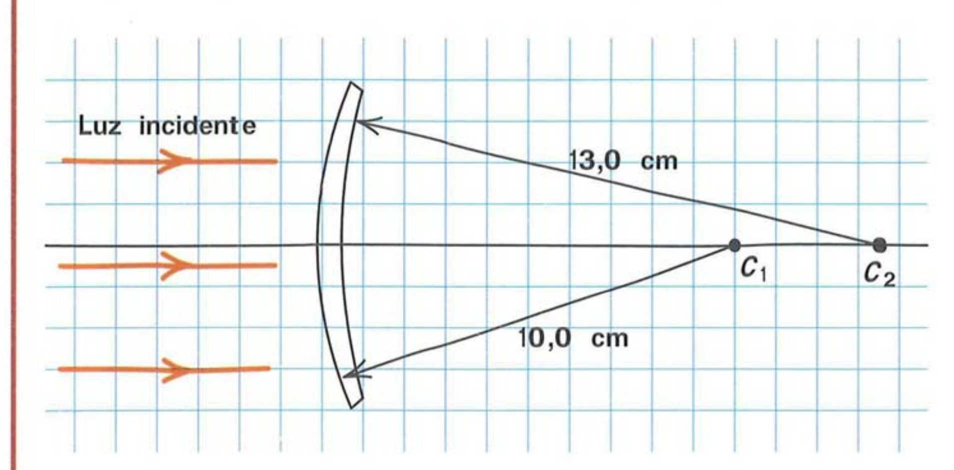


FIGURA 32.34

PLANTEAMIENTO En el caso de la orientación de la lente respecto a la luz incidente indicada en la figura 32.34, el radio de curvatura de la primera superficie es $r_1 = +10$ cm, y el de la segunda superficie, $r_2 = +13$ cm.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular f a partir de la fórmula del constructor de lentes utilizando el valor de n y los valores de r_1 y r_2 dados para la orientación mostrada en la figura:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{aire}}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1{,}50}{1{,}00} - 1\right)\left(\frac{1}{10{,}0\ \text{cm}} - \frac{1}{13{,}0\ \text{cm}}\right)$$

$$\therefore f = \boxed{87\ \text{cm}}$$

(*b*) La potencia es el valor inverso de la distancia focal expresada en metros:

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}867\ \text{m}} = \boxed{1{,}2\ \text{D}}$$

COMPROBACIÓN Los valores para la longitud focal y potencia son positivos, tal como era de esperar, por ser lentes cuyo grosor es mayor en el centro que en los extremos.

OBSERVACIÓN El resultado es el mismo con independencia de cuál sea la primera superficie de la lente sobre la que incide la luz.

En los experimentos de laboratorio con lentes, es mucho más fácil medir la distancia focal que calcularla a partir de los radios de curvatura de las superficies.

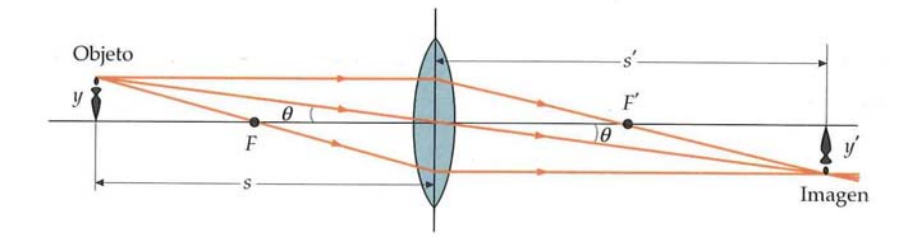


FIGURA 32.35 Diagrama de rayos para una lente delgada convergente. Para simplificar, se ha supuesto que toda la desviación de los rayos tiene lugar en el plano central. Los rayos que pasan por el centro no se desvían porque las caras de la lente son paralelas y están muy próximas.

DIAGRAMAS DE RAYOS PARA LAS LENTES

Como sucede con las imágenes formadas por los espejos, es conveniente situar las imágenes dadas por las lentes mediante métodos gráficos. La figura 32.35 ilustra este método en el caso de una lente convergente delgada. Para simplificar, consideramos que los rayos se desvían en el plano que pasa por el centro de la lente. Los tres rayos principales son:

1. El **rayo paralelo**, que se dibuja paralelo al eje. Este rayo se desvía de modo que pasa por el segundo punto focal de la lente.
2. El **rayo central**, que pasa por el centro (el vértice) de la lente. Este rayo no sufre desviación. (Las caras de la lente son paralelas en este punto, de modo que el rayo emerge en la misma dirección pero ligeramente desplazado. Como la lente es delgada, dicho desplazamiento es despreciable.)
3. El **rayo focal**, que pasa por el primer punto focal.* Este rayo emerge paralelo al eje.

RAYOS PRINCIPALES EN EL CASO DE UNA LENTE DELGADA



El peso y volumen de una lente de gran diámetro puede reducirse construyéndola mediante segmentos anulares a diferentes ángulos, de modo que la luz procedente de un punto se ve refractada por los segmentos en un haz paralelo. Dicho sistema se denomina lente de Fresnel. En este faro, se han utilizado diversas lentes de Fresnel con objeto de producir haces luminosos intensos a partir de una fuente situada en el punto focal de las lentes. La superficie iluminada de un retroproyector es una lenta de Fresnel. *(Bohdan Hrynewych/Stock Boston.)*

Estos tres rayos convergen en el punto imagen, como se ve en la figura 32.35. En este caso, la imagen es real e invertida. En la figura vemos que $\text{tg}\,\theta = y/s = -y'/s'$. Entonces, el aumento lateral será

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad 32.14$$

Esta expresión es la misma que la obtenida para los espejos. Vemos de nuevo que un aumento negativo indica que la imagen está invertida. En la figura 32.36 se muestra el diagrama de rayos para una lente divergente.

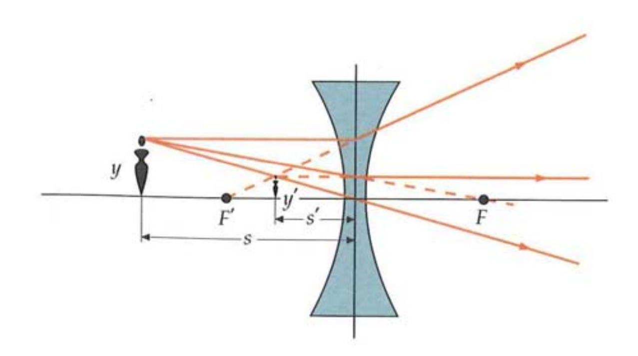


FIGURA 32.36 Diagrama de rayos para una lente divergente. El rayo paralelo se desvía alejándose del eje como si procediese del segundo punto focal F'. El rayo dirigido hacia el primer punto focal F emerge paralelo al eje. En una lente divergente, el primer punto focal F está en la región del espacio donde se encuentra la luz refractada.

* En el caso de una lente divergente, el rayo focal se dibuja en dirección al primer punto focal.

Ejemplo 32.9 Imagen formada por una lente

Un objeto de 1,2 cm de alto se coloca a 4 cm de la lente biconvexa con una distancia focal de 12 cm. Localizar la imagen tanto gráfica como algebraicamente, establecer si la imagen es real o virtual y calcular su altura. Colocar el dibujo de un ojo posicionado y orientado de tal forma que esté observando la imagen.

PLANTEAMIENTO Localizar la imagen con métodos gráficos. Para ello se requiere trazar tres rayos principales. El ojo se sitúa de tal forma que la luz procedente de la imagen entre por él.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el rayo paralelo. Este rayo sale del objeto paralelo al eje y es desviado por la lente pasando por el segundo punto focal F' (figura 32.37):

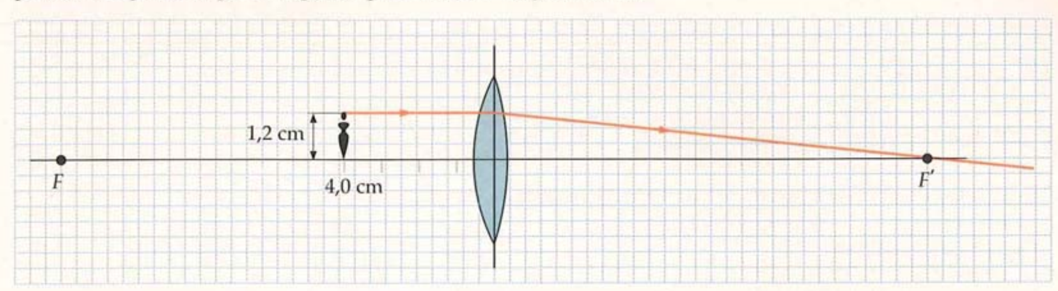


FIGURA 32.37

2. Dibujar el rayo central que pasa sin desviarse por el centro de la lente. Como los dos rayos son divergentes en el lado de transmisión, para hallar la imagen, trazamos sus prolongaciones en el lado incidente (figura 32.38):

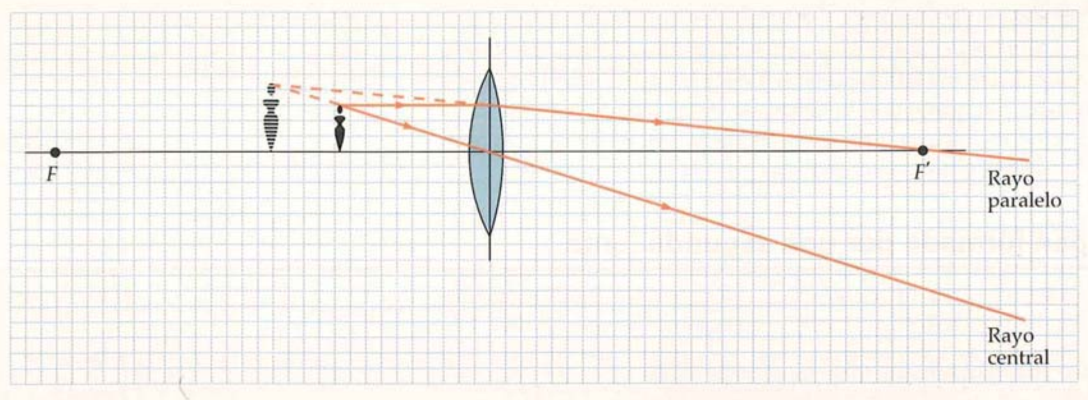


FIGURA 32.38

3. Como comprobación, dibujaremos también el rayo focal. Este rayo sale del objeto según una línea que pasa por el primer punto focal y emerge paralelo al eje. Obsérvese que la imagen es virtual, derecha y mayor que el objeto (figura 32.39):

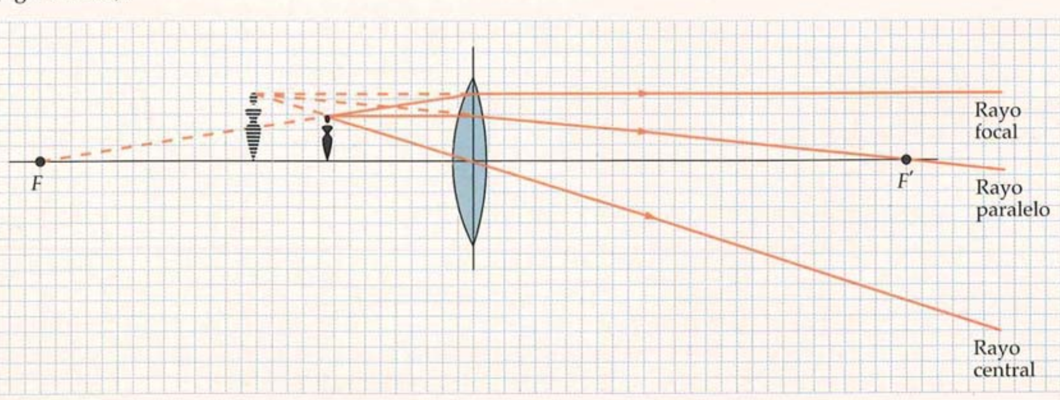


FIGURA 32.39

4. El ojo deberá ponerse de tal forma que la luz procedente de la imagen entre por él:

5. Comprobemos ahora los resultados del diagrama de rayos por el método algebraico. En primer lugar, determinamos la distancia imagen mediante la ecuación 32.12:

$$\frac{1}{4{,}0\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{12\text{ cm}}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{12\text{ cm}} - \frac{1}{4{,}0\text{ cm}} = -\frac{1}{6{,}0\text{ cm}}$$

$$s' = -6{,}0\text{ cm}$$

6. La altura de la imagen se determina a partir de la altura del objeto y el aumento:

$$h' = mh$$

7. El aumento m viene dado por la ecuación 32.14:

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-6{,}0\text{ cm}}{4{,}0\text{ cm}} = \boxed{+1{,}5}$$

8. Con este resultado se obtiene la altura de la imagen, h':

$$h' = mh = (1{,}5)(1{,}2\text{ cm}) = \boxed{1{,}8\text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese la concordancia entre los resultados geométrico y algebraico. De forma algebraica, se ha determinado que la imagen se encuentra a 6 cm de la lente en el lado de incidencia (pues $s' < 0$); es decir, la imagen está 2 cm a la izquierda del objeto. Como $m > 0$, resulta que la imagen es derecha y como $m > 1$, significa que es de mayor tamaño. Es conveniente resolver los problemas de lentes por los dos métodos indicados y comparar los resultados.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.10 Se coloca un objeto a 15 cm de una lente biconvexa de distancia focal 10 cm. Hallar la distancia imagen y el aumento. Dibujar un diagrama de rayos. ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

PROBLEMA PRÁCTICO 32.11 Repetir el ejercicio anterior para un objeto situado a 5 cm de una lente con una distancia focal de 10 cm. Determinar la distancia imagen y el aumento. ¿La imagen es real o virtual? ¿Invertida o derecha?

LENTES MÚLTIPLES

Si combinamos en un sistema óptico dos o más lentes delgadas, podemos hallar la imagen final producida por el sistema hallando la distancia imagen correspondiente a la primera lente y utilizándola, junto con la distancia entre lentes, para hallar la distancia objeto correspondiente a la segunda lente. Es decir, se considera cada imagen, sea real o virtual y se forme o no, como el objeto para la siguiente lente.

Ejemplo 32.10 Imagen formada por una segunda lente

A la derecha de la lente del ejemplo 32.9 y a 12 cm de ella se coloca una segunda lente de distancia focal +6 cm. Localizar la imagen final.

PLANTEAMIENTO El rayo principal utilizado para localizar la imagen de la primera lente no necesariamente será el rayo principal para la segunda. En este ejemplo, sin embargo, hemos elegido la posición de la segunda lente (figura 32.40*a*) de tal forma que el rayo paralelo para la primera lente pasa a ser el rayo central para la segunda. Además, el rayo que pasa por el foco de la primera lente emerge paralelo al eje y es, por lo tanto, el rayo paralelo para la segunda lente. Si se necesitan rayos adicionales principales para la segunda lente, simplemente los dibujaremos desde la imagen formada por la primera lente. Por ejemplo, en la figura 32.40*b* añadimos este rayo adicional dibujándolo desde la primera imagen y a través del primer punto focal F_2 de la segunda lente.

Algebraicamente, utilizamos $s_2 = 18$ cm, pues la primera imagen está 6 cm a la izquierda de la primera lente y, por lo tanto, 18 cm a la izquierda de la segunda lente.

SOLUCIÓN

1. Considerar $s_2 = 18$ cm y $f = 6$ cm para calcular s_2':

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{18\text{ cm}} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{6\text{ cm}}$$

$$s_2' = 9\text{ cm}$$

La imagen final está en la región de la luz refractada de la segunda lente, a 9 cm de ésta.

2.

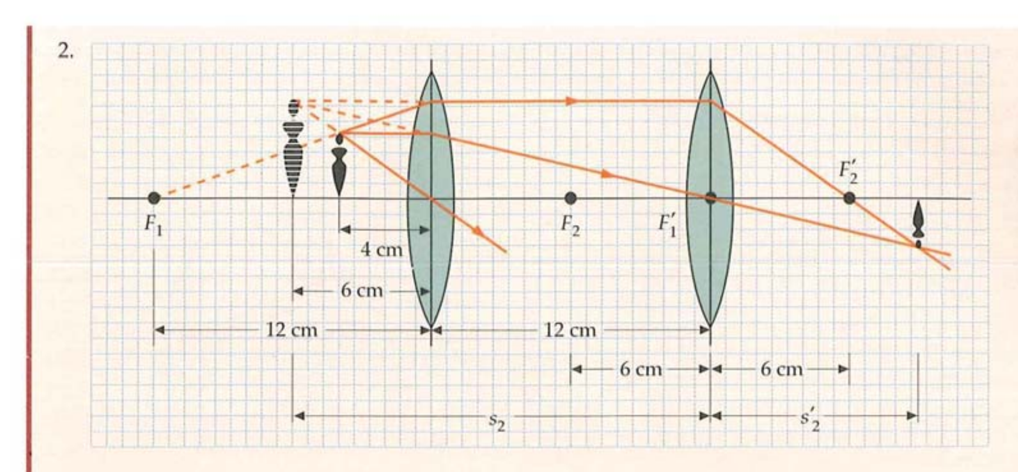


FIGURA 32.40*a*

COMPROBACIÓN El diagrama de rayos en el paso 2 es coherente con el resultado del paso 1. Como comprobación adicional, se dibuja el rayo que pasa por el foco de la segunda lente.

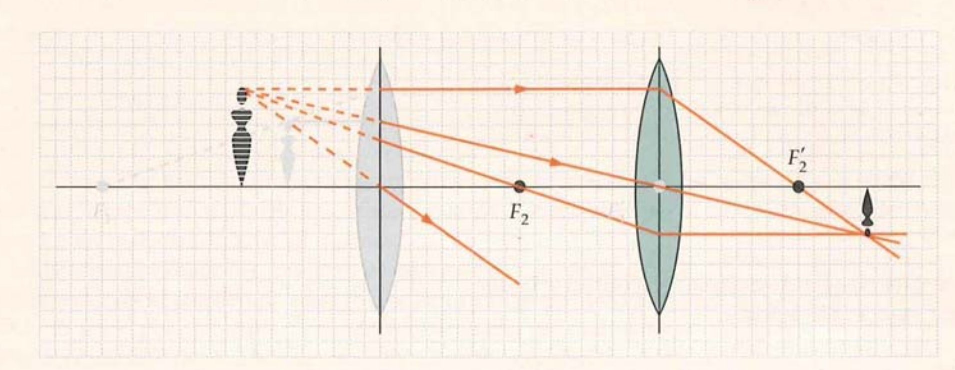


FIGURA 32.40*b*

Ejemplo 32.11 Combinación de dos lentes

Inténtelo usted mismo

Dos lentes con la misma distancia focal de 10 cm distan 15 cm entre sí. Hallar la imagen final de un objeto situado a 15 cm de una de las lentes.

PLANTEAMIENTO Utilizar un diagrama de rayos para determinar la localización aproximada de la imagen formada por la lente 1. Cuando estos rayos chocan con la lente 2 son de nuevo refractados, dando lugar a la imagen final. Los resultados precisos se obtienen de forma algebraica utilizando la ecuación de la lente delgada para ambas lentes 1 y 2.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

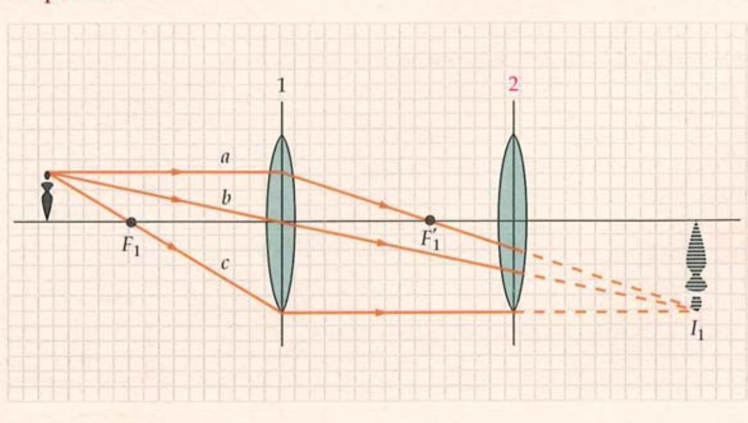
Pasos	Respuestas
1. Dibujar los rayos paralelo (*a*), central (*b*) y focal (*c*) para la lente 1 (figura 32.41). Si la lente 2 no alterase estos rayos, ellos formarían una imagen en I_1.	

FIGURA 32.41

2. Para localizar la imagen final, añadir tres rayos principales (d, e y f) para la lente 2. La intersección de estos rayos da la posición de la imagen (figura 32.42).

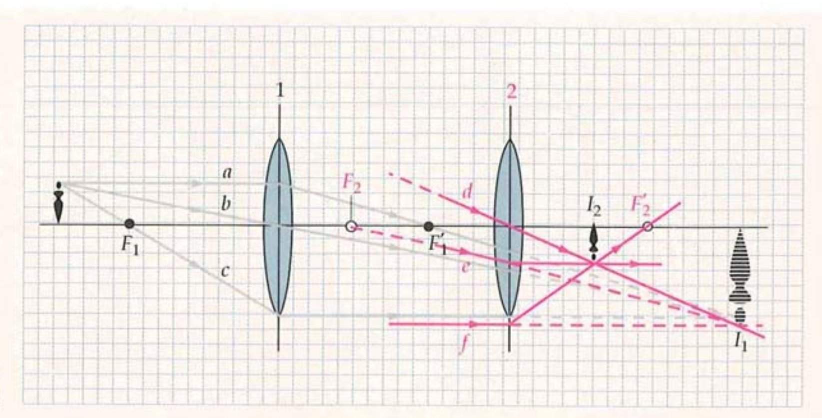


FIGURA 32.42

3. Para resolver algebraicamente, utilizar la ecuación de la lente delgada para determinar la distancia imagen s_1' producida por la lente 1. — $s_1' = 30$ cm

4. Para la lente 2, la imagen I_1 está a 15 cm de la lente en el lado de transmisión. Por lo tanto, $s_2 = -15$ cm. Utilizar este valor para determinar la distancia imagen final s_2'. — $\boxed{s_2' = 6 \text{ cm}}$

COMPROBACIÓN En el diagrama de rayos del paso 2 podemos ver que la imagen final se localiza, aproximadamente, a seis décimas partes de la distancia focal de la segunda lente. Dado que la distancia focal de la segunda lente es de 10 cm, vemos que hay concordancia entre los resultados de los pasos 2 y 4.

LENTES COMPUESTAS

Cuando dos lentes delgadas de distancias focales f_1 y f_2 se sitúan en contacto, la distancia focal efectiva de la combinación f_{ef} viene dada por

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad 32.15$$

tal como se muestra en el siguiente ejemplo 32.12. La potencia de las dos lentes en contacto es

$$P_{ef} = P_1 + P_2 \qquad 32.16$$

Ejemplo 32.12 Dos lentes en contacto *Inténtelo usted mismo*

Se colocan en contacto dos lentes. Deducir la relación $\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$.

PLANTEAMIENTO Aplicar la ecuación de la lente delgada a cada una de las lentes, teniendo en cuenta que la distancia entre las lentes es cero y, por lo tanto, la distancia objeto para la segunda lente es el valor negativo de la distancia imagen para la primera lente.

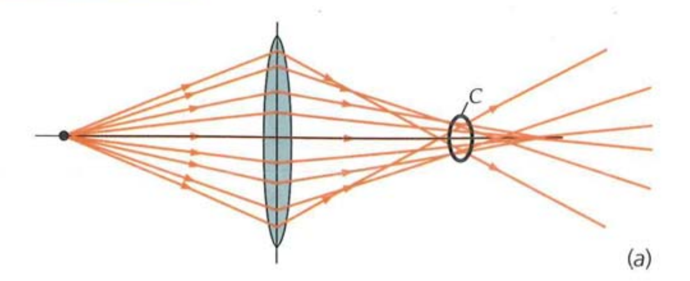
SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
1. Expresar la ecuación de la lente delgada para la lente 1.	$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1}$
2. Siendo $s_2 = -s_1'$, expresar la ecuación de la lente delgada para la lente 2.	$\frac{1}{-s_1'} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2}$
3. Sumar las dos ecuaciones resultantes para eliminar s_1'.	$\boxed{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{ef}}}$

* 32.3 ABERRACIONES

Cuando los rayos procedentes de un punto objeto no se enfocan todos en un solo punto imagen, la imagen borrosa resultante de la imagen se denomina **aberración**. La figura 32.43 muestra los rayos que, procedentes de un punto objeto sobre el eje, atraviesan una lente delgada con superficies esféricas. Los rayos que inciden sobre la lente lejos del eje se desvían mucho más que los próximos al mismo, con el resultado de que no todos los rayos se enfocan en un solo punto. En lugar de ello, la imagen tiene el aspecto de un disco circular. El círculo de mínima confusión se encuentra en el punto C, donde el diámetro es mínimo. Este tipo de aberración se denomina **aberración esférica**. Es el mismo tipo de aberración que el considerado en la sección 32.1 al estudiar los espejos. Cuando los objetos se encuentran fuera del eje, se producen aberraciones análogas, pero más complicadas, denominadas *coma* (por la imagen en forma de cometa), y *astigmatismo*. La aberración en la forma de la imagen de un objeto extenso, debida al hecho de que el aumento depende de la distancia de los puntos objeto al eje, se llama **distorsión**. No estudiaremos más estas aberraciones excepto para señalar que no se deben a ningún defecto de la lente o del espejo, sino que son el resultado de la aplicación de las leyes de la refracción y de la reflexión a las superficies esféricas. Estas aberraciones no resultan patentes en nuestras sencillas ecuaciones porque hemos utilizado las aproximaciones de los ángulos pequeños en la deducción de las mismas.



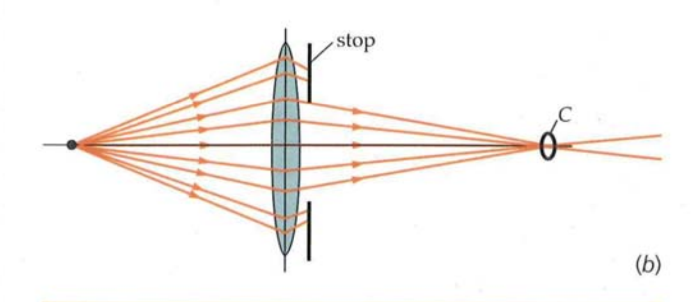


FIGURA 32.43 Aberración esférica en una lente. (*a*) Los rayos que proceden de un punto objeto situado en el eje no se enfocan en un solo punto. (*b*) Puede reducirse la aberración esférica bloqueando las partes exteriores de la lente, pero así se reduce también la cantidad de luz que llega a la imagen.

Algunas aberraciones pueden eliminarse o corregirse parcialmente con el empleo de superficies no esféricas para las lentes y espejos, pero las superficies no esféricas son normalmente mucho más difíciles y costosas de fabricar que las esféricas. Un ejemplo de superficie reflectora no esférica es el espejo parabólico que puede verse en la figura 32.44. Los rayos que son paralelos al eje de una superficie parabólica se reflejan y enfocan en un punto común sin que importe lo alejados que se encuentren del eje. Normalmente, las superficies reflectoras parabólicas se utilizan en los grandes telescopios astronómicos, que necesitan una gran superficie reflectora para recoger el máximo de luz y conseguir así que la imagen sea lo más intensa posible (los telescopios reflectores se describen en la sección siguiente, 32.4). Los detectores para enfocar microondas procedentes de satélites de comunicación se construyen con superficies parabólicas. También se utilizan estas superficies en los proyectores con el fin de producir un haz luminoso paralelo a partir de un pequeño foco situado en el punto focal de la superficie.

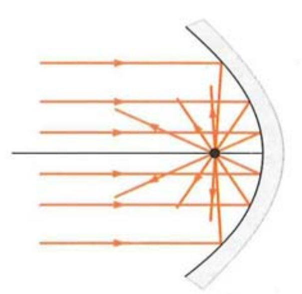


FIGURA 32.44 Un espejo parabólico enfoca todos los rayos paralelos al eje en un solo punto sin aberración esférica.

Una importante aberración que aparece en las lentes, pero no en los espejos, es la **aberración cromática**, que se debe a las variaciones del índice de refracción con la longitud de onda. A partir de la ecuación 32.11, podemos ver que la distancia focal de una lente depende de su índice de refracción y, por lo tanto, es diferente para cada longitud de onda. Como n es ligeramente mayor para la luz azul que para la luz roja, la distancia focal para la luz azul será más corta que para la luz roja. Puesto que en los espejos no se produce aberración cromática, muchos de los grandes telescopios utilizan un gran espejo en lugar de una gran lente (objetivo) captadora de luz.

La aberración cromática, y otras aberraciones, pueden corregirse parcialmente utilizando combinaciones de lentes en lugar de una sola lente. Por ejemplo, una lente positiva y otra negativa, de mayor distancia focal, pueden utilizarse juntas para producir un sistema de lentes convergente que tenga una aberración cromática mucho menor que una lente simple de la misma distancia focal. La lente de una buena cámara fotográfica contiene normalmente seis elementos para corregir las diversas aberraciones que se pueden producir.

* 32.4 INSTRUMENTOS ÓPTICOS

*EL OJO

El sistema óptico más importante es el ojo. Un esquema de su estructura se muestra en la figura 32.45. La luz entra en el ojo a través de una abertura variable, la pupila, y se enfoca mediante el sistema lente-córnea sobre la retina, una película de fibras nerviosas que cubre la superficie posterior del ojo. La retina contiene diminutas estructuras sensibles denominadas bastones y conos, que reciben la imagen y transmiten la información a lo largo del nervio óptico hasta el cerebro. La forma de la lente cristalina (llamada también cristalino) puede alterarse ligeramente mediante la acción de los músculos ciliares. Cuando el ojo se enfoca sobre un objeto alejado, el músculo se relaja y el sistema lente-córnea tiene su máxima distancia focal, aproximadamente 2,5 cm, que es la distancia de la córnea a la retina. Cuando el objeto se acerca al ojo, se tensan los músculos ciliares, aumentando la curvatura del cristalino ligeramente y disminuyendo de este modo su distancia focal, y la imagen se enfoca de nuevo en la retina. Este proceso se denomina *acomodación*. Si el objeto está demasiado cercano al ojo, la lente no puede enfocar la luz del mismo en la retina y la imagen resulta borrosa. El punto más próximo para el cual la lente puede enfocar una imagen en la retina se denomina **punto próximo**. La distancia del ojo al punto próximo varía mucho de una persona a otra y con la edad. A la edad de 10 años, el punto próximo puede estar hasta 7 cm de distancia, mientras que a los 60 años puede alejarse a 200 cm debido a la pérdida de flexibilidad de la lente. El valor normalizado tomado como punto próximo es 25 cm.

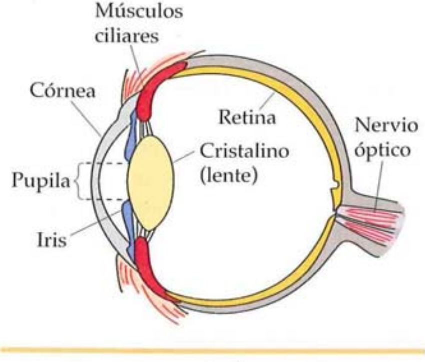


FIGURA 32.45 Ojo humano. La cantidad de luz que entra en el ojo se controla mediante el iris, que regula el tamaño de la pupila. El espesor del cristalino queda controlado por los músculos ciliares. El sistema córnea-cristalino enfoca la imagen sobre la retina, que contiene unos 125 millones de receptores, llamados bastones y conos, y aproximadamente 1 millón de fibras del nervio óptico.

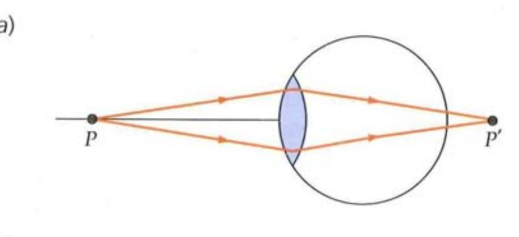
Si el ojo es menos convergente de lo que debiera, dando como resultado que las imágenes queden enfocadas detrás de la retina, se dice que la persona es hipermétrope. Una persona hipermétrope puede ver correctamente objetos lejanos, para lo que se requiere poca convergencia, pero tiene problemas a la hora de ver claramente objetos cercanos. La hipermetropía se corrige con una lente convergente (positiva), como puede verse en la figura 32.46.

Por el contrario, el ojo de una persona miope tiene excesiva convergencia y enfoca la luz procedente de objetos distantes delante de la retina. Una persona miope puede ver objetos cercanos, ya que sus rayos incidentes demasiado convergentes pueden enfocarse sobre la retina, pero no puede enfocar con nitidez los objetos lejanos. La miopía se corrige con una lente divergente (negativa), como puede verse en la figura 32.47.

Otro defecto común de la visión es el astigmatismo, que está originado porque la córnea no es perfectamente esférica, sino que tiene diferente curvatura en un plano que en otro. Esto da como resultado una imagen borrosa, ya que un punto objeto da lugar a un corto segmento. El astigmatismo se corrige con gafas formadas con lentes cilíndricas en lugar de lentes esféricas.

El *tamaño aparente* de un objeto queda determinado por el tamaño de la imagen sobre la retina. Cuanto mayor es esta imagen, mayor es el número de bastones y conos activados. En la figura 32.48, podemos ver que el tamaño de la imagen sobre la retina es

(a)



(b)

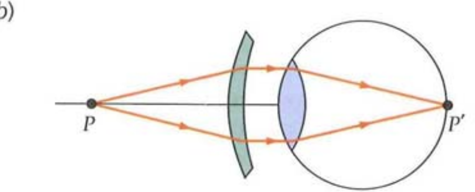
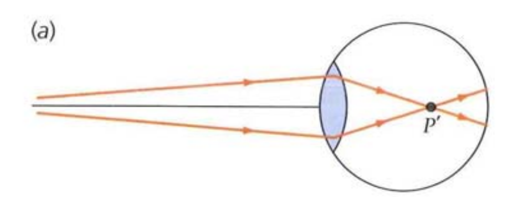


FIGURA 32.46 (*a*) Un ojo hipermétrope enfoca los rayos procedentes de un objeto P cercano en un punto P' detrás de la retina. (*b*) Una lente convergente corrige este defecto desplazando la imagen de forma que caiga sobre la retina. Estos diagramas y los siguientes se han dibujado como si todo el efecto de enfoque del ojo lo realizase la córnea; de hecho, el sistema córnea-cristalino actúa más como una superficie esférica refractora que como una lente delgada.

(a)



(b)

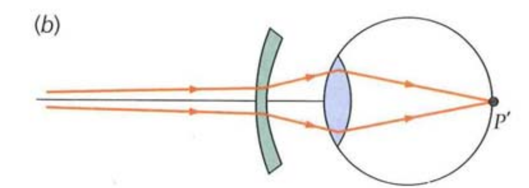


FIGURA 32.47 (*a*) Un ojo miope enfoca los rayos procedentes de un objeto lejano en un punto P' situado delante de la retina. (*b*) Una lente divergente corrige este defecto.

mayor cuando el objeto está cerca que cuando está alejado. Así, aunque el tamaño real del objeto no cambia, su tamaño aparente es mayor cuando se acerca al ojo. El tamaño de la imagen es proporcional al ángulo θ subtendido por el objeto en el ojo. En la figura 32.48 vemos que

$$\phi = \frac{y'}{2{,}5\ \text{cm}} \quad \text{y} \quad \theta \approx \frac{y}{s} \qquad 32.17$$

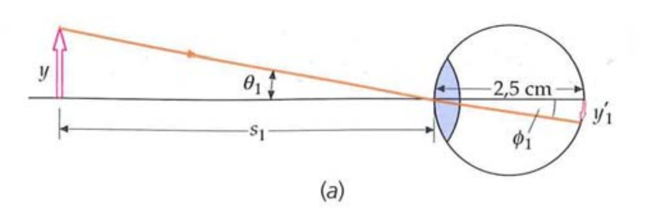
para pequeños ángulos. Aplicando la ley de la refracción, se tiene que n_{aire} sen $\theta = n$ sen ϕ, donde $n_{\text{aire}} = 1{,}00$ y n son los índices de refracción en el interior del ojo. Para pequeños ángulos esto viene a ser

$$\theta \approx n\phi \qquad 32.18$$

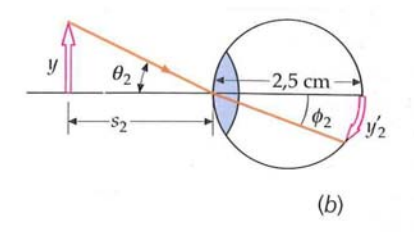
Combinando las ecuaciones 32.17 y 32.18, resulta:

$$\frac{y}{s} \approx n\frac{y'}{2{,}5\ \text{cm}} \quad \text{o} \quad y' \approx \frac{2{,}5\ \text{cm}}{n}\frac{y}{s} \qquad 32.19$$

Así pues, el tamaño de la imagen sobre la retina es proporcional al tamaño del objeto e inversamente proporcional a la distancia entre el objeto y el ojo. Como el punto próximo es el más cercano al ojo para el cual se forma una imagen nítida en la retina, la distancia al punto próximo es la *distancia de mayor visión distinta* (sin confusión).



(a)



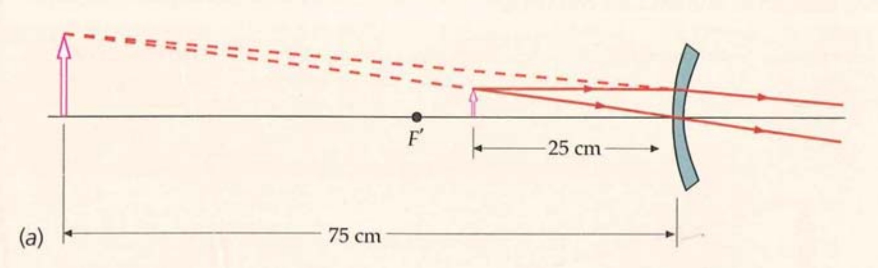
(b)

FIGURA 32.48 (*a*) Un objeto lejano de altura y parece pequeño debido a que su imagen sobre la retina es reducida. (*b*) Cuando el mismo objeto está más cerca, parece mayor porque su imagen en la retina es más grande.

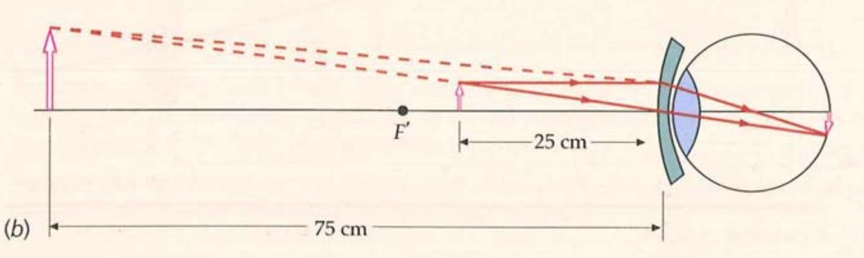
Ejemplo 32.13 Gafas de lectura

Suponer que el punto próximo del ojo de cierta persona es 75 cm. Con las gafas de lectura puestas a una distancia despreciable del ojo, la distancia del punto próximo al sistema lentes-gafas es de 25 cm. Esto es, si un objeto se coloca a 25 cm delante de la lente, entonces ésta forma una imagen virtual del objeto a 75 cm de distancia, también delante de la lente. (*a*) ¿Cuál es la potencia de la lente de las gafas de lectura? (*b*) ¿Cuál es el aumento lateral de la imagen formada por la lente? (*c*) ¿Qué produce la imagen más grande en la retina? (1) El objeto situado en el punto próximo del ojo desnudo (sin lente adicional), o (2) El objeto en el punto próximo del sistema ojo–lente y visto a través de la lente que está justo delante del ojo.

PLANTEAMIENTO Una distancia del punto próximo al sistema ojo-lente de 25 cm, significa que la lente forma una imagen virtual 75 cm delante de la lente cuando un objeto se coloca a 25 cm delante de la lente. La figura 32.49*a* muestra un diagrama de un objeto colocado a 25 cm de una lente convergente que produce una imagen derecha virtual en $s' = -75$ cm. La figura 32.49*b* muestra la imagen formada en la retina por la potencia de enfoque del ojo.



(a)



(b)

FIGURA 32.49

SOLUCIÓN

(*a*) Utilizar la ecuación de la lente delgada con $s = 25$ cm y $s' = -75$ cm para calcular la potencia, $1/f$:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{25\text{ cm}} + \frac{1}{-75\text{ cm}}$$

$$= \frac{2}{75\text{ cm}} = \frac{2}{0{,}75\text{ m}} = \boxed{2{,}7\text{ D}}$$

(*b*) Siendo $m = -s'/s$, determinar m:

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-75\text{ cm}}{25\text{ cm}} = \boxed{3{,}0}$$

(*c*) En ambos casos, los rayos que entran por el ojo parecen divergir desde una imagen colocada a 75 cm delante del ojo. Sin embargo, con la lente puesta en su lugar, la imagen es 3 veces mayor.

$\boxed{\text{Opción 2}}$

OBSERVACIÓN (1) Si el punto próximo es 75 cm, hay hipermetropía. Para leer un libro deberá colocarlo al menos a 75 cm del ojo, de modo que la letra impresa quede enfocada en la retina. La imagen de la impresión sobre la retina es entonces muy pequeña. La lente de las gafas de lectura produce una imagen que también está a 75 cm del ojo, pero esta imagen es 3 veces mayor que la real. De esta forma, mirando a través de la lente, la imagen de lo escrito queda en la retina con un aumento equivalente a un factor 3. (2) En este ejemplo, la distancia desde la lente al ojo la consideramos despreciable. Los resultados serían ligeramente diferentes si esa distancia no pudiera ser despreciada y fuera considerada en los cálculos.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.12 Calcular la potencia del cristalino del ojo para el cual el punto próximo es 75 cm y la distancia córnea-retina es de 2,5 cm, y calcular la potencia combinada de las dos lentes en contacto (cristalino y lente). Comparar esta potencia con la de una lente para la cual $s' = 2{,}5$ cm cuando $s = 25$ cm.

*LA LUPA (LENTE DE AUMENTO)

En el ejemplo 32.13, hemos visto que el tamaño aparente de un objeto puede aumentarse utilizando una lente convergente colocada cerca del ojo. Una lente convergente de este tipo recibe el nombre de lupa o **lente de aumento** si se coloca cerca del ojo y si el objeto está más próximo a la lente que su distancia focal, como era el caso del ejemplo 32.13. En aquel ejemplo, la lente formaba una imagen virtual en un punto próximo al ojo, cuya posición coincidía con la localización en la que el objeto debía ponerse para obtener la mejor visión posible por parte del ojo desnudo. De este modo, con la lente colocada, la distancia imagen $|s'|$ era mayor que la distancia objeto s, y así la imagen vista por el ojo tenía un aumento que venía dado por $m = |s'|/s$. Si la altura real del objeto hubiese sido y, la altura de la imagen y', formada por la lente habría sido my. Para el ojo, esta imagen es subtendida con un ángulo θ (figura 32.50) dado, aproximadamente, por

$$\theta = \frac{my}{|s'|} = m\frac{y}{|s'|} = \frac{|s'|}{s}\frac{y}{|s'|} = \frac{y}{s}$$

que es *exactamente el mismo ángulo* que subtendería el objeto si se quitara la lente, siempre y cuando el objeto y el ojo se mantuvieran en el mismo lugar. Esto es, el tamaño aparente de la imagen vista por el ojo a través de la lente es el mismo que el tamaño aparente del objeto que debería ser visto por el ojo cuando no fuera ayudado por la lente (suponiendo que el ojo enfocara a esa distancia). Por lo tanto, el tamaño aparente del objeto visto a través de la lente es inversamente proporcional a la distancia del objeto al ojo con la lente colocada. Cuanto menor es s, mayor es el ángulo subtendido θ y mayor es el tamaño aparente del objeto.

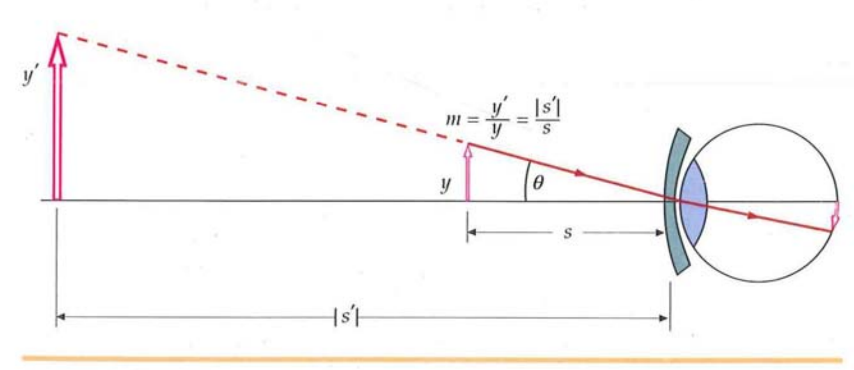


FIGURA 32.50

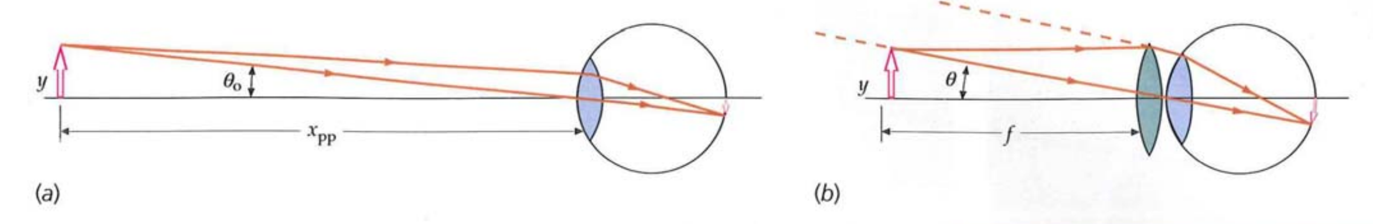


FIGURA 32.51 (*a*) Un objeto situado en el punto próximo subtiende un ángulo θ_o en el ojo sin lente. (*b*) Cuando el objeto está en el punto focal de la lente convergente, los rayos emergen de la lente paralelos entre sí y entran en el ojo como si procediesen de un objeto situado a una distancia muy grande. Así pues, la imagen es observada por el ojo relajado como procedente del infinito. Cuando f es menor que la distancia del punto próximo, la lente convergente permite que el objeto se acerque más al ojo, incrementando así el ángulo θ subtendido por el objeto y aumentando, en consecuencia, el tamaño de la imagen sobre la retina.

En la figura 32.51*a*, un pequeño objeto de altura y está en el punto próximo del ojo a una distancia x_{pp}. El ángulo subtendido, θ_o, viene dado, aproximadamente, por

$$\theta_o = \frac{y}{x_{pp}}$$

En la figura 32.51*b*, se ha colocado delante del ojo, a una distancia despreciable, una lente convergente de distancia focal f, inferior a x_{pp}, y el objeto se ha situado en el punto focal de la lente. Los rayos emergen paralelos de la lente, indicando que la imagen está delante de ella a una distancia infinita. Los rayos paralelos son enfocados por el ojo relajado sobre la retina. El ángulo subtendido por esta imagen es igual al ángulo subtendido por el objeto (suponiendo que la distancia entre la lente y el ojo es despreciable). El ángulo subtendido por el objeto es ahora, aproximadamente,

$$\theta = \frac{y}{f}$$

El cociente θ / θ_o se denomina *amplificación (o aumento) angular o poder amplificador M* de la lente:

$$M = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{x_{pp}}{f} \qquad 32.20$$

Se utiliza este tipo de lentes simples (llamadas oculares) en microscopios y en telescopios para observar la imagen formada por otra lente o sistema de lentes. Además, para corregir aberraciones, suelen utilizarse combinaciones de lentes con una distancia focal resultante positiva y corta, en lugar de emplear una sola lente, pero el principio es el mismo que el de una lupa.

Ejemplo 32.14 Aumento angular de una lupa o microscopio simple

Inténtelo usted mismo

Una persona cuyo ojo tiene su punto próximo situado a 25 cm utiliza una lente de 40 D como lupa. ¿Qué amplificación angular se obtiene?

PLANTEAMIENTO El aumento angular se determina a partir de la distancia focal (ecuación 34.20), que es el valor recíproco de la potencia.

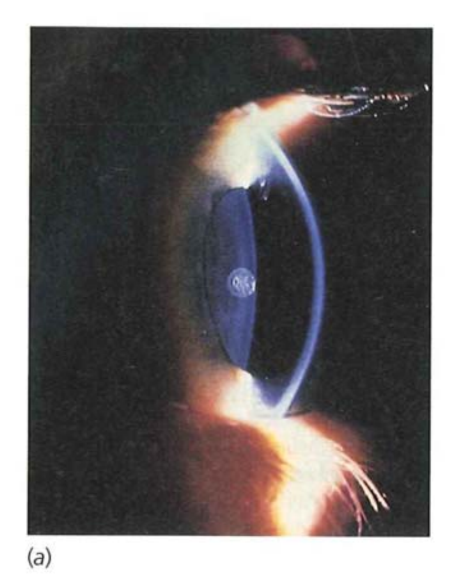
SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

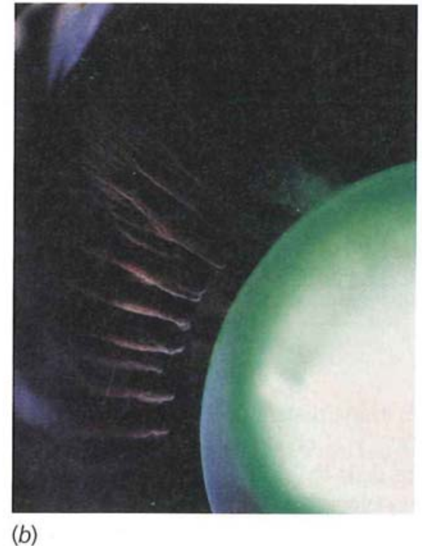
Pasos	Respuestas
1. Calcular la distancia focal de la lente usando $P = 1/f$ (ecuación 32.13).	$f = 2{,}5$ cm
2. Utilizar este resultado en la ecuación 32.20 para calcular la amplificación angular.	$M = \boxed{10}$

OBSERVACIÓN Mirando a través de la lente, el objeto parece 10 veces mayor porque puede situarse a 2,5 cm del ojo, en lugar de los 25 cm del punto próximo; de este modo se incrementa diez veces el tamaño de la imagen en la retina.

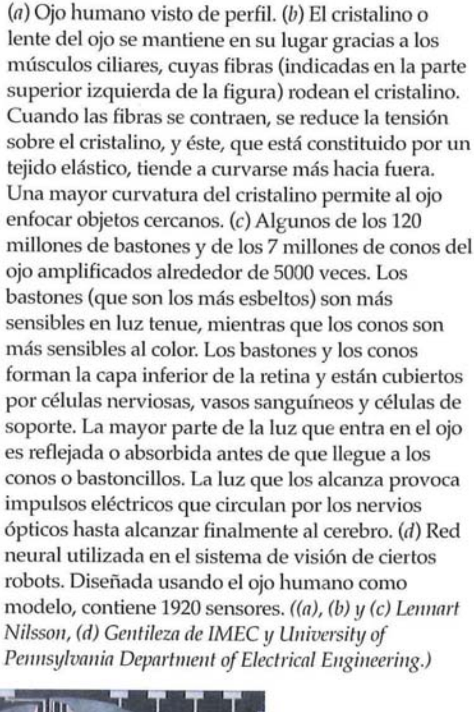
PROBLEMA PRÁCTICO 32.13 ¿Cuál sería el aumento angular en este ejemplo si el punto próximo de la persona estuviera a 30 cm en lugar de a 25 cm?



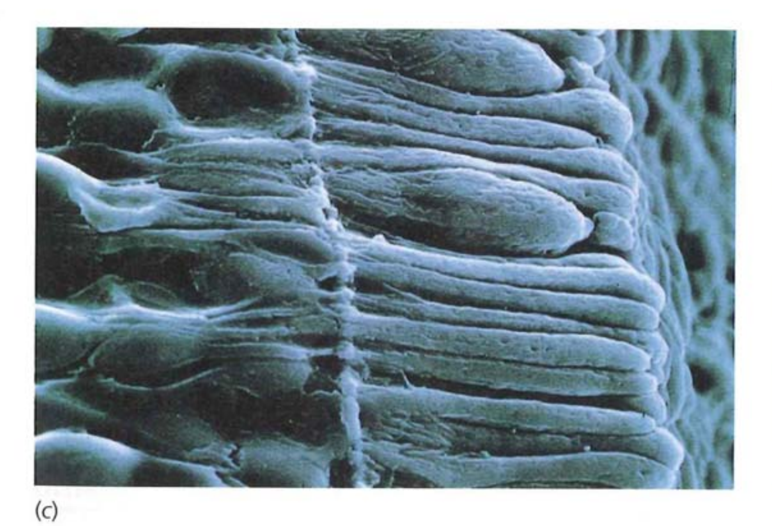
(*a*)



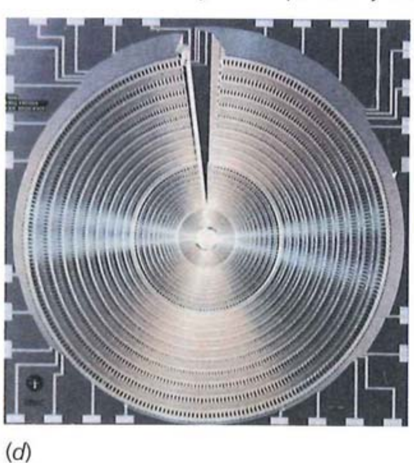
(*b*)



(*a*) Ojo humano visto de perfil. (*b*) El cristalino o lente del ojo se mantiene en su lugar gracias a los músculos ciliares, cuyas fibras (indicadas en la parte superior izquierda de la figura) rodean el cristalino. Cuando las fibras se contraen, se reduce la tensión sobre el cristalino, y éste, que está constituido por un tejido elástico, tiende a curvarse más hacia fuera. Una mayor curvatura del cristalino permite al ojo enfocar objetos cercanos. (*c*) Algunos de los 120 millones de bastones y de los 7 millones de conos del ojo amplificados alrededor de 5000 veces. Los bastones (que son los más esbeltos) son más sensibles en luz tenue, mientras que los conos son más sensibles al color. Los bastones y los conos forman la capa inferior de la retina y están cubiertos por células nerviosas, vasos sanguíneos y células de soporte. La mayor parte de la luz que entra en el ojo es reflejada o absorbida antes de que llegue a los conos o bastoncillos. La luz que los alcanza provoca impulsos eléctricos que circulan por los nervios ópticos hasta alcanzar finalmente al cerebro. (*d*) Red neural utilizada en el sistema de visión de ciertos robots. Diseñada usando el ojo humano como modelo, contiene 1920 sensores. *((a), (b) y (c) Lennart Nilsson, (d) Gentileza de IMEC y University of Pennsylvania Department of Electrical Engineering.)*



(*c*)



(*d*)

*MICROSCOPIO COMPUESTO

El microscopio compuesto (figura 32.52) se utiliza para examinar objetos muy pequeños situados a distancias muy cortas. En su forma más simple, está formado por dos lentes convergentes. La lente más cercana al objeto, denominada **objetivo**, forma una imagen real del objeto. Esta imagen está aumentada y es invertida. La lente más próxima al ojo, denominada **ocular**, se utiliza como una lupa simple para observar la imagen formada por el objetivo. El ocular se coloca de forma tal que la imagen formada por el objetivo se localiza en el primer punto focal del ocular. La luz emerge así del ocular en forma de haz paralelo como si procediese de un punto situado a una gran distancia delante de la lente. (Esto se denomina normalmente *ver la imagen en el infinito*.)

La distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular recibe el nombre de **longitud del tubo** L. Su valor es, aproximadamente, 16 cm. El objeto se coloca ligeramente fuera del primer punto focal del objetivo de modo que se forme una imagen aumentada en el primer punto focal del ocular a una distancia $L + f_o$ del objetivo, donde f_o es la distancia focal del objetivo. Según se ve en la figura 32.52, $\operatorname{tg} \beta = y/f_o = -y'/L$. La amplificación lateral del objetivo es, pues,

$$m_o = \frac{y'}{y} = -\frac{L}{f_o} \qquad 32.21$$

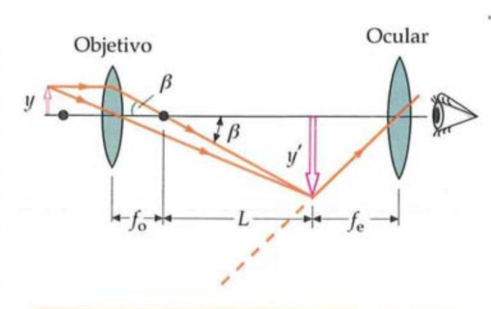


FIGURA 32.52 Diagrama esquemático de un microscopio compuesto formado por dos lentes positivas, el objetivo, de distancia focal f_o, y el ocular, de distancia focal f_e. La imagen real del objeto formada por el objetivo se observa a través del ocular, que actúa como una lupa simple. La imagen final se encuentra en el infinito.

Y la amplificación angular del ocular es

$$M_e = \frac{x_{pp}}{f_e}$$

donde x_{pp} es el punto próximo del observador (el punto más próximo del observador al cual éste puede enfocar) y f_e es la distancia focal del ocular. El poder amplificador de un microscopio es el producto de la amplificación lateral del objetivo por la amplificación angular del ocular:

$$M = m_o M_e = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{pp}}{f_e} \qquad 32.22$$

PODER AMPLIFICADOR DE UN MICROSCOPIO

Ejemplo 32.15 Microscopio compuesto

Un microscopio tiene una lente objetivo de 1,2 cm de distancia focal y un ocular de 2 cm de distancia focal separadas 20 cm. (*a*) Hallar el poder amplificador si el punto próximo del observador está a 25 cm. (*b*) ¿Dónde deberá colocarse el objeto si la imagen final ha de verse en el infinito?

PLANTEAMIENTO Para calcular el aumento se usa la ecuación 32.22 y para determinar la distancia objeto para el objetivo se utiliza la ecuación de la lente.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. El poder amplificador viene dado por la ecuación 32.22:

$$M = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{np}}{f_e}$$

2. La longitud del tubo L es la distancia entre las lentes menos las distancias focales:

$$L = 20{,}0\text{ cm} - 2{,}0\text{ cm} - 1{,}2\text{ cm} = 16{,}8\text{ cm}$$

3. Aplicar este valor de L y los valores dados de x_{pp}, f_o y f_e para calcular M:

$$M = -\frac{L}{f_o}\frac{x_{pp}}{f_e} = -\frac{16{,}8\text{ cm}}{1{,}2\text{ cm}}\frac{25{,}0\text{ cm}}{2{,}0\text{ cm}} = \boxed{-180}$$

(*b*) 1. Calcular la distancia objeto s en función de la distancia imagen s' correspondiente al objetivo y de la distancia focal, f_o:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_o}$$

2. Como puede verse en la figura 32.52, la distancia imagen para la imagen formada por el objetivo es $f_o + L$:

$$s' = f_o + L = 1{,}2\text{ cm} + 16{,}8\text{ cm} = 18{,}0\text{ cm}$$

3. Aplicar este valor en el cálculo de s:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{18{,}0\text{ cm}} = \frac{1}{1{,}2\text{ cm}}$$

$$s = \boxed{1{,}3\text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN El aumento calculado es muy grande, lo cual es lógico, ya que los microscopios compuestos se uitlizan para lograr grandes aumentos.

OBNSERVACIÓN El objeto debe situarse a 1,3 cm del objetivo, o sea, a 0,1 cm más allá de su primer punto focal.

*TELESCOPIO

El telescopio se utiliza para observar objetos que están muy alejados y son normalmente grandes. Funciona creando una imagen del objeto mucho más próxima que éste. El telescopio astronómico, ilustrado esquemáticamente en la figura 32.53, se compone de dos lentes positivas: una lente objetivo que forma una imagen real e invertida, y un ocular que se utiliza como una lupa simple para observar esta imagen. Como el objeto está muy lejano, la imagen dada por el objetivo se sitúa en su plano focal y la distancia imagen es igual a f_o. Puesto que la distancia objeto es mucho mayor que la distancia focal del objetivo, la imagen formada por el objetivo es mucho menor que el objeto.

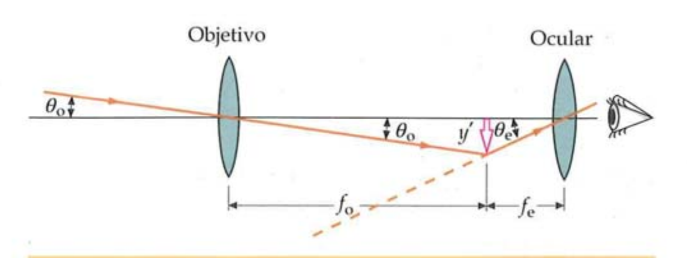


FIGURA 32.53 Diagrama esquemático de un telescopio astronómico. El objetivo forma una imagen real, invertida, de un objeto distante cerca de su segundo punto focal, que coincide con el primer punto focal del ocular. Éste sirve como lupa simple para observar la imagen.

Por ejemplo, si estamos mirando a la Luna, la imagen del satélite formada por el objetivo es mucho menor que la propia Luna. Lo que se pretende con el objetivo no es amplificar el objeto, sino producir una imagen que esté más cerca de nosotros y que pueda así observarse con el ocular. Éste se encuentra a una distancia f_e de la imagen, siendo f_e la distancia focal del ocular, de modo que la imagen final puede observarse en el infinito. Como esta imagen se encuentra en el segundo plano focal del objetivo y en el primer plano focal del ocular, las lentes objetivo y ocular deben estar separadas por la suma de sus distancias focales, $f_o + f_e$.

El poder amplificador (aumento) del telescopio es la amplificación angular θ_e/θ_o, siendo θ_e el ángulo subtendido por la imagen final, según se ve a través del ocular, y θ_o es el ángulo subtendido por el objeto cuando se observa directamente sin la ayuda de ninguna lente. El ángulo θ_o es el mismo que el que subtendía el objeto en el objetivo indicado en la figura 32.53. (La distancia de un objeto lejano, como la Luna, al objetivo, es esencialmente la misma que la distancia al ojo.) En esta figura puede verse que

$$\operatorname{tg}\theta_o = \frac{y}{s} = -\frac{y'}{f_o} \approx \theta_o$$

donde hemos utilizado la aproximación de ángulo pequeño tg $\theta \approx \theta$. El ángulo θ_e de la figura es el subtendido por la imagen final:

$$\operatorname{tg}\theta_e = \frac{y'}{f_e} \approx \theta_e$$

Como y' es negativo, θ_e también lo es, indicando que la imagen está invertida. El poder amplificador del anteojo es entonces

$$M = \frac{\theta_e}{\theta_o} = -\frac{f_o}{f_e} \qquad 32.23$$

PODER AMPLIFICADOR DE UN TELESCOPIO

Según esta ecuación 32.23, podemos ver que se consigue un gran poder amplificador con un objetivo de gran distancia focal y un ocular de pequeña distancia focal.

PROBLEMA PRÁCTICO 32.14

El telescopio refractor más grande del mundo está en el Observatorio Yerkes de la Universidad de Chicago en Williams Bay, Wisconsin (Estados Unidos). El objetivo tiene un diámetro de 1,02 cm y una distancia focal de 19,5 m. La distancia focal del ocular es 10 cm. ¿Cuál es su poder amplificador?

La principal consideración a tener en cuenta en el caso de un telescopio astronómico no es su poder amplificador, sino su capacidad de recoger la luz procedente del objeto lejano, que depende del tamaño del objetivo. Cuanto mayor es el objetivo, mayor es la luminosidad de la imagen. Sin embargo, son muy difíciles de fabricar lentes muy grandes sin aberraciones. Además, se plantean serios problemas mecánicos a la hora de sujetar y soportar lentes muy grandes y pesadas por sus bordes. Un telescopio reflector (figuras 32.54 y 32.55) utiliza un espejo cóncavo en lugar de una lente como objetivo. Esto ofrece varias ventajas importantes. Una de ellas es que un espejo no produce aberración cromática. Además, su sujeción mecánica es mucho más sencilla porque el espejo pesa bastante menos que una lente de calidad

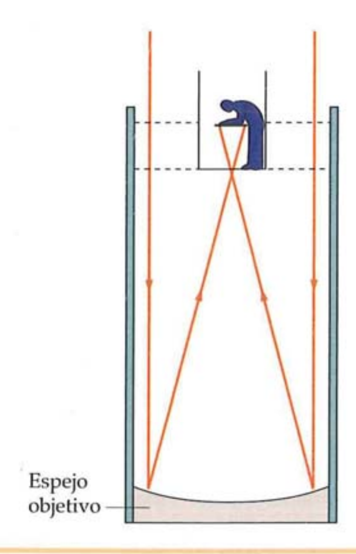


FIGURA 32.54 Los telescopios reflectores utilizan un espejo cóncavo como objetivo. Como el compartimiento donde se aloja el observador bloquea parte de la luz incidente, la estructura indicada en la figura sólo se utiliza en telescopios con espejos objetivo muy grandes.

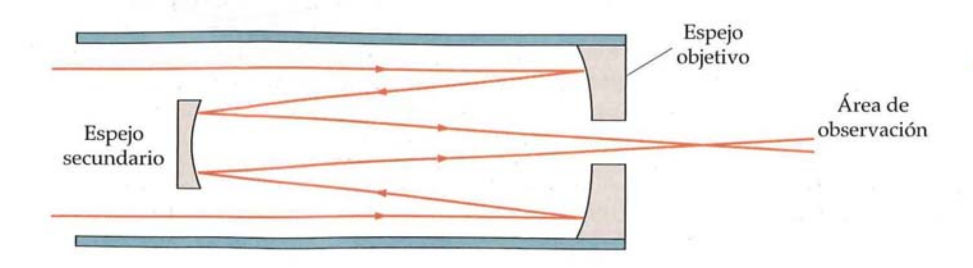
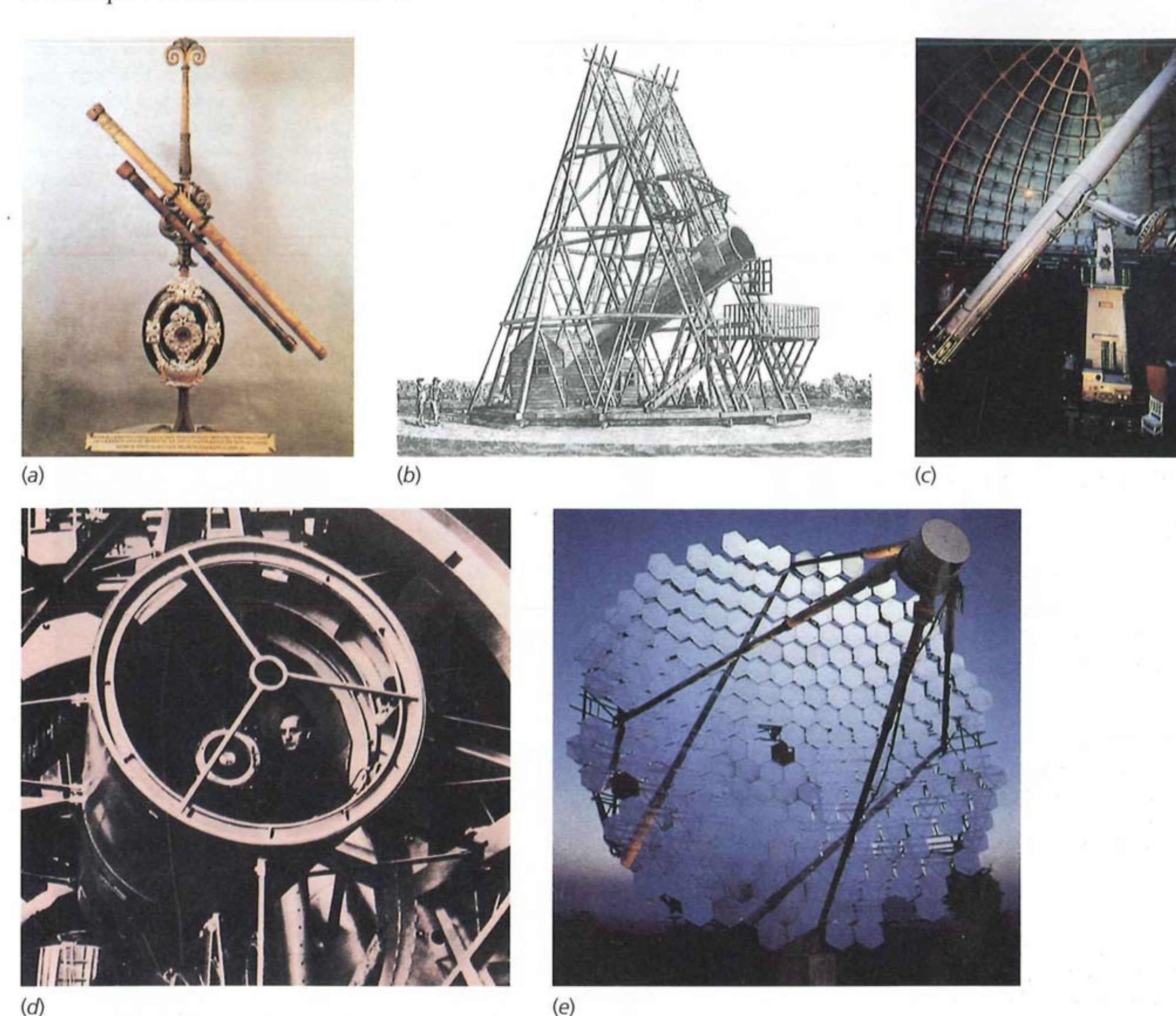


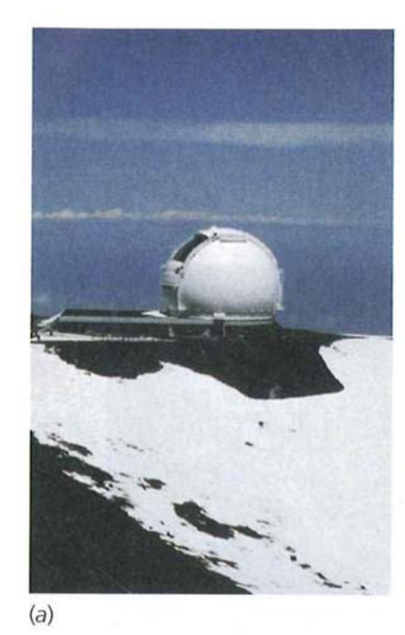
FIGURA 32.55 Telescopio reflector con un espejo secundario para dirigir la luz de forma que atraviese un pequeño orificio existente en el espejo objetivo. Así se dispone de más sitio para alojar instrumentación auxiliar en el espacio donde se realiza la observación.

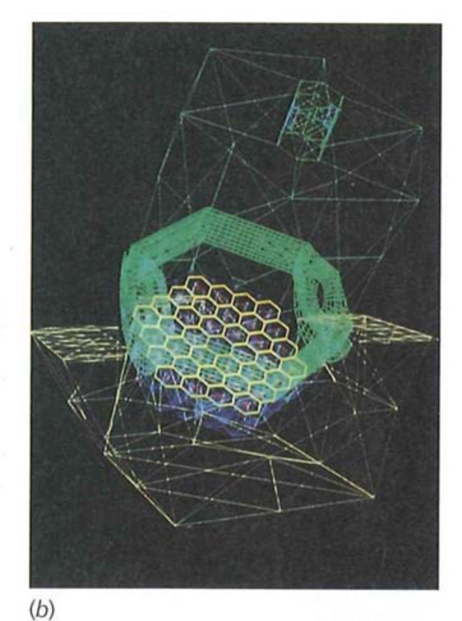
óptica equivalente y puede sujetarse en toda su superficie trasera. En los telescopios modernos, el espejo objetivo consta de varias docenas de segmentos especulares que se adaptan entre sí, y que pueden ajustarse individualmente para corregir pequeñas variaciones de tensión gravitatoria cuando el telescopio se inclina o para compensar dilataciones y contracciones térmicas y otros cambios producidos por condiciones climáticas. También pueden ajustarse para anular las distorsiones producidas por fluctuaciones atmosféricas.

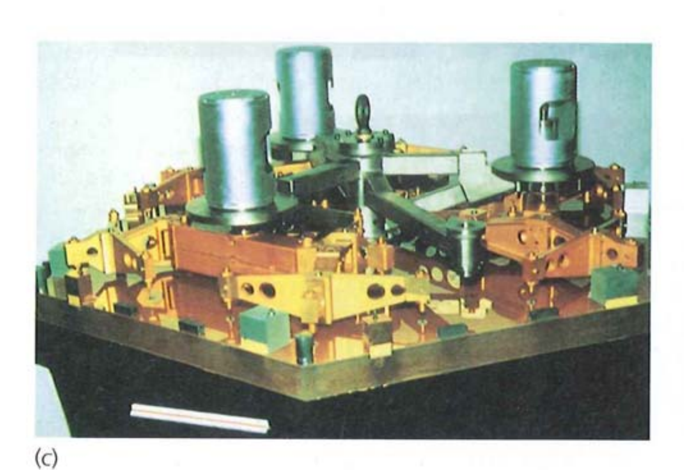


(*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

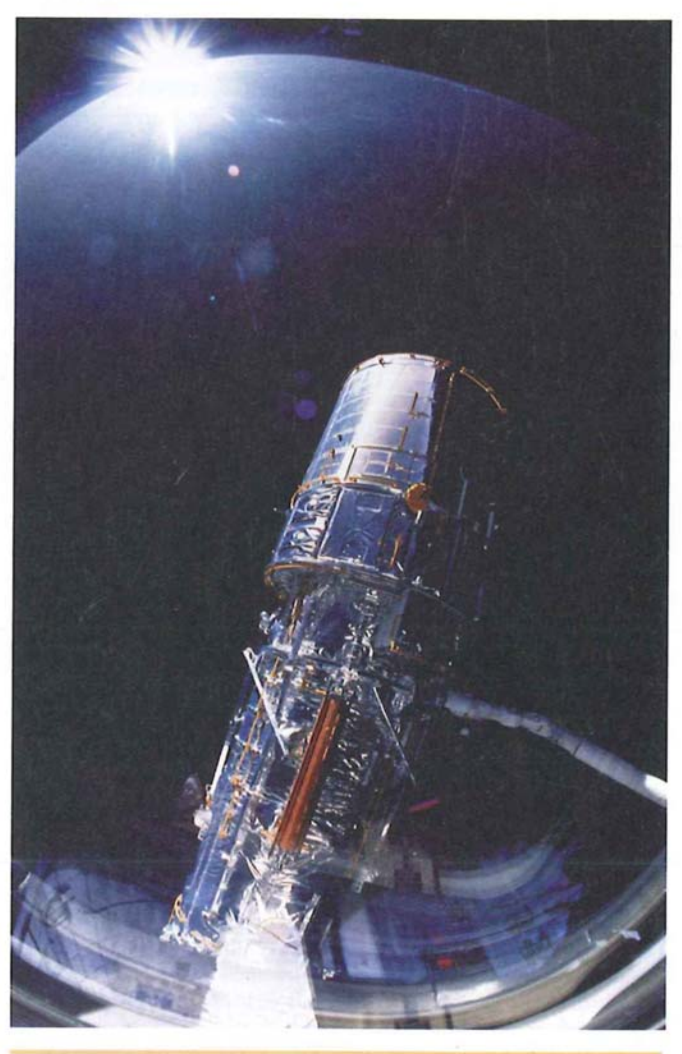
La astronomía con longitudes de onda ópticas comenzó con Galileo hace unos 400 años. En el siglo XX, los astrónomos empezaron a explorar el espectro electromagnético a otras longitudes de onda, empezando con la radioastronomía en la década de 1940; luego, en los comienzos de la década de 1960 siguieron con la astronomía de los rayos X basada en los satélites artificiales y, más recientemente, se trabaja en astronomía de ultravioleta, infrarrojos y rayos gamma. (*a*) Anteojo de Galileo del siglo XVII con el que descubrió las montañas de la Luna, las manchas solares, los anillos de Saturno y las bandas y las lunas de Júpiter. (*b*) Grabado del telescopio reflector construido en la década de 1780 y que fue utilizado por el gran astrónomo Friedrich Wilhelm Hershel. Fue el primero en observar galaxias exteriores a la nuestra. (*c*) Debido a la dificultad de construir lentes grandes y libres de defectos, los anteojos o telescopios refractores, como este de 91,4 cm del Observatorio de Lick, han sido superados en su capacidad de recoger grandes cantidades de luz por los telescopios reflectores. (*d*) Aquí puede verse al gran astrónomo Edwin Powell Hubble, que descubrió la aparente expansión del universo. Se encuentra sentado en la cabina del observador del telescopio reflector *Hale* de 5,08 m, que es lo suficientemente grande como para que el observador se siente en el propio foco principal. (*e*) Este reflector óptico de 10 m, en el Observatorio de Whipple, en el sur de Arizona, es el instrumento más grande construido expresamente para ser utilizado en la astronomía de los rayos gamma. Los rayos gamma de alta energía, de origen desconocido, inciden sobre la parte superior de la atmósfera y crean cascadas de partículas, como electrones de elevada energía que emiten radiación Cerenkov que puede observarse desde el suelo. De acuerdo con cierta hipótesis, los rayos gamma de alta energía son emitidos cuando la materia se acelera hacia unas estrellas ultradensas en rotación, denominadas pulsares. *((a) Scala/Art Resource, (b) Royal Astronomical Society Library, (c) Lick Observatory, gentileza de the University of California Regents, (d) California Institute of Technology, (e) Gary Ladd.)*


(*a*)


(*b*)


(*c*)

(*a*) El Observatorio Keck, situado en la cima del volcán inactivo de Mauna Kea, Islas Hawaii, dispone del telescopio óptico más grande del mundo. En este lugar tan remoto y a esta altitud tan elevada, el aire es claro, seco y no existe contaminación lumínica, lo que hace que este lugar sea casi el ideal para la observación astronómica. (*b*) El telescopio *Keck*, está compuesto de 36 segmentos de espejo hexagonales que en conjunto constituyen un solo espejo de 10 m de amplitud —aproximadamente el doble de grande que el telescopio de un solo espacio más grande que funciona actualmente. (*c*) Debajo de cada segmento de espejo Keck existe un sistema de sensores controlados por ordenador y sistemas mecánicos accionados por motor que pueden hacer variar de modo continuo la forma del espejo. Estos ajustes de las posiciones y variaciones tienen precisiones hasta de 100 nm, lo cual permite al sistema compensar las variaciones en la alineación de los segmentos debidas a pequeñísimos cambios de las tensiones gravitatorias cuando se inclina el telescopio, a las dilataciones y contracciones térmicas, y a las fluctuaciones de las corrientes de aire que se producen en la cima de la montaña. *(California Association for Research in Astronomy.)*



Telescopio espacial *Hubble*, situado en órbita muy por encima de la turbulencias atmosféricas que limitan la capacidad de los telescopios montados en Tierra de resolver imágenes en las longitudes de onda ópticas. *(NASA.)*

Avances en cirugía ocular

La primera noticia acerca de la realización de cirugía ocular data de unos 2000 años atrás, y se debe a un cirujano indú conocido como Susruta.[1,2] El cristalino del ojo humano puede adquirir una progresiva opacidad con la edad, por exposición a luz ultravioleta, como síntoma de alguna enfermedad o por agentes químicos. Esta opacidad se denomina coloquialmente catarata. Susruta dio a conocer cómo diagnosticó una catarata y cómo extrajo el cristalino.

En 2005, se operaron más de un millón de cataratas en Estados Unidos.[3] En la mayoría de los casos se extrajo el cristalino y se implantó una lente artificial en el interior del ojo. Aunque esta técnica de sustitución del cristalino por una lente intraocular (IOL, acrónimo en inglés) fue utilizada por primera vez en 1951,[4] su uso no se generalizó hasta 1980. Anteriormente, los pacientes de cataratas tenían que compensar la deficiencia de visión con lentes correctoras de muchas dioptrías (gafas, o lentes de contacto a partir de 1960) después de ser operados.



Desafortunadamente, esta persona tiene una catarata afectándole por completo la lente interna del ojo (cristalino). La presencia de la catarata se asocia con un eccema grave que es ostensible en su frente. *(Western Ophthalmic Hospital/Photo Researchers.)*

Los pacientes de cataratas a quienes se les implanta lentes artificiales intraoculares deben llevar gafas correctoras porque aquéllas son lentes de foco fijo. Sin embargo, actualmente, se está introduciendo la técnica de uso de lentes intraoculares de foco variable (que denominaremos focalizables), que permiten una cierta capacidad de acomodación del ojo por ser mutifocales.[5,6] Esta propiedad de multifocalidad hace posible que los músculos del ojo puedan focalizar de forma variable. Con esta técnica actual algunos pacientes de cataratas a los que se les implanta lentes focalizables llegan a conseguir una visión aceptable sin necesidad de utilizar gafas.

Muchas personas llevan gafas sin tener cataratas. Por ejemplo, en Estados Unidos, alrededor de 150 millones de personas gastan 15 000 millones de dólares al año en lentes correctoras.[7] Además, existe la denominada cirugía refractiva que se practica a casi un millón de personas al año, y gracias a la cual se reduce en gran medida la necesidad de dioptrías complementarias con lentes externas.[8] Con la cirugía refractiva se reconstruye la córnea con objeto de disminuir las deficiencias en la refracción ocular. Aunque esta técnica se empezó a usar en los años 30 del siglo XX, se generalizó cuando se pudo utilizar luz láser a partir de los 80.[9] La cirugía refractiva se hace por medio de abrasión química o mecánica. Más recientemente, es común el uso de luz láser para producir evaporaciones de pequeñas partes de la córnea. En algunas de estas prácticas quirúrgicas refractivas, se realizan pequeños cortes de tejido ocular en forma de delgadas películas, con forma de solapa, obtenidas de las capas externas de la córnea; con ellas se prepara un tejido de sustitución que se vuelve a colocar en la zona más gruesa de la superficie inferior de la córnea. Actualmente, se realizan otras prácticas quirúrgicas en las que la reimplantación del tejido sustitutivo se hace en la superficie exterior de la córnea.[10]

La cirugía refractiva es más adecuada en pacientes con valores bajos o medios de insuficiencia ocular en la refracción. Hasta el 72% de los pacientes con miopía baja o moderada llegaron a conseguir una capacidad visual del 80% o más, con respecto de la de un ojo normal, una vez que fueron operados.[11] Recientemente, se realiza cirugía con frentes de onda guiadas de luz láser. Estas ondas se generan de forma específica para cada caso.[12] De esta forma se consigue minimizar las deficiencias en la refracción ocular mucho más eficazmente que con otras prácticas quirúrgicas. La luz llega a la retina a través de una zona extensa de la córnea. El frente de onda de retorno se analiza en zonas muy concretas y localizadas en las que se producen refracciones defectuosas permitiendo con ello que pueden ser subsanadas. Con esta técnica de los frentes de onda, generados *ad hoc* para cada caso, hasta un 89% de los pacientes consiguen una visión prácticamente normal.

No obstante, incluso con los mejores cirujanos oftalmólogos pueden surgir complicaciones al utilizar estas prácticas quirúrgicas de refracción ocular.[13,14] Estas complicaciones son tanto más probables cuanto mayores sean los defectos de refracción que presenten los pacientes, de tal forma que en casos de graves insuficiencias no se recomienda la práctica de este tipo de cirugía.[15] En cualquier caso, algunos de estos pacientes pueden llegar a disfrutar de cierta capacidad visual sin necesidad de utilizar gafas. Últimamente, se están realizando pruebas de inclusión de IOL focalizables en personas con grandes defectos de refracción ocular. Bastantes de estos pacientes consiguen una visión casi normal después de someterse a cirugía, lo cual les permite no tener que depender del uso de lentes externas complementarias.[16]

1 Raju, V. K., "Susruta of Ancient India." *Indian Journal of Ophthalmology*, Feb. 2003, Vol. 51, No. 2, pp. 119–122. http://www.ijo.in/article.asp?issn=0301-4738;year=2003;volume=51;issue=2;spage=119;epage=122;aulast=Raju As of Nov. 2006.
2 Hellemans, A., and Bunch, B., *The Timetables of Science*. New York: Simon & Schuster, 1988, p. 28.
3 American Academy of Ophthalmology, "Industry News." *Academy Express*, Vol. 5, No. 14, http://www.aao.org/news/academy_express/20060405.cfm#asc As of Nov. 2006.
4 Apple, D. J., "Sir Harold Ridley." *Journal of Cataract and Refractive Surgery*, Mar. 2004, Vol. 30, No. 3, pp. 47–52.
5 Cummings, J. S., et al., "Clinical Evaluation of the Crystalens AT-45 Accommodating Intraocular Lens: Results of the U.S. Food and Drug Administration Clinical Trial." *Journal of Cataract and Refractive Surgery*, May 2006, Vol. 32, No. 5, pp. 812–825.
6 Charters, L., "Dual-Optic IOL Effective Answer to Presbyopia." *Ophthalmology Times*, Feb. 1, 2006, pp. 20–21.
7 Rados, C., "A Focus on Vision." *FDA Consumer*, Jul.–Aug. 2006, pp. 10–17.
8 American Academy of Ophthalmology, "Industry News." *Academy Express*, Vol. 5, No. 14, http://www.aao.org/news/academy_express/20060405.cfm#asc As of Nov. 2006.
9 Kornmehl, E., "The Start of Something Big." *Ophthalmology Times*, Nov. 1, 2006, Vol. 31, No. 21, p. 24.
10 Sakimoto, T., Rosenblatt, M., and Azar, D., "Laser Eye Surgery for Refractive Errors." *The Lancet*, Apr. 29, 2006, Vol. 367, No. 9520, pp. 1432–1447.
11 Sakimoto, T., Rosenblatt, M., and Azar, D., op. cit.
12 Mackenzie, D., "Coming Soon: 'Wavefront Eye Surgery'?" *Science*, Mar. 14, 2003, Vol. 299, No. 5613, p. 1655.
13 Potter, J., "Do What's Right When Refractive Surgery Goes Wrong." *Review of Optometry*, Oct. 15, 2006, pp. 52–62.
14 Guttman, C., "DLK a Lifelong Risk in Post-LASIK eyes." *Ophthalmology Times*, Nov. 1, 2006, Vol. 31, No. 21, pp. 1+.
15 Sakimoto, T., Rosenblatt, M., and Azar, D., op. cit.
16 Charters, L., "Accommodating IOL Improves Vision for High Refractive Errors in Analysis." *Ophthalmology Times*, Jun. 1, 2006, Vol. 31, No. 11, p. 43.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Imágenes y objetos virtuales y reales	
Imágenes	Una imagen es *real* si la luz converge realmente en el punto imagen. Esto puede ocurrir delante de un espejo o en el lado de transmisión de una lente delgada o de una superficie refractora. Una imagen es *virtual* cuando lo que converge en los puntos imagen son sólo las extensiones de los rayos de luz reales. Esto puede suceder detrás de un espejo o en el lado de incidencia de una lente o de una superficie refractora.
Objetos	Un objeto se denomina *real* si es un objeto existente o si es una imagen real y los rayos que divergen de cada punto objeto son reales. Esto sólo ocurre en la región de la luz incidente de un espejo, de una lente o de una superficie que refracta la luz. Un objeto es *virtual* si son las prolongaciones de los rayos reales de luz las que divergen de cada punto objeto, y esto sólo puede suceder detrás de un espejo y en la región de la luz refractada de una lente o de una superficie refractante.
2. Espejos esféricos	
Distancia focal	La distancia focal es la distancia imagen cuando el objeto está en el infinito, de modo que la luz incidente es paralela al eje.
Ecuación del espejo (para la localización de una imagen)	$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad 32.4$$ donde $$f=\frac{r}{2} \qquad 32.3$$
Aumento lateral	$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \qquad 32.5$$
Diagramas de rayos	Las imágenes pueden localizarse mediante un diagrama de rayos utilizando dos rayos paraxiales cualesquiera. Los más fáciles de dibujar son el rayo paralelo, el focal y el radial: 1. El rayo paralelo, trazado paralelamente al eje, se refleja pasando por el punto focal. 2. El rayo focal, trazado a través del foco, se refleja paralelamente al eje. 3. El rayo radial, trazado a través del centro de curvatura, choca contra el espejo perpendicularmente a su superficie y se refleja de nuevo hacia atrás sobre sí mismo.
Convenio de signos	1. s es positiva si el objeto está delante (lado de incidencia) del espejo. 2. s' es positiva si la imagen está delante (lado de reflexión) del espejo. 3. r y f son positivos si el centro de curvatura está delante (lado de reflexión) del espejo (espejo cóncavo).
3. Imágenes formadas por refracción	
Refracción en una sola superficie	$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{r} \qquad 32.6$$ donde n_1 es el índice de refracción correspondiente al lado de incidencia de la superficie.
Aumento	$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{n_1 s'}{n_2 s} \qquad 32.7$$
Convenio de signos	1. s es positiva (objeto real) para objetos delante (lado de incidencia) de la superficie.
	2. s' es positiva (imagen real) para imágenes detrás (lado de transmisión) de la superficie.
	3. r es positivo si el centro de curvatura está en el lado de la luz refractada (lado de transmisión).

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
4. Lentes delgadas		
Distancia focal (fórmula del constructor de lentes)	$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{aire}}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ Una lente positiva ($f > 0$) es convergente. Una lente negativa ($f < 0$) es divergente.	32.11
Puntos focales primero y segundo	Los rayos incidentes paralelos al eje emergen hacia el segundo punto focal F' (también denominado punto focal imagen o foco imagen) o divergen de él. Los rayos incidentes dirigidos hacia, o que se alejan, del primer punto focal F (también denominado punto focal objeto o foco objeto) emergen paralelos al eje.	
Potencia	$$P = \frac{1}{f}$$	32.13
Ecuación de la lente delgada (para localización de la imagen)	$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$	32.12
Aumento	$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$	32.14
Diagramas de rayos	Las imágenes pueden localizarse mediante un diagrama de rayos utilizando dos rayos paraxiales cualesquiera. Los más fáciles de dibujar son el rayo paralelo, el central y el focal: 1. El rayo paralelo, trazado paralelamente al eje, se desvía pasando por el segundo punto focal de la lente. 2. El rayo central, trazado a través del centro (el vértice) de la lente, no se desvía. 3. El rayo focal, trazado a través del primer punto focal, emerge paralelo al eje.	
Convenio de signos	El convenio de signos es el mismo que el establecido para la refracción en una superficie esférica.	
5. *Aberraciones	El fenómeno en virtud del cual se ve borrosa la imagen de un simple punto se conoce como aberración. La aberración esférica se produce debido a que las superficies esféricas enfocan sólo los rayos paraxiales (los que se propagan cercanos al eje) en un solo punto. Los rayos no-paraxiales se enfocan en puntos cercanos dependiendo del ángulo que formen con el eje. Puede reducirse la aberración esférica reduciendo el tamaño de la superficie esférica, lo cual reduce también la cantidad de luz que alcanza la imagen. La aberración cromática, que se produce en las lentes, pero no en los espejos, es el resultado de la variación del índice de refracción con la longitud de onda. La forma más habitual de reducir las aberraciones de las lentes es utilizar un sistema de varias lentes.	
6. *El ojo	El sistema córnea-lente (córnea-cristalino) del ojo enfoca la luz sobre la retina, donde se encuentran los elementos sensibles (bastones y conos) que transmiten la información por el nervio óptico hasta el cerebro. Cuando el ojo está relajado, la distancia focal del sistema córnea-cristalino es del orden de 2,5 cm, que es la distancia de la córnea a la retina. Cuando los objetos se acercan al ojo, la forma del cristalino varía ligeramente para que disminuya la distancia focal global de modo que la imagen quede de nuevo enfocada en la retina. La distancia más corta a la que puede enfocar el cristalino sobre la retina se denomina punto próximo, cuyo valor medio típico es de unos 25 cm. El tamaño aparente de un objeto depende del tamaño de su imagen en la retina. Cuanto más cerca esté el objeto, mayor será su imagen en la retina y, por consiguiente, mayor será el tamaño aparente del objeto.	
7. *Lupa (o lente de aumento)	Una lupa es una lente simple con distancia focal positiva cuyo valor es menor que la distancia del punto próximo.	
Poder amplificador (o aumento angular)	$$M = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{x_{PP}}{f}$$	32.20
8. *Microscopio compuesto	El microscopio compuesto se utiliza para observar objetos muy pequeños a cortas distancias. Consta de dos lentes convergentes (o sistemas de lentes): un objetivo y un ocular. El objeto a examinar se coloca un poco más allá del punto focal del objetivo, formando así una imagen aumentada del objeto en el punto focal del ocular. Éste actúa como una lupa simple para la observación de la imagen final.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
Poder amplificador (o aumento angular)	$$M = m_{o}M_{e} = -\frac{L}{f_{o}}\frac{x_{np}}{f_{e}} \qquad 32.22$$ donde L es la longitud del tubo, que es la distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular.
9. *Telescopio	Se emplea el anteojo o telescopio para observar objetos que están muy lejanos. El objetivo del anteojo o telescopio forma una imagen real que es mucho menor que el objeto pero que está mucho más cercana. El ocular se utiliza como una lupa simple para ver la imagen. Un telescopio reflector utiliza un espejo como objetivo.
Poder amplificador (o aumento angular)	$$M = \frac{\theta_{e}}{\theta_{o}} = -\frac{f_{o}}{f_{e}} \qquad 32.23$$

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

32.2 Ben puede ver sólo la imagen en P'_1.

32.3 Infinito

32.4

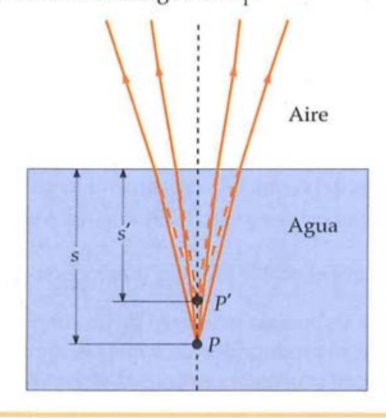


FIGURA 32.56 Diagrama de rayos correspondiente a la imagen de un objeto que se encuentra dentro del agua, visto directamente desde arriba. La profundidad de la imagen es menor que la del objeto.

Respuestas a los problemas prácticos

32.3	(*a*) 8,0 cm (*b*) $s' = -4{,}0$ cm
32.4	$s' = -2{,}5$ cm, $m = +0{,}50$; la imagen es derecha, virtual y de menor tamaño que el objeto.
32.5	356,62 m
32.6	(*a*) $s' = -6{,}44$ cm y (*b*) $m = 1{,}14$. El gato ve al pez 1,1 cm más próximo y 14% mayor de lo que en realidad es.
32.7	La imagen está a 5,6 cm de la superficie más cercana del acuario.
32.8	18 cm
32.10	$s' = 30$ cm, $m = -2{,}0$; real e invertida
32.11	$s' = -10$ cm, $m = 2{,}0$; virtual y no invertida
32.12	$P_{ojo} = 41{,}33$ D; $P_c = 41{,}33$ D $+ 2{,}67$ D $= 44$ D; las dos potencias son iguales.
32.13	$M = 12$
32.14	$M = -195$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*
- Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Puede fotografiarse una imagen virtual? Si la respuesta es sí, poner un ejemplo, y si es no, decir por qué.

2 • Suponer que cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas como el de la figura 32.4 está dibujado con un color distinto. Se toma una fotografía del sistema de coordenadas y otra de su imagen en un espejo plano. ¿Es posible afirmar que una de las fotografías corresponde a la imagen del espejo?, ¿o puede parecer que ambas son fotografías del sistema de coordenadas real tomadas desde ángulos distintos?

3 • Verdadero o falso:
(*a*) La imagen virtual formada por un espejo cóncavo es siempre menor que el objeto.
(*b*) Un espejo cóncavo siempre forma una imagen virtual.
(*c*) Un espejo convexo nunca forma una imagen real de un objeto real.
(*d*) Un espejo cóncavo nunca forma una imagen real ampliada de un objeto. SSM

4 • Una hormiga se arrastra a lo largo del eje de un espejo cóncavo de radio de curvatura R. ¿A qué distancia tiene que estar la hormiga para que su imagen sea (*a*) derecha, (*b*) virtual, (*c*) más pequeña que el objeto y (*d*) mayor que éste?

5 • La hormiga del ejercicio anterior se arrastra a lo largo de un espejo convexo de radio R. ¿A qué distancia tiene que estar la hormiga para que su imagen sea (*a*) derecha, (*b*) virtual, (*c*) más pequeña que el objeto y (*d*) mayor que éste? SSM

6 •• Los espejos convexos se usan frecuentemente para retrovisores de coches y otros usos que requieran grandes ángulos de visión. En la parte baja de algunos espejos se puede leer: "atención, los objetos que se ven en el espejo están más próximos que su propia imagen". Según los diagramas de rayos, la distancia imagen de objetos lejanos es mucho menor que la distancia objeto. Entonces, ¿por qué parecen más distantes?

7 • Cuando una hormiga se mueve a lo largo del eje de un espejo cóncavo, su imagen, obviamente, cambia. Analizar las siguientes afirmaciones: (*a*) si lo hace desde una gran distancia en dirección al foco, la imagen es siempre real, (*b*) si se mueve alejándose del foco, partiendo de él, la imagen es siempre real, (*c*) si va desde el foco al centro de curvatura del espejo, la imagen es siempre real, (*d*) cuando se mueve del foco a grandes distancias del espejo, la imagen cambia de real a virtual.

8 • Un buceador que está sumergido en el agua observa a un pájaro pescador que está en una rama a una pequeña distancia por encima de la superficie del agua y en la misma vertical. ¿La imagen del pájaro que ve el buceador está más cerca o más lejos que el propio pájaro? Explicar la respuesta usando un diagrama de rayos.

9 • Un objeto se sitúa a 40 cm de una lente de distancia focal –10 cm. La imagen es (*a*) real, invertida y disminuida; (*b*) real, invertida y aumentada; (*c*) virtual, invertida y disminuida; (*d*) virtual, derecha y disminuida; (*e*) virtual, derecha y aumentada.

10 • Si un objeto real se sitúa junto al punto focal en la parte interior de una lente convergente, la imagen es (*a*) real, invertida y aumentada; (*b*) virtual, derecha y disminuida; (*c*) virtual, derecha y aumentada; (*d*) real, invertida y disminuida.

11 • Una lente de vidrio con índice de refracción 1,6 tiene su longitud focal de 30 cm cuando está en el aire. Si esta lente se sumerge en agua, su distancia focal será (*a*) mayor, (*b*) entre cero y 30 cm, (*c*) igual, (*d*) negativa.

12 • Verdadero o falso:
(*a*) Una imagen virtual no puede ser expuesta sobre una pantalla.
(*b*) Una distancia imagen negativa implica que la imagen es virtual.
(*c*) Todos los rayos paralelos al eje de un espejo esférico se reflejan pasando por un solo punto.
(*d*) Una lente divergente no puede formar una imagen real de un objeto real.
(*e*) La distancia imagen en el caso de una lente convergente es siempre positiva.

13 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Tanto el ojo como una cámara fotográfica forman imágenes reales, el ojo las forma en la retina y la cámara en la película. Explicar las diferencias entre los procedimientos mediante los cuales estos dos sistemas acomodan los objetos localizados a diferentes distancias objeto, manteniendo una imagen enfocada.

14 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Si un objeto se sitúa a 25 cm del ojo de una persona hipermétrope, sin gafas de corrección, se forma una imagen nítida (*a*) detrás de la retina y la lente correctiva debe ser convexa; (*b*) detrás de la retina y la lente correctiva debe ser cóncava; (*c*) delante de la retina y la lente correctiva debe ser convexa; (*d*) delante de la retina y la lente correctiva debe ser cóncava.

15 •• Explicar la siguiente afirmación: un microscopio produce una imagen aumentada con respecto del objeto y un telescopio genera un aumento angular. *Sugerencia: con la ayuda de un diagrama de rayos, explicar las diferencias entre los dos sistemas ópticos.*

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

16 • Hacer una estimación de la localización y tamaño de la imagen de la cara de una persona cuando está delante de la parte convexa de una cuchara brillante a la distancia de un pie.

17 • Hacer una cálculo aproximado de la distancia focal de la superficie especular del agua del estanque que se encuentra enfrente del edificio erigido en memoria del presidente Lincoln.

18 •• Utilizando la ecuación 32.20, hacer una estimación del valor máximo del aumento de una lupa simple. (*Sugerencia: pensar en una lente con la distancia focal más pequeña que pudiera hacerse con un determinado cristal con el objeto de utilizarse como un sistema óptico de aumento.)*

ESPEJOS PLANOS

19 • La imagen del punto objeto P de la figura 32.57 está siendo observada tal como se indica. Dibujar un haz de rayos procedentes del objeto que se refleje en el espejo y entre en el ojo. Para estas posiciones del objeto y del espejo, indicar la región del espacio en que el ojo puede ver la imagen. SSM

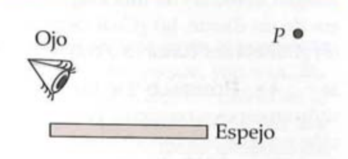


FIGURA 32.57 Problema 19

20 • Una persona de 1,62 m de altura desea poder ver su imagen completa en un espejo plano. (*a*) ¿Cuál debe ser la altura mínima de dicho espejo? (*b*) ¿A qué altura sobre el suelo deberá colocarse, suponiendo que la parte superior de la cabeza de dicha persona está a 15 cm por encima del nivel de sus ojos? Dibujar un diagrama de rayos.

21 •• (*a*) Dos espejos planos forman un ángulo de 90°. La luz procedente de un punto objeto arbitrario situado delante de los espejos produce imágenes en tres posiciones. Para cada una de estas posiciones dibujar dos rayos que empiecen en el objeto y que, después de una o dos reflexiones, lleguen a la imagen. (*b*) Dos espejos planos forman un ángulo de 60° entre sí. Mostrar esquemáticamente la situación de todas las imágenes formadas a partir de un punto objeto situado en el bisector del ángulo entre espejos. (*c*) Repetir para un ángulo de 120°. SSM

22 •• Demostrar que la ecuación del espejo (ecuación 32.4 donde $f = r/2$) aporta la imagen y aumento correctos para el espejo plano.

23 •• Cuando dos espejos planos son paralelos, como los que ponen en las paredes opuestas de una peluquería, se producen imágenes múltiples porque cada imagen de un espejo sirve como objeto para el otro espejo. Se coloca un punto objeto entre espejos paralelos distantes entre sí 30 cm. El objeto está a 10 cm del espejo de la izquierda y a 20 cm del de la derecha. (*a*) Hallar la distancia del espejo de la izquierda a las cuatro primeras imágenes formadas en él. (*b*) Hallar la distancia del espejo de la derecha a las cuatro primeras imágenes formadas en él. (*c*) Explicar por qué las imágenes son cada vez más borrosas cuando los objetos están cada vez más alejados.

ESPEJOS ESFÉRICOS

24 •• Sea un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es de 24 cm. Dibujar los diagramas de rayos para localizar la imagen (si se forma alguna) de un objeto localizado a una distancia del espejo de (*a*) 55 cm, (*b*) 24 cm, (*c*) 12 cm, y (*d*) 8 cm. Para cada caso, establecer si la imagen es real o virtual; invertida o no; aumentada, reducida o del mismo tamaño que el objeto.

25 • (*a*) Utilizar la ecuación del espejo (ecuación 32.4 donde $f = r/2$) para situar y describir las imágenes correspondientes al espejo a las distancias objeto del problema 24. (*b*) Calcular el aumento en función de la distancia objeto. SSM

26 • Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 24 cm. Hacer un diagrama de rayos para ubicar la imagen, si existe, de un objeto cerca del eje y a una distancia del espejo de (*a*) 55 cm, (*b*) 24 cm, (*c*) 12 cm, (*d*) 8,0 cm y (*e*) 1,0 cm. En cada caso, establecer si la imagen es real o virtual, derecha o invertida, aumentada, reducida o del mismo tamaño que el objeto.

27 • (*a*) Utilizar la ecuación del espejo (ecuación 32.4 en la que $f = r/2$) para calcular las distancias imagen de objetos cuyas posiciones se explicitan en el enunciado del problema 26, considerando el espejo de ese problema. (*b*) Calcular el aumento para cada una de estas distancias objeto.

28 •• Utilizar la ecuación del espejo 32.4 donde $f = r/2$ para demostrar que un espejo convexo no puede formar imágenes reales procedentes de objetos reales, independientemente de las posiciones de éstos.

29 • Un dentista necesita un pequeño espejo que le produzca una imagen derecha con una amplificación de 5,5 cuando esté situado a 2,1 cm de un diente. (*a*) ¿Cuál deberá ser el radio de curvatura del espejo? (*b*) ¿Deberá ser cóncavo o convexo? SSM

30 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En los grandes almacenes se utilizan espejos convexos para conseguir un amplio margen de observación y vigilancia con un espejo de tamaño razonable. El espejo indicado en la figura 32.58 permite a una dependienta, situada a 5 m del mismo, inspeccionar el local entero. Tiene un radio de curvatura de 1,2 m. (*a*) Si un cliente está a 10 m del espejo, ¿a qué distancia de la superficie del espejo está su imagen? (*b*) ¿La imagen está detrás o delante del espejo? (*c*) Si el cliente mide 2 m, ¿qué altura tendrá su imagen?

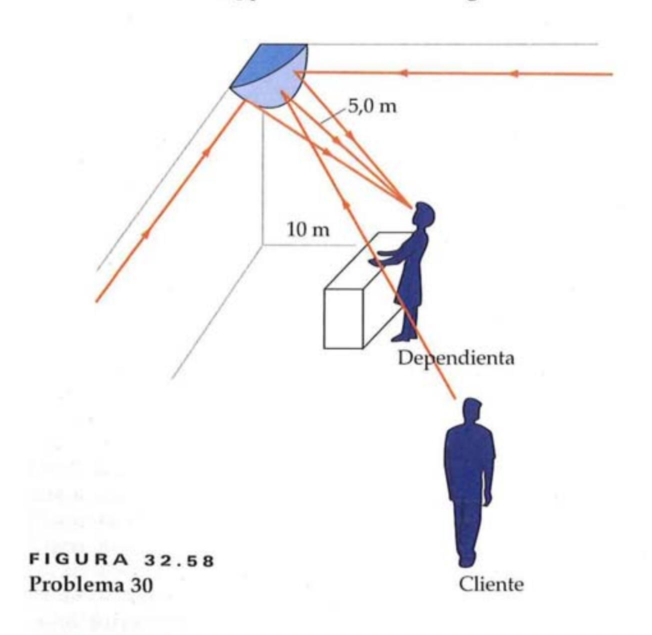


FIGURA 32.58
Problema 30

31 •• Un telescopio utiliza un espejo cóncavo esférico de 8 m de radio de curvatura. Hallar la posición y el diámetro de la imagen de la Luna que formará este espejo. La Luna tiene un diámetro de $3,5 \times 10^6$ m y dista $3,8 \times 10^8$ m de la Tierra.

32 •• Un espejo de 100 cm de radio de curvatura, brillante y especular por ambas caras, forma una imagen real a 75 cm del mismo cuando está delante de la parte cóncava. Se da entonces la vuelta al espejo de forma que su cara convexa mire al objeto. El espejo se mueve de forma que la imagen queda ahora a 35 cm por detrás del espejo. (*a*) ¿Cuánto se habrá trasladado el espejo? (*b*) ¿Se habrá acercado o alejado del objeto?

33 •• Luz de rayos paralelos procedente de un objeto lejano incide en el gran espejo de la figura 32.59 (r = 5 m) y se refleja en un espejo pequeño que está a 2 m del grande (este pequeño espejo en realidad es esférico y no plano como se ve en la figura). La luz se enfoca en el vértice del espejo grande. (*a*) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo pequeño? (*b*) ¿Es convexo o cóncavo? Explique sus respuestas.

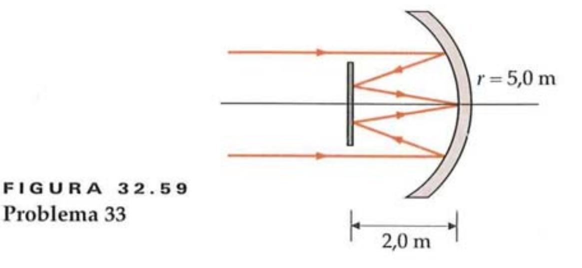


FIGURA 32.59
Problema 33

IMÁGENES FORMADAS POR REFRACCIÓN

34 •• Una varilla de vidrio de 1,75 cm de radio muy larga tiene uno de sus extremos conformado como una superficie hemisférica convexa de 7,2 cm de radio. Su índice de refracción es 1,68. (*a*) Un punto objeto en el aire está sobre el eje de la varilla y a 30,0 cm de la superficie. Hallar la imagen y decir si es real o virtual. Repetir la parte (*a*) para un objeto situado en el mismo eje a 5,0 cm de la superficie. Dibujar un diagrama de rayos en cada caso.

35 • Un pez está a 10 cm delante de la superficie de una pecera de radio 20 cm. (*a*) ¿A qué distancia de la superficie está su imagen? (*b*) ¿A qué distancia se localiza la imagen del pez cuando éste nada hasta situarse a 30 cm de la superficie? SSM

36 •• Una varilla larga de vidrio de 1,75 cm de diámetro tiene en un extremo una superficie cóncava pulimentada en forma esférica cuyo radio mide 7,20 cm. El material tiene un índice de refracción de 1,68. Se coloca un objeto en aire, en el eje de la varilla y a 15,00 cm de la superficie esférica. Encontrar la situación de la imagen. ¿Es real o virtual? Hacer un diagrama de rayos.

37 •• Repetir el problema 34 cuando tanto la barra de vidrio como el objeto están sumergidos en agua, y el objeto está separado de la superficie esférica (*a*) 6,00 cm y (*b*) 12,0 cm. SSM

38 •• Repetir el problema 36 cuando tanto la barra de vidrio como el objeto están sumergidos en agua, y el objeto está separado de la superficie esférica 20 cm.

39 •• Una varilla de vidrio de 96 cm de longitud con un índice de refracción de 1,6 tiene sus extremos tallados en forma de superficies esféricas convexas de radios 8 cm y 16 cm. Un punto objeto está fuera de la varilla sobre su eje y a 20 cm del extremo de radio 8 cm. (*a*) Hallar la distancia imagen debida a la refracción en la primera superficie. (*b*) Hallar la imagen final debida a la refracción en ambas superficies. (*c*) ¿La imagen final es real o virtual?

40 •• Repetir el problema 39 para un punto objeto situado en el aire sobre el eje de la varilla a 20 cm del extremo de radio 16 cm.

LENTES DELGADAS Y ECUACIÓN PARA CONSTRUIR LENTES

41 • Una lente bicóncava de índice de refracción 1,45 tiene sus radios de 30 cm y 25 cm. Se sitúa un objeto a 80 cm a la izquierda de la lente. Hallar (*a*) su distancia focal, (*b*) la posición de la imagen y (*c*) su amplificación. (*d*) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? SSM

42 • Las siguientes lentes delgadas están hechas de vidrio de índice de refracción 1,6. Hacer un esquema de cada lente y hallar su distancia focal en aire: (*a*) $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 10$ cm; (*b*) $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 20$ cm; y (*c*) $r_1 = -10$ cm, $r_2 = -20$ cm.

43 • Las siguientes lentes delgadas se construyen con cristal cuyo índice de refracción es de 1,5. Hacer un esquema de cada lente, determinando su distancia focal en aire: (*a*) biconvexa con $r_1 = 15$ cm y $r_2 = -26$ cm; (*b*) plano-convexa con radios $r_1 = \infty$ y $r_2 = -15$ cm; (*c*) bicóncava con radios $r_1 = -15$ cm y $r_2 = 15$ cm; y (*d*) plano-cóncava con $r_1 = \infty$ y $r_2 = 26$ cm.

44 • Hallar la distancia focal de una lente de vidrio de índice de refracción 1,62 que tiene una superficie cóncava con 100 cm de radio y una superficie convexa con 40 cm de radio.

45 •• (*a*) Un objeto de 3,00 cm de altura se coloca a 25,0 cm delante de una lente delgada de 10,0 D de potencia. Dibujar un diagrama de rayos preciso para hallar la posición y el tamaño de la imagen, y comprobar los resultados utilizando la ecuación de las lentes delgadas. (*b*) Repetir la parte (*a*) si el objeto se pone a 20,00 cm delante de la lente. (*c*) Repetir la parte (*a*) con una lente de −10,0 D. SSM

46 •• La ecuación para diseñar lentes tiene tres parámetros: índice de refracción del material y radio de curvatura de las dos superficies. De esta forma se pueden diseñar muchas lentes con una misma distancia focal para operar en aire. Usando la citada ecuación, diseñar tres lentes convergentes que tengan una distancia focal de 27,00 cm cada una y un índice de refracción de 1,60. Hacer un esquema de las tres lentes.

47 •• Repetir el problema 46 con los mismos datos pero para construir tres lentes divergentes.

48 •• (*a*) ¿Qué se entiende por distancia objeto negativa? ¿Cómo puede obtenerse? (*b*) Hallar la distancia imagen y la amplificación, y establecer si la imagen es virtual o real, y derecha o invertida para una lente delgada en aire cuando $s = -20$ cm, $f = +20$ cm. (*c*) Repetir el apartado (*b*) si $s = -10$ cm, $f = -30$ cm. Dibujar un diagrama de rayos para cada uno de estos casos.

49 •• Dos lentes convergentes, cada una de ellas de 10 cm de distancia focal, están separadas 35 cm. Un objeto está a 20 cm a la izquierda de la primera lente. (*a*) Hallar la posición de la imagen final utilizando un diagrama de rayos y la ecuación de las lentes delgadas. (*b*) ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? (*c*) ¿Cuál es la amplificación lateral total de la imagen? SSM

50 •• Resolver el problema 49 para una segunda lente que es divergente con −15 cm de distancia focal.

51 •• (*a*) Demostrar que para obtener una amplificación de valor absoluto $|m|$ con una lente delgada convergente de distancia focal f, la distancia objeto viene dada por $s = (1 + |m|^{-1})f$. (*b*) La lente de una cámara con 50 mm de distancia focal se utiliza para hacer una fotografía de una persona de 1,75 m de altura. ¿A qué distancia de la cámara deberá colocarse la persona para que el tamaño de la imagen sea de 24,0 mm?

52 •• **HOJA DE CÁLCULO** Una lente convergente tiene una distancia focal $f = 12$ cm. (*a*) Utilizando una hoja de cálculo o un programa de gráficos para ordenador, representar la distancia imagen s' en función de la distancia objeto s para valores de s entre $s = 1{,}1f$ hasta $s = 10f$. (*b*) En el mismo gráfico del apartado (*a*) pero utilizando diferente eje y, representar el aumento de la lente en función de la distancia objeto s. (*c*) ¿Qué tipo de imagen se produce para este rango de distancias objeto? ¿Real o virtual, derecha o invertida? (*d*) Estudiar el significado para los límites asintóticos del gráfico obtenido.

53 •• **HOJA DE CÁLCULO** Una lente divergente tiene una distancia focal de $f = 12$ cm. (*a*) Utilizando una hoja de cálculo o un programa de gráficos, representar la distancia imagen s' en función de la distancia objeto s para valores de s entre $s = 0{,}01f$ hasta $s = 0{,}9f$. (*b*) En el mismo gráfico del apartado (*a*), pero utilizando diferente eje y, representar el aumento de la lente en función de la distancia objeto s. (*c*) ¿Qué tipo de imagen se produce para este rango de distancias objeto? ¿Real o virtual, derecha o invertida? (*d*) Estudiar el significado para los limites asintóticos del gráfico obtenido.

54 •• Un objeto se encuentra a 15 cm delante de una lente positiva de 15 cm de distancia focal. A 20 cm de la primera lente se encuentra otra lente también positiva de 15 cm de distancia focal. (*a*) Hallar y describir (real, invertida, etc.) la imagen final. (*b*) Dibujar un diagrama de rayos para comprobar los resultados de la parte (*a*).

55 •• Un objeto está a 15,0 cm delante de una lente convergente con una distancia focal de 15,0 cm. Una lente divergente, con una distancia focal cuyo valor absoluto es 15,0 cm, está a 20,0 cm detrás de la primera. (*a*) Determinar la posición de la imagen final y describir sus propiedades (por ejemplo: real invertida, etc.) y (*b*) dibujar el diagrama de rayos para comprobar las soluciones del apartado (*a*). SSM

56 ••• En una expresión de la ecuación de la lente delgada utilizada por Newton, que es útil en algunos casos, se miden las distancias objeto e imagen a partir de los puntos focales. (*a*) Demostrar que si $x = s - f$ y $x' = s' - f$, puede expresarse la ecuación de las lentes delgadas como $xx' = f^2$, y que la amplificación lateral viene dada por $m = -x'/f = -f/x$. (*b*) Hacer un esquema de una lente y sobre él indicar x y x'.

57 ••• En el *método de Bessel* para determinar la distancia focal f de una lente, se necesita un objeto y una pantalla separados por una distancia L, donde $L > 4f$. Se sabe que la lente tiene dos posiciones posibles, ambas entre el objeto y la pantalla, para las cuales se forma una imagen nítida del objeto en la pantalla, en un caso ampliada y en otro reducida. Demostrar que, si la distancia entre las dos localizaciones de la lente viene dada por L, la distancia focal es $f = \frac{1}{4}(L^2 - D^2)/L$. *(Sugerencia: utilizar la figura 32.60.)* SSM

58 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Los ópticos utilizan el método de Bessel para determinar la distancia focal de una lente como se describe en el problema 57. La distancia entre objeto e imagen es 1,7 m. Entonces la posición de la lente se ajusta para obtener una imagen nítida en la pantalla. Se logra una segunda imagen nítida cuando la lente se ha movido una distancia de 72 cm. (*a*) Dibujar un diagrama de rayos para las dos posiciones. (*b*) Determinar la distancia focal de la lente con el método de Bessel. (*c*) ¿Cuáles son las dos posiciones de la lente con respecto al objeto? (*d*) ¿Cuáles son los aumentos de las imágenes que proporciona la lente en cada posición?

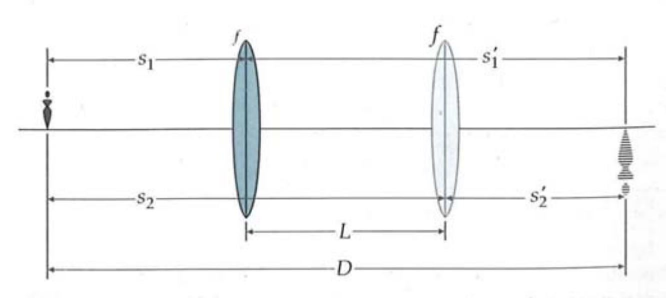


FIGURA 32.60 Problemas 57 y 58

59 ••• Un objeto se encuentra a 17,5 cm a la izquierda de una lente de 8,5 cm de distancia focal. A 5 cm a la derecha de ésta se encuentra otra lente de – 30 cm de distancia focal. (*a*) Hallar la distancia entre el objeto y la imagen final formada por la segunda lente. (*b*) ¿Cuál es el aumento total? (*c*) La imagen final, ¿es real o virtual? ¿Derecha o invertida?

*ABERRACIONES

60 • La aberración cromática es un defecto común de (*a*) las lentes cóncavas y convexas, (*b*) las lentes cóncavas solamente, (*c*) los espejos cóncavos y convexos, (*d*) todas las lentes y espejos.

61 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Analizar las razones por las que los astrónomos utlizan más los telescopios de reflexión que los de refracción.

62 • Una lente biconvexa de radios $r_1 = +10$ cm y $r_2 = -10$ cm está hecha de un vidrio con índice de refracción 1,53 para la luz azul y 1,47 para la luz roja. Hallar la distancia focal de esta lente para (*a*) la luz roja y (*b*) la luz azul.

*EL OJO

63 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Determinar la variación experimentada por la distancia focal del ojo cuando un objeto originalmente a 3,0 m se desplaza a 30 cm del ojo.

64 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una persona hipermétrope necesita lentes con una potencia de 1,75 D para leer confortablemente en un libro que está a 25,0 cm de su ojo. ¿Cuál es su punto próximo sin las lentes?

65 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Si dos objetos puntuales próximos entre sí han de verse como dos objetos distintos, sus imágenes deben caer en la retina sobre dos conos diferentes que no sean adyacentes. Es decir, debe existir un cono inactivado entre ellos. La separación de los conos es del orden de 1,00 μm. Considérese que el ojo es una esfera uniforme de 2,50 cm de diámetro con un índice de refracción de 1,34. (*a*) ¿Cuál es el ángulo menor que pueden subtender los dos puntos? (Véase la figura 32.61.) (*b*) ¿A qué distancia mínima pueden encontrarse entre sí los dos puntos si están a 20 m del ojo? SSM

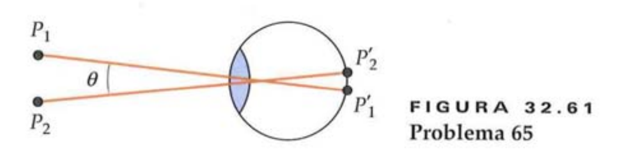


FIGURA 32.61 Problema 65

66 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Suponer que el ojo estuviese diseñado como una cámara con una lente de distancia focal fija $f = 2,5$ cm que pudiese moverse acercándose o alejándose de la retina. Aproximadamente, ¿cuánto habría que alejar la lente para enfocar sobre la retina la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo? (*Sugerencia: determinar la distancia de la retina a la imagen de un objeto situado a 25,0 cm del ojo.*)

Nota: **los problemas 67-69 se refieren al modelo de ojo mostrado en la figura 32.62.**

67 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Modelo I de ojo: un modelo simple de ojo es una lente con potencia *P* variable localizada a una distancia fija *d* delante de una pantalla, con el espacio entre lente y pantalla en un medio material similar al del aire. Como vemos en la figura 32.60, el ojo puede enfocar para cualquier valor de distancia objeto *s* tal que $x_{pp} \leq s \leq x_{fp}$. Con este modelo de ojo, se define ojo normal aquél que puede enfocar objetos a grandes distancias. (*a*) Demostrar que para un ojo "normal" como el descrito, el valor mínimo de *P* es $P_{mín} = 1/d$. (*b*) Demostrar que el valor máximo de *P* es $P_{máx} = 1/x_{np} + 1/d$. (*c*) La diferencia $A = P_{máx} - P_{mín}$ se denomina acomodación. Determinar la potencia mínima y la acomodación de un ojo con $d = 2,5$ cm y $x_{pp} = 25$ cm. SSM

68 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Modelo II de ojo: un ojo miope no puede enfocar objetos distantes. Utilizando la figura 32.62 y el problema 73, (*a*) demostrar que para un modelo de ojo miope capaz de enfocar hasta una distancia máxima de x_{fp}, el valor mínimo de *P* es mayor que el de un ojo normal y viene dado por $P_{mín} = 1/x_{fp} + 1/d$. (*b*) Para corregir la miopía, se puede poner una lente de contacto directamente delante de la propia lente del ojo modelo. ¿Qué potencia deberá tener la lente de contacto para corregir la visión de un ojo miope con $x_{fp} = 50$ cm?

69 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Modelo III de ojo: un ojo hipermétrope puede enfocar objetos lejanos pero no cercanos. Utilizando la figura 32.60 y el problema 67, (*a*) demostrar que para un modelo de ojo hipermétrope capaz de enfocar desde x'_{pp}, el máximo valor de *P* viene dado por $P_{máx} = 1/x'_{pp} + 1/d$. (*b*) Demostrar que comparado con un ojo capaz de enfocar desde x_{pp} (donde $x_{pp} < x'_{pp}$), el valor máximo de la potencia de la lente hipermétrope es demasiado pequeña, siendo la diferencia $1/x_{pp} - 1/x'_{pp}$. (*c*) ¿Qué potencia deberá tener la lente de contacto para corregir la visión de un ojo hipermétrope con $x_{pp} = 150$ cm, de forma que el ojo pueda enfocar objetos desde 15 cm?

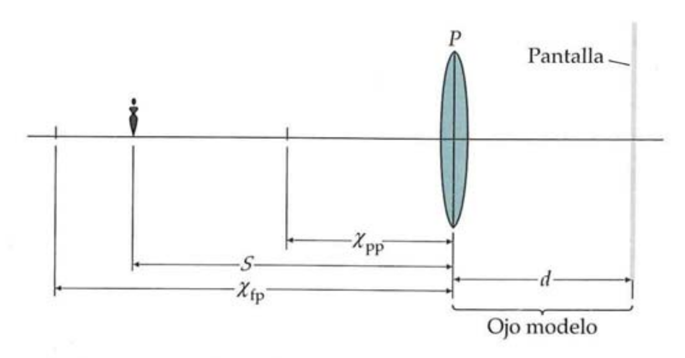


FIGURA 32.62 Problemas 67, 68 y 69

70 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una persona hipermétrope necesita leer la pantalla de un ordenador situada a 45 cm de su ojo. Su punto próximo está a 80 cm. (*a*) Hallar la distancia focal de las lentes de sus gafas de lectura que producirán una imagen de la pantalla a 80 cm de su ojo. (*b*) ¿Cuál es la potencia de las lentes?

71 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una persona miope no puede enfocar claramente objetos que están a una distancia superior a 225 cm de su ojo. ¿Qué potencia deberán tener las lentes necesarias para poder ver objetos distantes claramente?

72 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Como el índice de refracción del cristalino no es muy diferente del que posee el material que le rodea, la mayor parte de la refracción tiene lugar en la córnea, donde *n* cambia abruptamente desde 1,00 en el aire a 1,38. (*a*) Suponiendo que la córnea tiene forma esférica homogénea con un índice de refracción de 1,38, calcular su radio si enfoca la luz paralela sobre la retina que está a una distancia de 2,50 cm. (*b*) El resultado obtenido, ¿será mayor o menor que el radio real de la córnea?

73 •• Aplicación Biológica El punto próximo del ojo de cierta persona es 80 cm. Se le prescriben gafas para lectura de modo que pueda leer un libro a 25 cm de sus ojos. Las gafas están a 2 cm de los ojos. ¿Qué potencia deberán tener las lentes de estas gafas?

74 ••• Aplicación Biológica A la edad de 45 años, una persona empezó a utilizar gafas de lectura de 2,1 D de potencia, de modo que pudiese leer un periódico a 25 cm. Después, a la edad de 55 años, se dio cuenta de que debía mantener el periódico a una distancia de 40 cm para poder verlo claramente con las gafas. (*a*) ¿Dónde estaba su punto próximo a los 45 años? (*b*) ¿Dónde está a los 55? (*c*) ¿Qué potencia deben tener sus gafas a esta edad, de modo que pueda leer de nuevo a una distancia de 25 cm? (Suponer que las gafas están a 2,2 cm de sus ojos.)

*LA LUPA (O MICROSCOPIO SIMPLE)

75 • ¿Cuál es el poder amplificador de una lente de 7,0 cm de distancia focal cuando una persona cuyo punto próximo está a 35 cm observa la imagen en el infinito? SSM

76 •• Una lente de distancia focal 6,0 cm con la imagen en el infinito es utilizada como lupa por una persona cuyo punto próximo está a 25 cm, y por otra cuyo punto próximo está a 40 cm. (*a*) ¿Cuál es el poder amplificador efectivo de la lente para cada una de las personas? (*b*) Comparar el tamaño de la imagen en la retina cuando cada una de ellas mira el mismo objeto con la lupa.

77 •• Un botánico examina una hoja utilizando como lupa una lente convexa de 12 D de potencia. ¿Cuál es la amplificación angular esperada si (*a*) la imagen final está en el infinito y (*b*) está a 25 cm? SSM

*MICROSCOPIOS

78 •• El objetivo de un microscopio tiene una distancia focal de 17,0 mm y forma una imagen de la muestra a 16,0 cm de su segundo punto focal. (*a*) ¿A qué distancia deberá estar la muestra del objetivo? (*b*) ¿Cuál es el aumento para una persona cuyo punto próximo es de 25,0 cm si la distancia focal del ocular es de 51,0 mm?

79 •• Un microscopio tiene un objetivo cuya distancia focal es de 8,5 mm y un ocular que aporta un aumento angular de 10 a una persona cuyo punto próximo está a 25 cm. La longitud del tubo es de 16 cm. (*a*) ¿Cuál es el aumento lateral del objetivo? (*b*) ¿Y el aumento del microscopio? SSM

80 •• Un microscopio manual, simétrico y de poca precisión, está compuesto por dos lentes convergentes de 20 D, sujetas en los extremos de un tubo de 30 cm de longitud. (*a*) ¿Cuál es la "longitud del tubo" de este microscopio? (*b*) ¿Cuál es la amplificación lateral del objetivo? (*c*) ¿Cuál es el poder amplificador del microscopio? (*d*) ¿A qué distancia del objetivo deberá colocarse el objeto?

81 •• Un microscopio tiene un objetivo con una potencia de 45 D y un ocular con una potencia de 80 D. Las lentes están separadas 28 cm. Suponiendo que la imagen final se forma a 25 cm del ojo, ¿cuál es el poder amplificador?

82 ••• Un microscopio tiene un poder amplificador igual a 600 y un ocular con una amplificación angular de 15,0. La lente objetivo está a 22,0 cm del ocular. Sin hacer ninguna aproximación, calcular (*a*) la distancia focal del ocular, (*b*) la posición de un objeto en la cual quedará enfocado por un ojo relajado y (*c*) la distancia focal de la lente objetivo.

*TELESCOPIOS

83 • Un telescopio simple tiene un objetivo de 100 cm de distancia focal y un ocular de 5 cm de distancia focal. Se utiliza para mirar a la Luna, que subtiende un ángulo de 0,009 rad. (*a*) ¿Cuál es el diámetro de la imagen formada por el objetivo? (*b*) ¿Qué ángulo subtiende la imagen final en el infinito? (*c*) ¿Cuál es el poder amplificador del telescopio? SSM

84 • La lente objetivo del telescopio refractor del Observatorio de Yerkes tiene una distancia focal de 19,5 m. Se utiliza para examinar la Luna, que subtiende un ángulo de 0,009 rad, aproximadamente. ¿Cuál es el diámetro de la imagen de la Luna formada por el objetivo?

85 •• El telescopio reflector del Monte Palomar tiene un espejo con un diámetro de 200 pulgadas (5,1 m) y una distancia focal de 1,68 m. (*a*) ¿En qué factor se ha incrementado la capacidad de recibir la luz respecto a la lente de 40 pulgadas (1,016 m) de diámetro del telescopio refractor del Observatorio de Yerkes? (*b*) Si la distancia focal del ocular es 1,25 cm, ¿cuál es el poder amplificador de este telescopio?

86 •• Un telescopio astronómico tiene un poder amplificador de 7,0. Las dos lentes están separadas 32 cm. Hallar la distancia focal de cada lente.

87 •• Una desventaja del telescopio astronómico para su empleo terrestre (por ejemplo, para ver un partido de fútbol) es que la imagen está invertida. Un telescopio de Galileo utiliza una lente convergente como objetivo, pero una lente divergente como ocular. La imagen formada por el objetivo está detrás del ocular en su punto focal, de modo que la imagen final es virtual, derecha y en el infinito. (*a*) Demostrar que en el telescopio de Galileo el poder amplificador es $M = -f_o/f_e$, donde f_o es la distancia focal del objetivo y f_e es la del ocular (que es negativa). (*b*) Dibujar un diagrama de rayos para demostrar que la imagen final es verdaderamente virtual, derecha y que está en el infinito. SSM

88 •• Un telescopio de Galileo (véase el problema 87) está diseñado de forma que la imagen final esté en el punto próximo, que está a 25 cm, en lugar de estar en el infinito. La distancia focal del objetivo es 100 cm y la del ocular es – 5 cm. (*a*) Si la distancia a que se encuentra el objeto es 30 m, ¿dónde está la imagen del objetivo? (*b*) ¿Cuál debe ser la distancia objeto para el ocular si la imagen final está en el punto próximo? (*c*) ¿A qué distancia están entre sí las lentes? (*d*) Si la altura del objeto es 1,5 m, ¿cuál es la altura de la imagen final? (*e*) ¿Cuál es el aumento angular de la imagen?

89 ••• Si en un telescopio se mira por el extremo correspondiente al objetivo, se verá un objeto distante de tamaño reducido. Si el objetivo de un telescopio de refracción tiene una distancia focal de 2,25 m y un ocular de distancia focal 1,50 cm, ¿en qué factor se reduce el tamaño angular del objeto?

PROBLEMAS GENERALES

90 • Una lente gran angular tiene una distancia focal de 28 mm. ¿Cuánto debera moverse la lente para cambiar su enfoque desde un objeto situado en el infinito a otro que se encuentra situado a 5,00 m?

91 • Una lente delgada convergente de 10 cm de distancia focal se utiliza para obtener una imagen el doble de grande que un objeto pequeño. Hallar las distancias objeto e imagen si (*a*) la imagen ha de estar derecha y (*b*) si ha de ser invertida. Dibujar para cada caso un diagrama de rayos.

92 •• Tenemos dos lentes convergentes de distancias focales 75 mm y 25 mm, respectivamente. (*a*) ¿Cómo deberán colocarse estas lentes para formar un telescopio astronómico? Establecer qué lente se usa como objetivo y cuál como ocular, a qué distancia deben ponerse las lentes y cuál es el aumento angular esperado. (*b*) Dibujar un diagrama de rayos mostrando cómo un objeto distante es ampliado por el telescopio.

93 •• (*a*) ¿Cómo deberán colocarse las dos lentes del problema 92 para formar un microscopio compuesto cuyo tubo tenga una longitud 160 mm? Establecer qué lente se usa como objetivo y cuál como ocular, a

qué distancia deben colocarse las lentes, y cuál es el aumento que esperamos alcanzar considerando que el usuario tiene un punto próximo de 25 cm. (*b*) Dibujar un diagrama de rayos que muestre los rayos procedentes del objeto próximo y cómo forman una imagen ampliada. SSM

94 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un submarinista lleva una máscara de buceo cuya parte delantera está curvada hacia el exterior con un radio de curvatura de 0,5 m. Existe así una superficie esférica convexa entre el agua y el aire que llena la máscara. Un pez se encuentra a 2,5 m delante de la máscara. (*a*) ¿Dónde parece estar? (*b*) ¿Cuál es la amplificación de su imagen?

95 •• Una cámara de 35 mm produce fotografías de 24 mm por 36 mm de tamaño. Se utiliza para tomar una fotografía de una persona de 175 cm de altura, cuya imagen llena justo la altura (24 mm) de la película. ¿A qué distancia de la cámara se encontraba la persona si la distancia focal de la lente es de 50 mm? SSM

96 •• Una cámara de 35 mm con objetivos intercambiables se utiliza para tomar una fotografía de un halcón que tiene una envergadura entre las alas de 2,0 m. El halcón está a 30 m de distancia. ¿Cuál deberá ser la distancia focal ideal del objetivo para que la imagen de las alas llene justo la anchura de la película, que es 36 mm?

97 •• Un objeto está situado 12,0 cm delante de una lente de 10,0 cm de distancia focal. Detrás de ésta y a 20,0 cm se coloca una segunda lente de 12,5 cm de distancia focal. (*a*) Hallar la posición de la imagen final. (*b*) ¿Cuál es la amplificación de la imagen? (*c*) Dibujar un diagrama de rayos que muestre la imagen final.

98 •• (*a*) Demostrar que si f_a es la distancia focal de una lente delgada en el aire, su distancia focal f_w en el agua vale $f_w = -(n_w/n_a)(n - n_a)/(n - n_w)f_a$, donde n_w es el índice de refracción del agua, n_a el del aire y n el de la lente. (*b*) Calcular la distancia focal en aire y en agua de una lente bicóncava de índice de refracción $n = 1{,}5$ cuyos radios miden 30 cm y 35 cm.

99 •• Un conductor sentado dentro de su coche aparcado observaba a un corredor en el espejo retrovisor. El espejo era convexo y con un radio de curvatura cuyo módulo es de 2,00 m. El corredor estaba a 5,00 m del espejo y se aproximaba a 3,50 m/s. ¿Con qué velocidad se movía la imagen del corredor con respecto al espejo?

100 •• En el interior de un depósito, una capa de agua de 2,00 cm de espesor ($n = 1{,}33$) flota encima de una capa de 4,00 cm de grosor de tetracloruro de carbono ($n = 1{,}46$). ¿A qué profundidad respecto a la superficie del agua parecerá estar el fondo del depósito para un observador que está mirando desde arriba y con incidencia normal?

101 ••• Un objeto está 15,0 cm delante de una lente delgada convexa de 10,0 cm de distancia focal. 25,0 cm detrás de la misma se halla un espejo cóncavo de 10,0 cm de radio. (*a*) Hallar la posición de la imagen final formada por el espejo y la lente. (*b*) ¿La imagen es virtual o real? ¿Derecha o invertida? (*c*) Mostrar sobre un esquema dónde debe estar el ojo para ver esta imagen. SSM

102 ••• Cuando se coloca un foco lumioso brillante a 30 cm delante de una lente, se forma una imagen derecha a 7,5 cm de la lente. Aparece también una imagen invertida débil a 6 cm delante de la lente debida a la reflexión en su cara delantera. Cuando se da la vuelta a la lente, esta imagen más débil e invertida se sitúa a 10 cm delante de la lente. Hallar el índice de refracción de la lente.

103 ••• Un espejo cóncavo horizontal de 50,0 cm de radio de curvatura, contiene una capa de agua con un índice de refracción de 1,33 y una profundidad máxima de 1,00 cm. ¿A qué altura sobre el vértice del espejo deberá colocarse un objeto de modo que su imagen esté en la misma posición que el objeto?

104 ••• Una lente con una cara cóncava de 17,0 cm de radio y la otra convexa de 8,00 cm de radio tiene una distancia focal en aire de 27,5 cm. Cuando se coloca en un líquido de índice de refracción desconocido, la distancia focal aumenta a 109 cm. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

105 ••• Una bola de vidrio de 10,0 cm de radio tiene un índice de refracción de 1,500. La mitad trasera de la bola está plateada de forma que actúa como un espejo cóncavo (figura 32.63). Hallar la posición de la imagen final vista por un ojo a la izquierda del objeto y de la bola para un objeto situado a (*a*) 40,0 cm y (*b*) 30,0 cm a la izquierda de la superficie delantera de la bola.

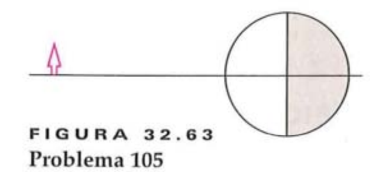
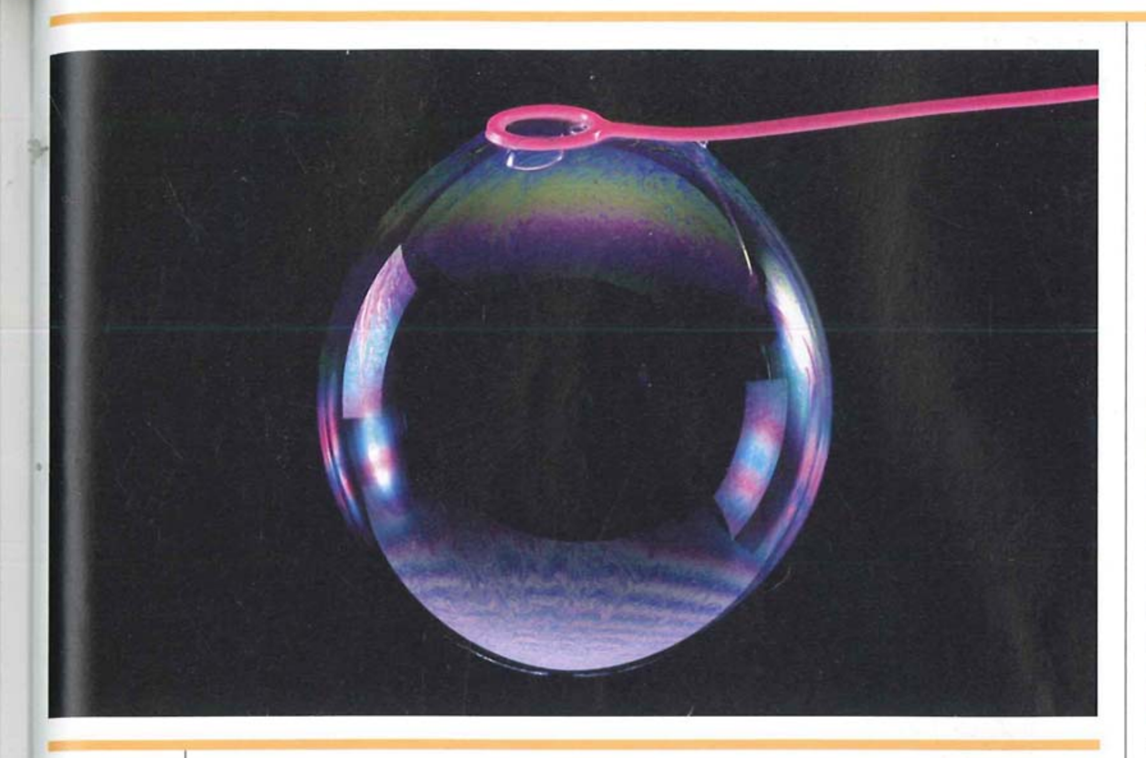


FIGURA 32.63 Problema 105

106 ••• (*a*) Demostrar que una pequeña variación dn en el índice de refracción del material de una lente produce un pequeño cambio en la distancia focal df dado, aproximadamente, por $df/f = -dn/(n - n_{aire})$. (*b*) Utilizar este resultado para hallar la distancia focal de una lente delgada para la luz azul, con $n = 1{,}530$, si la distancia focal para la luz roja, con $n = 1{,}470$, es 20,0 cm.

107 ••• El aumento lateral de un espejo esférico o de una lente delgada viene dada por $m = -s'/s$. Demostrar que, en el caso de objetos de extensión horizontal pequeña, la amplificación longitudinal es, aproximadamente, $-m^2$. (*Sugerencia: demostrar que* $ds'/ds = s'^2/s^2$.) SSM





LUZ BLANCA REFLEJADA EN UNA BURBUJA DE JABÓN. CUANDO LA LUZ DE UNA LONGITUD DE ONDA DADA INCIDE SOBRE LA FINA PELÍCULA DE UNA POMPA DE JABÓN ACUOSO, LA LUZ SE REFLEJA TANTO EN LA SUPERFICIE INTERNA COMO EN LA SUPERFICIE EXTERNA DE LA PELÍCULA. SI EL ORDEN DE MAGNITUD DEL GROSOR DE LA PELÍCULA ES EL DE LA LONGITUD DE ONDA DE LA LUZ, LAS DOS ONDAS REFLEJADAS EN AMBAS PAREDES INTERFIEREN. SI LAS DOS ONDAS ESTÁN DESFASADAS 180°, LA ONDA REFLEJADA INTERFIERE DESTRUCTIVAMENTE, DE TAL FORMA QUE EL RESULTADO NETO ES QUE NO HAY LUZ REFLEJADA. SI LA LUZ QUE INCIDE EN LA PELÍCULA JABONOSA ES BLANCA, DE MODO QUE CONTIENE TODAS LAS LONGITUDES DE ONDA, LA LUZ REFLEJADA INTERFERIRÁ DESTRUCTIVAMENTE PARA CIERTAS LONGITUDES DE ONDA, Y LO HARÁ CONSTRUCTIVAMENTE PARA OTRAS. ESTE PROCESO PRODUCE LAS FRANJAS COLOREADAS QUE SE PUEDEN VER EN LA BURBUJA DE JABÓN. *(Aaron Haupt/Photo Researchers.)*

Interferencia y difracción

Los dos fenómenos de singular importancia que distinguen las ondas de las partículas son la interferencia y la difracción.* La interferencia es la combinación por superposición de dos o más ondas que se encuentran en un punto del espacio. La difracción es la desviación que sufren las ondas alrededor de los bordes y esquinas cuando una porción de un frente de ondas se ve cortado o interrumpido por una barrera u obstáculo.

En este capítulo, veremos cómo el diagrama de la onda resultante puede obtenerse considerando cada punto del frente de onda original como una fuente puntual, de acuerdo con el principio de Huygens, y calculando el diagrama o figura de interferencia que resulta de todas estas fuentes.

? El fenómeno que produce las bandas que se pueden apreciar en la luz reflejada de una burbuja de jabón, ¿puede tener aplicaciones prácticas? (Véase el ejemplo 33.2.)

* Antes de estudiar este capítulo, el alumno debe revisar los capítulos 15 y 16, donde se tratan los principios generales de interferencia y difracción de ondas.

33.1 DIFERENCIA DE FASE Y COHERENCIA

Cuando se combinan dos ondas armónicas sinusoidales de la misma frecuencia y longitud de onda, pero de diferente fase, la onda resultante es una onda armónica cuya amplitud depende de la diferencia de fase. Si esta diferencia de fase es cero o un número entero de veces 360°, las ondas están en fase y la interferencia es constructiva. La amplitud resultante es igual a la suma de las amplitudes individuales, y la intensidad (que es proporcional al cuadrado de la amplitud) es máxima. Si la diferencia de fase es igual a 180° o un número entero impar de veces 180°, las ondas están desfasadas y la interferencia es destructiva. En este caso, la amplitud resultante es igual a la diferencia entre las amplitudes individuales, y la intensidad es un mínimo. Si las amplitudes son iguales, la intensidad máxima es cuatro veces la de cada uno de los focos y la intensidad mínima es igual a cero.

Una causa habitual de la existencia de una diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia en la longitud de la trayectoria recorrida por las dos ondas (llamada camino óptico). Una diferencia de **camino óptico** de una longitud de onda produce una diferencia de fase de 360°, que es equivalente a no tener diferencia de fase. Cuando una onda de luz se refleja en una capa transparente y muy delgada, tal como es la burbuja de jabón, la luz reflejada en la primera superficie de la capa de la burbuja se superpone a la onda reflejada en la superficie de atrás. La distancia adicional recorrida por la luz reflejada en la segunda superficie de la capa fina se denomina diferencia de camino óptico recorrido por la segunda onda reflejada. Una diferencia de camino óptico de media longitud de onda produce una diferencia de fase de 180°. En general, una diferencia de camino óptico de Δr contribuye a una diferencia de fase δ dada por

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} 360° \qquad 33.1$$

DIFERENCIA DE FASE DEBIDA A LA DIFERENCIA DEL CAMINO ÓPTICO RECORRIDO

Ejemplo 33.1 Diferencia de fase

(*a*) ¿Cuál es la mínima diferencia de camino óptico que producirá una diferencia de fase de 180° en el caso de luz de 800 nm de longitud de onda? (*b*) La diferencia de camino óptico que acabamos de obtener, ¿qué diferencia de fase producirá en una luz de 700 nm de longitud de onda?

PLANTEAMIENTO La diferencia de fase es de 360° cuando la diferencia de camino óptico es de una longitud de onda.

SOLUCIÓN

(*a*) La diferencia de fase δ es 360° cuando la diferencia de camino Δr es de una longitud de onda. Sabemos que $\lambda = 800$ nm y $\delta = 180°$:

$$\frac{\delta}{360°} = \frac{\Delta r}{\lambda}$$

$$\Delta r = \frac{\delta}{360°}\lambda = \frac{180°}{360°}(800\text{ nm}) = \boxed{400\text{ nm}}$$

(*b*) Considerando $\lambda = 700$ nm, e $\Delta r = 400$ nm, despejamos δ:

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda}360° = \frac{400\text{ nm}}{700\text{ nm}}360° = \boxed{206° = 3{,}59\text{ rad}}$$

COMPROBACIÓN El resultado de la parte (*b*) es un poco mayor que 180°, tal como era de esperar, dado que 400 nm es mayor que la mitad de la longitud de onda de 700 nm.

Otra causa de diferencias de fase es el cambio de fase de 180° que a veces sufre una onda cuando se refleja en una superficie límite determinada. Este cambio de fase es análogo a la inversión de un pulso sobre una cuerda cuando se refleja en un punto donde la densidad aumenta repentinamente, como sucede si una cuerda ligera está unida a otra más pesada. La inversión del pulso reflejado es equivalente a un cambio de fase de 180° en el caso de una onda sinusoidal, que puede considerarse como una serie de pulsos. Cuando la luz que se propaga en aire incide sobre la superficie de un medio en el que la luz se desplaza más lentamente, como vidrio o agua, se produce un cambio de fase de 180° en la luz reflejada. Cuando la luz se está propagando inicialmente en líquido o burbuja de jabón, no se produce ningún

cambio de fase en la luz reflejada en la superficie vidrio-aire o agua-aire. Este hecho es análogo a la reflexión sin inversión de un pulso que se mueve en una cuerda pesada y llega a un punto donde ésta se encuentra unida a otra cuerda más ligera.

Si la luz que se propaga en un medio incide en la superficie de otro medio en el que la velocidad de la luz es menor, se produce un cambio de fase de 180° en la luz reflejada.

DIFERENCIA DE FASE DEBIDA A LA REFLEXIÓN

Como ya vimos en el capítulo 16, la interferencia de ondas se produce cuando se solapan dos o más ondas coherentes. La interferencia de ondas procedentes de dos focos no se observa a menos que los focos sean coherentes. Como normalmente un haz de luz es el resultado de millones de átomos que irradian independientemente, la diferencia de fase entre las ondas procedentes de estos focos fluctúa al azar muchas veces por segundo y, en general, dos focos de luz no son coherentes. Normalmente, se consigue la coherencia dividiendo el haz de luz procedente de un foco en dos o más haces, que posteriormente se combinan para producir un diagrama de interferencia. Esta división se puede lograr por reflexión en las dos superficies de una película delgada (sección 33.2), por difracción del haz en dos pequeñas rendijas practicadas en una barrera opaca (sección 33.3) o utilizando una sola fuente puntual y su imagen en un espejo plano, lo que equivale a las dos fuentes (sección 33.3). Hoy en día, los láseres son las fuentes más importantes de luz coherente en el laboratorio.

La luz de una fuente ideal monocromática es una onda sinusoidal infinitamente larga. La luz emitida por algunos dispositivos generadores de luz láser se aproxima a este ideal. Sin embargo, la luz *monocromática* de fuentes convencionales, como la debida a la descarga en tubos de gas enrarecido, está constituida por paquetes de ondas sinusoidales cuya longitud es de unos pocos millones de longitudes de onda. La luz de estas fuentes está formada por muchos de estos paquetes de onda, cada uno de los cuales tiene, aproximadamente, la misma longitud. Los paquetes de onda tienen básicamente la misma longitud de onda, pero difieren en la fase, cuya distribución es aleatoria. La longitud de cada uno de estos paquetes se llama **longitud de coherencia** de la luz y el tiempo que tarda en pasar completamente uno de estos paquetes por un punto dado se denomina **tiempo de coherencia**. La luz emitida por la descarga en un tubo de gas diseñado para producir luz monocromática tiene una longitud de coherencia de unos pocos milímetros. Por comparación, algunos láseres altamente estables producen luz con longitudes de coherencia de varios kilómetros.

33.2 INTERFERENCIA EN PELÍCULAS DELGADAS

Sin duda, todos hemos observado las bandas coloreadas que aparecen en las pompas de jabón o en la superficie de las películas que se forman en el agua mezclada con aceite. Estas bandas se deben a la interferencia producida por la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película. Resultan diferentes colores debido a las variaciones que existen en el espesor de la película, que producen interferencia para distintas longitudes de onda en diferentes puntos de la misma.

Cuando las ondas que se propagan en un medio atraviesan una superficie que separa dos medios diferentes en los cuales la velocidad de la luz es distinta, parte de la onda se refleja y otra se transmite refractándose. La reflejada sufre un cambio de fase de 180° en la reflexión si la onda transmitida se propaga a velocidad menor que la incidente y la reflejada. (Estos 180° de diferencia de fase aparecen también en las oscilaciones de cuerdas que se estudian en la sección 15.4 del capítulo 15.) En la onda reflejada no se produce ninguna diferencia de fase durante la reflexión si la parte de onda transmitida se propaga a velocidades superiores a la incidente y la reflejada.

Consideremos que estamos observando, con ángulos pequeños respecto a la normal, una película delgada de agua (como una pequeña sección de burbuja de jabón), según se ve en la figura 33.1. Parte de la luz se refleja en la superficie superior de la interfase aire-agua, donde experimenta un cambio de fase de 180°. La mayor parte de la luz entra en la película y es parcialmente reflejada en la superficie inferior agua-aire. No existe cambio de fase en esta reflexión. Si la luz es casi perpendicular a la superficie, tanto el rayo reflejado en la superficie superior como el reflejado en la

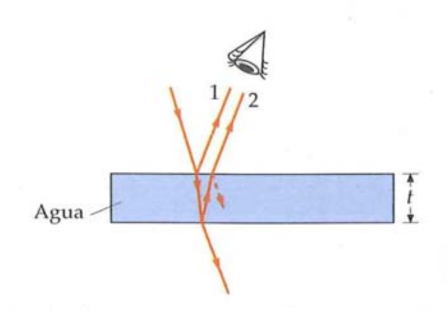


FIGURA 33.1 Los rayos de luz que se reflejan en las superficies superior e inferior de una película delgada son coherentes porque ambos rayos proceden de la misma fuente. Si la luz está incidiendo casi normalmente, los dos rayos reflejados estarán muy próximos el uno del otro y producirán interferencia.

superficie inferior pueden entrar en el ojo. La diferencia de caminos entre estos dos rayos es de $2t$, siendo t el espesor de la película. Esta diferencia de caminos produce una diferencia de fase de $(2t/\lambda')\,360°$, siendo λ' la longitud de onda de la luz en la película, relacionada con la longitud de onda λ en el aire por $\lambda' = \lambda/n$, siendo n el índice de refracción de la película. La diferencia de fase entre estos dos rayos es de 180° más la diferencia de fase debida a la diferencia de caminos. Se produce interferencia destructiva cuando la diferencia de caminos $2t$ es cero o un número entero de longitudes de onda λ' (dentro de la película). Se produce una interferencia constructiva si la diferencia de caminos es un número impar de semilongitudes de onda.

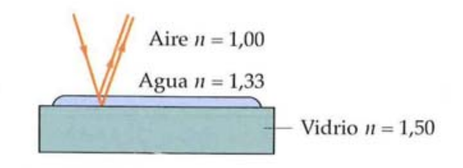
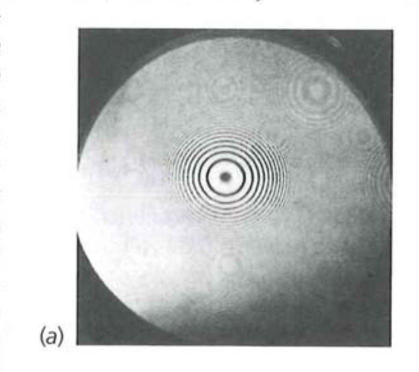


FIGURA 33.2 Interferencia de la luz reflejada en una película delgada de agua que está sobre una superficie de vidrio. En este caso, ambos rayos sufren un cambio de fase de 180° en la reflexión.

Cuando una película delgada de agua está sobre una superficie de vidrio (figura 33.2), el rayo que se refleja en la superficie inferior agua-vidrio sufre también un cambio de fase de 180° debido a que el índice de refracción del vidrio (aproximadamente 1,5) es mayor que el del agua (aproximadamente 1,33). Así pues, los dos rayos indicados en la figura sufren un cambio de fase de 180° después de la reflexión. La diferencia de fase entre estos rayos se debe entonces solamente a la diferencia de caminos y viene dada por $\delta = (2t/\lambda')\,360°$.

Cuando se observa con luz monocromática una película delgada de espesor variable, utilizando, por ejemplo, la luz amarilla de una lámpara de sodio, se ven bandas o líneas alternativamente brillantes y oscuras, denominadas **franjas**. La distancia entre una franja brillante y otra oscura inmediata, es la distancia en que la película cambia de espesor, de forma tal que la diferencia de trayectos de la luz $2t$ es $\lambda'/2$. La figura 33.3*a* ilustra la figura de interferencias observada cuando se refleja la luz en una película de aire encerrada entre una superficie de vidrio esférica y una superficie de vidrio plana en contacto. Estas franjas de interferencias circulares se conocen como **anillos de Newton**. En la figura 33.3*b*, se muestran los típicos rayos reflejados en la superficie superior e inferior de la película de aire. Cerca del punto de contacto de las superficies, en donde la diferencia de caminos entre el rayo reflejado en la superficie superior vidrio-aire y el reflejado en la superficie inferior aire-vidrio es esencialmente cero, o al menos muy pequeña comparada con la longitud de onda de la luz, la interferencia es perfectamente destructiva debido al desplazamiento de fase de 180° del rayo reflejado en la superficie inferior aire-vidrio. Por consiguiente, en la figura 33.3*a* la región central es oscura. La primera franja brillante se presenta para un radio tal que la diferencia de caminos es $\lambda/2$, contribuyendo con una diferencia de fase de 180°, la cual se suma a la causada por el desplazamiento de fase en la reflexión y produce una diferencia de fase total de 360°, o cero. La segunda región oscura se presenta en un radio para el que la diferencia de caminos es λ, y así sucesivamente.



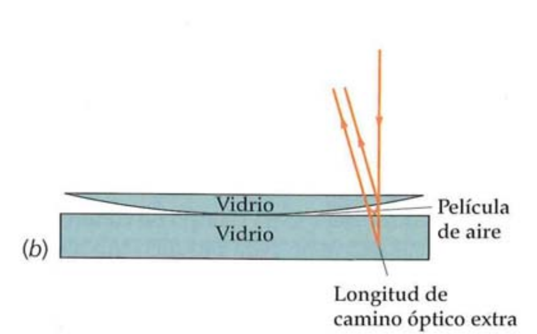


FIGURA 33.3 (*a*) Anillos de Newton observados con luz reflejada en una película delgada de aire entre un vidrio plano y una superficie de vidrio esférica. En el centro, el espesor de la película de aire es despreciable y la interferencia es destructiva debido al cambio de fase de 180° de uno de los rayos en la reflexión. (*b*) Superficies de vidrio para la observación de los anillos de Newton que se ven en (*a*). En este caso, la película delgada es la capa de aire entre ambas superficies de vidrio. *(Gentileza de Bausch y Lomb.)*

Ejemplo 33.2 Cuña de aire

Obtenemos una película de aire en forma de cuña situando un pequeño trozo de papel entre los bordes de dos piezas planas de vidrio (figua 33.4). Se hace incidir luz de 500 nm de longitud de onda en dirección normal a las superficies de vidrio, y se observan franjas de interferencia por reflexión. Si el ángulo θ que forman las superficies planas de vidrio es de 3×10^{-4} rad, ¿cuántas franjas de interferencia se observan por unidad de longitud?

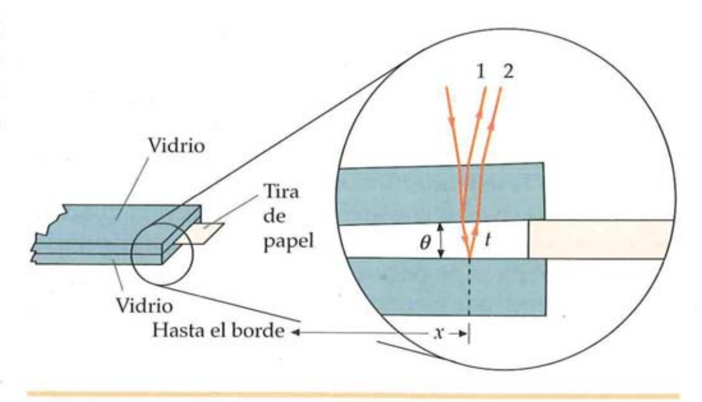


FIGURA 33.4 El ángulo θ, menor que 0,02°, está exagerado. Los rayos incidente y emergente son esencialmente perpendiculares a todas las interfases aire-vidrio.

PLANTEAMIENTO El número de franjas por centímetro se obtiene determinando la distancia horizontal x a la franja m y dividiendo m/x. Como el rayo reflejado en la lámina inferior del vidrio experimenta un cambio de fase de 180°, el punto de contacto (en donde la diferencia de trayectorias es igual a cero) será oscuro. La primera franja oscura después de este punto tiene lugar cuando $2t = \lambda'$, siendo $\lambda' = \lambda$ la longitud de onda en la película de aire y t la separación de las placas en x, como se indica en la figura 33.4. Como el ángulo θ es pequeño, podemos utilizar la aproximación $\theta \approx \operatorname{tg}\theta = t/x$.

SOLUCIÓN

1. La franja m-ésima tiene lugar cuando la diferencia de recorridos $2t$ es igual a m longitudes de onda:
$$2t = m\lambda' = m\lambda$$
$$m = \frac{2t}{\lambda}$$

2. El espesor t está relacionado con el ángulo θ:
$$\theta = \frac{t}{x}$$

3. Sustituir $t = x\theta$ en la ecuación correspondiente a m:
$$m = \frac{2x\theta}{\lambda}$$

4. Calcular m/x:
$$\frac{m}{x} = \frac{2\theta}{\lambda} = \frac{2(3{,}0 \times 10^{-4})}{5{,}0 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 1200\ \text{m}^{-1} = \boxed{12\ \text{cm}^{-1}}$$

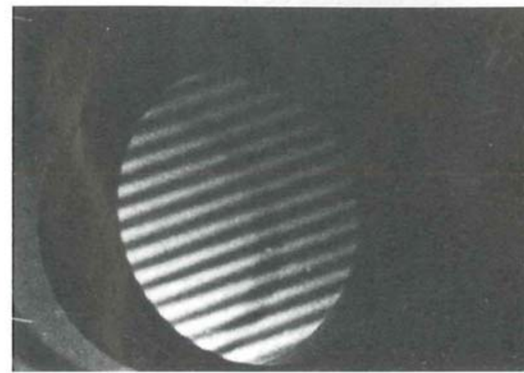
COMPROBACIÓN La expresión para el número de franjas oscuras, o mínimos de luz, por unidad de longitud en el paso 4 muestra que el número por centímetro debería ser mayor cuanto mayor sea la longitud de onda utilizada. Este resultado concuerda con lo esperado.

OBSERVACIONES Podemos, por lo tanto, observar 12 franjas oscuras por centímetro. En la práctica, el número de franjas por centímetro, que es fácil de contar, puede utilizarse para determinar el ángulo. Obsérvese que si el ángulo de la cuña se incrementa, las franjas se presentan más apretadas.

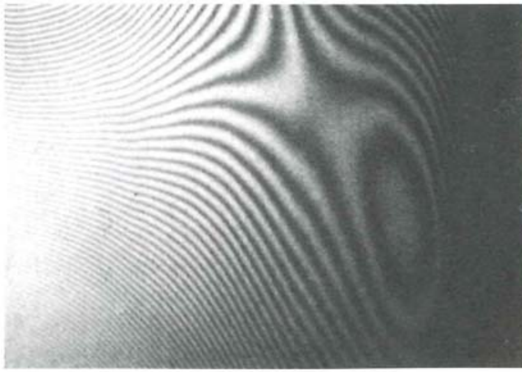
PROBLEMA PRÁCTICO 33.1 ¿Cuántas franjas oscuras por centímetro se observan si se utiliza luz con una longitud de onda de 650 nm?

En la figura 33.5*a*, se muestran las franjas de interferencia producidas por una película de aire en forma de cuña que se encuentra entre dos láminas planas de vidrio, tal y como se describe en el ejemplo 33.2. Las placas que producen franjas rectas, como las de esta figura, se llaman **ópticamente planas**. Para ser ópticamente plana, una superficie debe ser plana en una región de una fracción pequeña de una longitud de onda. Una película similar en forma de cuña, pero formada entre dos láminas de vidrio ordinario, produce un diagrama de franjas tan irregular como el que se muestra en la figura 33.5*b*, lo que indica que estas láminas no son ópticamente planas.

Una aplicación de los efectos de interferencia en láminas delgadas son las lentes no reflectantes. Una lente de este tipo se construye cubriéndola con una película delgada de un material que tiene un índice de refracción de 1,38 aproximadamente, que es un valor comprendido entre el del vidrio y el del aire, de modo que las intensidades de la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película sean, aproximadamente, iguales. Como ambos rayos sufren un cambio de fase de 180°, no existe diferencia de fase entre ellos debida a la reflexión. El espesor de la película se toma de modo que $\frac{1}{4}\lambda' = \frac{1}{4}\lambda n$, siendo λ una longitud de onda ubicada en la mitad del espectro visible, de modo que se consigue un cambio de fase de 180° debido a la diferencia de caminos de $\lambda'/2$. Así se reduce al mínimo la reflexión en la superficie recubierta de esta manera, mientras que la transmisión se maximiza.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 33.5 (*a*) Franjas en línea recta producidas en una película de aire en forma de cuña como la de la figura 33.4. La rectitud de las franjas nos indica que las placas de vidrio son ópticamente planas. (*b*) Franjas procedentes de una película de aire en forma de cuña contenida entre dos placas de vidrio que no son ópticamente planas. *(Gentileza de T. A. Wiggins.)*

33.3 DIAGRAMA DE INTERFERENCIA DE DOS RENDIJAS

Los diagramas o figura de interferencia de la luz procedentes de dos o más focos sólo pueden observarse si los focos son coherentes. Las interferencias en las láminas delgadas tratadas anteriormente se observan porque los dos haces procedentes de la misma fuente luminosa han sido separados por reflexión. En el famoso experimento de 1801 ideado por Thomas Young, en el que demostró la naturaleza

ondulatoria de la luz, se producían dos fuentes luminosas coherentes iluminando dos rendijas paralelas con una sola fuente. En el capítulo 15, vimos que cuando una onda se encuentra con una barrera que posee una abertura muy pequeña, ésta actúa como fuente puntual de ondas (figura 33.6).

En el experimento de Young, cada rendija actúa como una fuente lineal (que es equivalente a una fuente puntual en dos dimensiones). El diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla bastante alejada de las rendijas (figura 33.7*a*), que están separadas entre sí una distancia d. A distancias muy grandes de las rendijas, las líneas que van desde ellas a un cierto punto P situado sobre la pantalla son, aproximadamente, paralelas y la diferencia de caminos es, aproximadamente, d sen θ, como se indica en la figura 33.7*b*. Cuando la diferencia de caminos ópticos es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva. Así pues, tenemos máximos de interferencia en unos ángulos θ_m dados por

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta_m = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{33.2}$$

MÁXIMOS DE INTERFERENCIA DE DOS RENDIJAS

donde m se llama **número de orden**. Los mínimos de interferencia se presentan en

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta_m = \left(m - \tfrac{1}{2}\right)\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{33.3}$$

MÍNIMOS DE INTERFERENCIA DE DOS RENDIJAS

La diferencia de fase δ en un punto P está relacionada con la diferencia de camino óptico d sen θ mediante

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda}2\pi = \frac{d\,\mathrm{sen}\,\theta}{\lambda}2\pi \tag{33.4}$$

La distancia y_m, medida sobre la pantalla desde el punto central a la m-ésima franja brillante (véase la figura 35.7*b*), está relacionada con la distancia L desde las rendijas a la pantalla por la expresión

$$\mathrm{tg}\,\theta_m = \frac{y_m}{L}$$

Para ángulos pequeños, tg $\theta \approx$ sen θ. Sustituyendo sen θ por y_m/L en la ecuación 33.2 y despejando y_m, resulta

$$y_m = m\frac{\lambda L}{d} \tag{33.5}$$

Obsérvese que, según este resultado, las franjas están igualmente separadas entre sí sobre la pantalla.

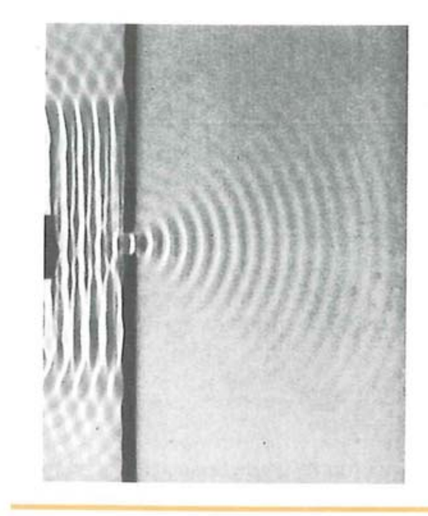
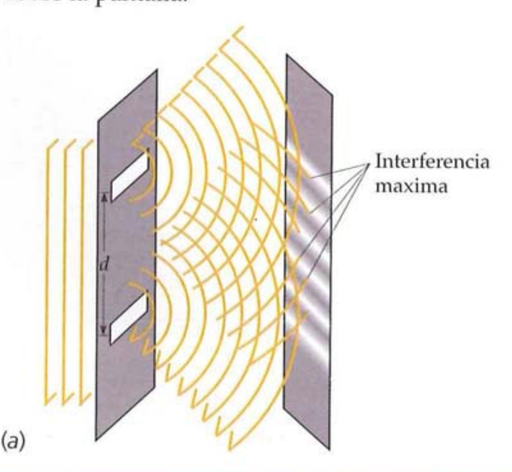


FIGURA 33.6 Ondas de agua planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una pequeña abertura. Las ondas a la derecha de la barrera son ondas circulares concéntricas con la abertura, como si allí existiese una fuente puntual. *(Fotografía procedente de PSSC Physics, segunda edición, 1965. D.C. Heath y Co. y el Centro de Desarrollo Educativo Newton MA.)*



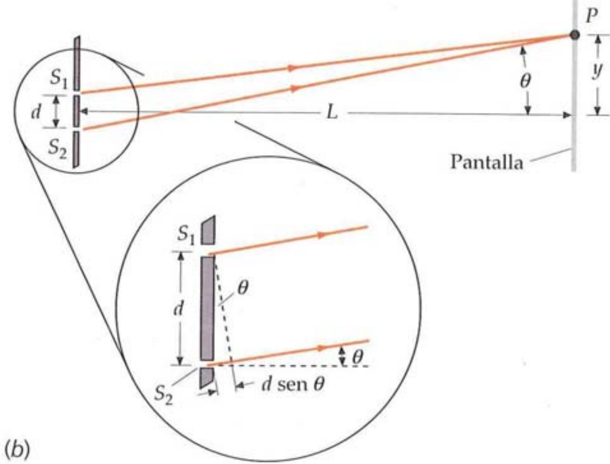


FIGURA 33.7 (*a*) Dos rendijas actúan como fuentes coherentes de luz para la observación de la interferencia en el experimento de Young. Las ondas cilíndricas procedentes de las rendijas se solapan y producen un figura de interferencia sobre una pantalla lejana. (*b*) Construcción geométrica para calcular la relación entre la distancia y medida sobre la pantalla con L y θ. Si la pantalla está muy lejos en comparación con la separación entre rendijas, los rayos procedentes de éstas que se dirigen hacia un punto de la pantalla son casi paralelos, y la diferencia de caminos ópticos entre ambos es d sen θ.

Ejemplo 33.3 Espaciado de las franjas en función del espacio de las rendijas

Inténtelo usted mismo

Dos rendijas estrechas distantes entre sí 1,5 mm se iluminan con la luz amarilla de una lámpara de sodio de 589 nm de longitud de onda. Hallar la separación de las franjas brillantes observadas en una pantalla localizada a 3 m de las rendijas.

PLANTEAMIENTO La distancia y_m medida a lo largo de la pantalla hasta la franja brillante m-ésima viene dada por la ecuación 33.5, siendo $L = 3$ m, $d = 1,5$ mm y $\lambda = 589$ nm.

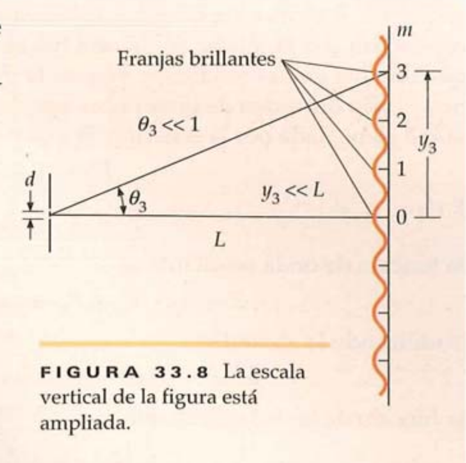


FIGURA 33.8 La escala vertical de la figura está ampliada.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Hacer un esquema de la situación (figura 33.8).	
2. El espacio entre franjas luminosas de interferencia es la distancia entre la franja de orden m y la de orden $m + 1$. Utilizar el esquema para obtener la expresión de la separación entre franjas.	espacio entre franjas $= y_{m+1} - y_m$
3. Aplicar la ecuación 33.5 a las franjas m y $m + 1$.	$y_m = m\frac{\lambda L}{d}$ y $y_{m+1} = (m+1)\frac{\lambda L}{d}$
4. Sustituir el resultado del paso 2 y simplificar.	$y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{d}$
5. Sustituir por el resultado del paso 4 para obtener el espacio entre franjas.	espacio entre franjas $= \boxed{1,18 \text{ mm}}$

OBSERVACIONES Las franjas están uniformemente espaciadas sólo en la medida en que la aproximación de pequeños ángulos sea válida, es decir, para valores que cumplan la condición $\lambda/d << 1$. En este ejemplo, $\lambda/d = (589 \text{ nm})/(1,5 \text{ nm}) = 0,0004$.



Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Trigonometría**

Ejemplo 33.4 ¿Cuántas franjas?

Conceptual

Se iluminan dos estrechas rendijas con luz monocromática. Si la distancia entre rendijas es igual a una distancia equivalente a 2,75 longitudes de onda, ¿cuál es el número máximo de franjas luminosas que aparecen en la pantalla? (*a*) 1, (*b*) 2, (*c*) 3, (*d*) 4, (*e*) 5, (*f*) 6 o más.

PLANTEAMIENTO Una franja brillante implica la existencia de interferencia constructiva. Estas franjas aparecen en puntos de la pantalla para los cuales la distancias a las dos rendijas difieren en un número entero de longitudes de onda. Sin embargo, la máxima distancia posible es igual a la distancia entre las dos rendijas.

SOLUCIÓN

1. Determinar la diferencia máxima de distancia en la pantalla para el caso de dos rendijas:	En todos los puntos de la pantalla, la diferencia de distancia desde las dos rendijas es de 2,75 longitudes de onda o menos.
2. Hay una franja brillante (interferencia constructiva) en puntos de la pantalla para los que la distancia a las dos rendijas difiere en un número entero de longitudes de onda:	Hay en la pantalla franjas brillantes colocadas de tal forma que la diferencia de distancia entre ellas y las rendijas es de 2, de 1 ó cero longitudes de onda.
3. Contar las franjas brillantes. Se tiene un máximo central y dos a cada lado de éste:	$\boxed{(e)\ 5}$



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 33.1

¿Cuál es el máximo número de franjas oscuras (es decir, en las que existe interferencia destructiva) que se pueden ver en la pantalla?

CÁLCULO DE LA INTENSIDAD

Para calcular la intensidad de la luz en un punto cualquiera P de la pantalla, es necesario sumar dos funciones de onda armónicas que difieren en fase.* Las funciones de onda para las ondas electromagnéticas son los vectores del campo eléctrico. Sea E_1 el campo eléctrico en un punto P de la pantalla generado por las ondas procedentes de la rendija 1, y sea E_2 el campo eléctrico generado en el mismo punto por las ondas procedentes de la rendija 2. Como los ángulos que nos interesan son muy pequeños, podemos suponer que los campos son paralelos. Ambos campos eléctricos oscilan con la misma frecuencia (ya que ambos proceden de una única fuente que ilumina ambas rendijas) y poseen la misma amplitud. (La diferencia de caminos es sólo del orden de unas pocas longitudes de onda de la luz.) La diferencia de fase δ viene dada por la ecuación 33.4. Si expresamos las funciones de onda por

$$E_1 = A_0 \operatorname{sen} \omega t$$

y

$$E_2 = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

la función de onda resultante es

$$E = E_1 + E_2 = A_0 \operatorname{sen} \omega t + A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \qquad 33.6$$

Y utilizando la identidad

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

la función de la onda resultante es

$$E = \left[2A_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta\right] \operatorname{sen}\left(\omega t + \tfrac{1}{2}\delta\right) \qquad 33.7$$

Por tanto, la amplitud de la onda resultante es $2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta$. Su valor máximo, igual a $2A_0$, se da cuando las ondas se encuentran en fase y es igual a cero cuando están desfasadas 180°. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad en el punto P es

$$I = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\delta \qquad 33.8$$

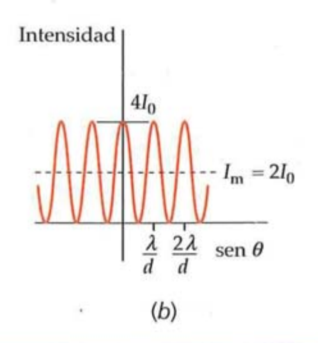
INTENSIDAD EN FUNCIÓN DE LA DIFERENCIA DE FASE

donde I_0 es la intensidad de la luz que se obtiene en la pantalla para cualquiera de las rendijas por separado. El ángulo de fase δ está relacionado con la posición sobre la pantalla mediante la ecuación 33.4.

La figura 33.9*a* muestra el diagrama de intensidad como se ve en la pantalla. Se indica un gráfico de la intensidad en función del sen θ en la figura 33.9*b*. Cuando θ es pequeño, esto es equivalente a una representación de la intensidad en función de y, puesto que $y \approx \operatorname{tg} \theta \approx L \operatorname{sen} \theta$. La intensidad I_0 es la que produce cada rendija por separado. La línea a trazos de esta figura muestra la intensidad media, $2I_0$, que es el resultado de promediar sobre una distancia que contenga muchos máximos y mínimos de interferencia. Sería la intensidad que se obtendría de las dos fuentes si actuasen independientemente sin interferencia. En otras palabras, es la intensidad que se observaría si las fuentes fuesen incoherentes, porque entonces existiría una diferencia de fase adicional entre ellas que fluctuaría al azar, de modo que sólo podría observarse la intensidad media.

El dispositivo que se muestra en la figura 33.10, conocido con el nombre de **espejo de Lloyd**, constituye otro método para producir un diagrama de interferencia de dos rendijas. Se sitúa una sola rendija a una distancia igual a $\frac{1}{2}d$ por encima del plano de un espejo. La luz procedente del foco que incide directamente sobre la pantalla interfiere con la reflejada en el espejo. Se puede considerar que la luz reflejada procede de la imagen virtual de la rendija formada por el espejo. Debido al cambio de fase de 180° en la reflexión en el espejo, el diagrama de interferencia es la de dos fuentes rectilíneas coherentes que difieren en fase en 180°. El diagrama es el mismo que el de la figura 33.9 para dos rendijas, exceptuando el hecho de que los máximos y los mínimos están intercambiados. Se produce interferencia constructiva en los puntos para los cuales la diferencia de caminos es de media longitud de onda o cualquier número impar de medias longitudes de onda. En estos puntos, la diferencia de fase de 180° debida a la diferencia de caminos se combina con la diferencia de fase de 180° de las fuentes para producir una interferencia constructiva.

(a)



(b)

FIGURA 33.9 (*a*) Diagrama de interferencia observado sobre la pantalla alejada de las dos rendijas de la figura 33.7. (*b*) Representación de la intensidad en función del sen θ. La intensidad máxima es $4I_0$, siendo I_0 la intensidad debida a cada rendija por separado. La intensidad media (línea a trazos) es $2I_0$. *(Gentileza de Michael Cagnet.)*

* Vimos esto en el capítulo 16 al tratar la superposición general de dos ondas.

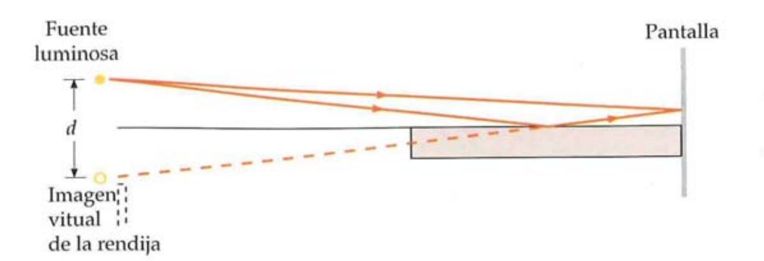


FIGURA 33.10 Espejo de Lloyd para producir un figura de interferencia de doble rendija. Las dos fuentes (fuente luminosa y su imagen) son coherentes y están desfasadas 180°.

PROBLEMA PRÁCTICO 33.2

Se coloca una fuente luminosa puntual de 589 nm de longitud de onda a 0,40 mm por encima de una superficie de un espejo de vidrio, y se observan las franjas de interferencia que se forman al superponerse en la pantalla la onda que se propaga directamente con la que procede de la reflexión en el espejo. Si se coloca la pantalla a 6,0 m de la fuente, ¿cuál será la separación entre las franjas de interferencia que aparecen en la pantalla?

La Física del espejo de LLoyd se usó en los inicios de la Radioastronomía para determinar la localización de fuentes luminosas distantes en la esfera celeste. Se colocaba un receptor de ondas radioeléctricas en un acantilado sobre el mar, de forma que la superficie del mar cumplía la función de espejo.

33.4 DIAGRAMA DE DIFRACCIÓN DE UNA SOLA RENDIJA

En nuestro estudio de los diagramas o figura de interferencia producidos por dos o más rendijas, hemos supuesto que éstas eran muy estrechas, de modo que podíamos considerarlas como fuentes lineales que generan ondas cilíndricas, que en nuestros diagramas bidimensionales son focos puntuales de ondas circulares. Por consiguiente, podíamos admitir que la intensidad debida a una sola rendija que actuara aislada era la misma (I_0) en cualquier punto P sobre la pantalla, con independencia del ángulo θ formado entre el rayo dirigido al punto P y la recta normal entre la rendija y la pantalla. Cuando la rendija no es estrecha, la intensidad recibida en una pantalla alejada no es independiente del ángulo sino que disminuye cuando aumenta el ángulo. Consideremos una rendija de anchura a. La figura 33.11 muestra el diagrama de intensidad sobre una pantalla lejana respecto a la rendija de anchura a en función del sen θ. Podemos ver que la intensidad es máxima en la dirección normal (sen $\theta = 0$) y disminuye hasta cero para un ángulo que depende de la anchura de la rendija a y de la longitud de onda λ.

La mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en un amplio **máximo central de difracción**, aunque existen bandas de máximos secundarios menores a cada lado del máximo central. Los primeros valores nulos de intensidad se presentan para ángulos dados por

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \lambda/a \qquad 33.9$$

Obsérvese que para una longitud de onda determinada λ, la ecuación 33.9 describe cómo variaciones en la anchura de la rendija generan variaciones en la amplitud angular del máximo central. Si aumentamos la anchura de la rendija a, el ángulo θ_1 para el cual la intensidad se anula por vez primera disminuye, originándose un máximo de difracción central más estrecho. A la inversa, si disminuye la anchura de la rendija, el ángulo correspondiente al primer cero aumenta, dando así un máximo central de difracción más ancho. Cuando a es menor que λ, el valor de sen θ_1 debería ser mayor que λ para que se cumpliese la ecuación 33.9. Por lo tanto, para a menor que λ no existen puntos de intensidad nula en el diagrama y la rendija actúa como una fuente

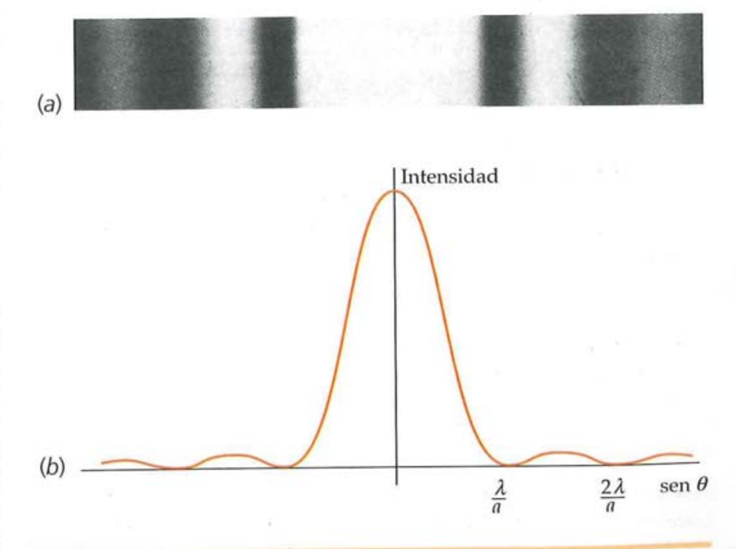


FIGURA 33.11 (*a*) Diagrama de difracción de una sola rendija observado sobre una pantalla lejana. (*b*) Representación de la intensidad en función del sen θ correspondiente al diagrama (*a*). *(Gentileza de Michael Cagnet.)*

lineal (un foco puntual en dos dimensiones), radiando energía luminosa esencialmente por igual en todas direcciones.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación 33.9 por $a/2$, resulta

$$\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = \tfrac{1}{2}\lambda \qquad 33.10$$

La cantidad $\frac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,\theta_1$ es la diferencia de caminos entre un rayo de luz que sale del medio de la mitad superior de la rendija y otro que sale del medio de su mitad inferior. Vemos que el **primer mínimo** de difracción se produce cuando estos dos rayos están desfasados 180°, es decir, cuando su diferencia de caminos es de media longitud de onda. Podemos comprender este resultado considerando cada punto de un frente de onda como si fuese una fuente luminosa puntual de acuerdo con el principio de Huygens. En la figura 33.12, hemos colocado una línea de puntos sobre el frente de ondas en la rendija para representar esquemáticamente estas fuentes puntuales. Supongamos, por ejemplo, que tenemos 100 de dichos puntos y que estamos observando bajo un ángulo θ_1 para el que a sen $\theta_1 = \lambda$. Consideremos la rendija dividida en dos mitades, con los primeros 50 puntos en la mitad superior, y los puntos del 51 al 100 en la mitad inferior. Cuando la diferencia de caminos entre el punto medio de la mitad superior y el punto medio de la mitad inferior de la rendija es igual a media longitud de onda, la diferencia de caminos entre el punto 1 (el primer punto de la mitad superior) y el punto 51 (el primer punto de la mitad inferior) es $\frac{1}{2}\lambda$. Las ondas procedentes de estos dos puntos estarán desfasadas en 180° y, por lo tanto, se anularán mutuamente. Análogamente, las ondas procedentes del segundo punto de cada región (punto 2 y punto 52) se cancelarán. Continuando con este análisis, podemos ver que las ondas procedentes de cada par de puntos separados entre sí en $a/2$ se cancelarán. Así pues, no existirá energía luminosa bajo este ángulo. Podemos ampliar este análisis al segundo y tercer mínimos en el diagrama de difracción de la figura 33.11. Para un ángulo θ_2 tal que a sen $\theta_2 = 2\lambda$, podemos dividir la rendija en cuatro regiones, dos en la mitad superior y otras dos en la mitad inferior. Utilizando el mismo razonamiento, la intensidad de la luz de la mitad superior es cero por la cancelación de pares de fuentes y, análogamente, ocurre lo mismo con la segunda mitad. La expresión general para los mínimos de intensidad en el diagrama de difracción de una sola rendija es, por tanto,

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_m = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad 33.11$$

MÍNIMOS DE INTENSIDAD CERO EN UN DIAGRAMA DE DIFRACCIÓN DE UNA SOLA RENDIJA

Normalmente, sólo nos interesa la presencia del primer mínimo de intensidad luminosa porque casi toda la energía luminosa se encuentra contenida en el máximo de difracción central.

En la figura 33.13, la distancia y_1 desde el máximo central al primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ_1, y la distancia L que separa la rendija de la pantalla por

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{y_1}{L}$$

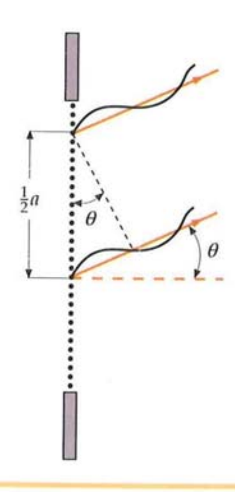


FIGURA 33.12 Una sola rendija se representa mediante un gran número de focos o fuentes puntuales de igual amplitud. En el primer mínimo de difracción de una rendija, las ondas procedentes del foco de la parte superior de la misma y las que proceden del foco justo debajo del punto medio de la rendija están desfasadas en 180° y se anulan entre sí, como ocurre con todos los demás pares de focos.

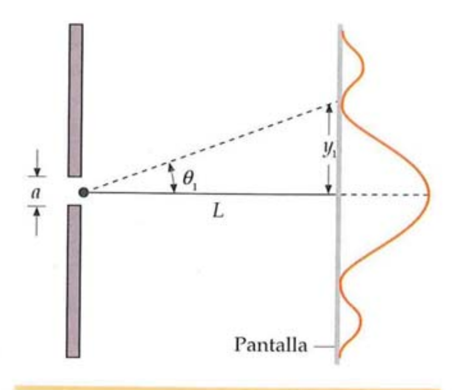


FIGURA 33.13 La distancia y_1 medida sobre la pantalla desde el máximo central al primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ_1 por tg $\theta_1 = y_1/L$, siendo L la distancia a la pantalla.

Ejemplo 33.5 Anchura del máximo central de difracción

En un experimento en clase para demostrar la difracción por una sola rendija, el haz de un láser de 700 nm de longitud de onda atraviesa una rendija vertical de 0,2 mm de ancho y luego incide sobre una pantalla a 6 m de distancia. Hallar la anchura del máximo de difracción central sobre la pantalla, es decir, la distancia entre el primer mínimo a la izquierda y el primer mínimo a la derecha del máximo central.

PLANTEAMIENTO Si nos basamos en la figura 33.13, la anchura del máximo central de difracción es $2y_1$.

SOLUCIÓN

1. La semianchura de los máximos centrales y_1 se relaciona con el ángulo θ_1 por: $\qquad \mathrm{tg}\,\theta_1 = \dfrac{y_1}{L}$

2. El ángulo θ_1 se relaciona con la anchura de la rendija por la ecuación 33.11:

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \lambda/a$$

3. Se utiliza el valor de θ_1 obtenido en el paso 2 en la ecuación del paso 1, y obtenemos así $2y_1$:

$$2y_1 = 2L\,\mathrm{tg}\,\theta_1 = 2L\,\mathrm{tg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\lambda}{a}\right)$$

$$= 2(6{,}0\ \mathrm{m})\,\mathrm{tg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{700 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}}{0{,}00020\ \mathrm{m}}\right)$$

$$= 4{,}2 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} = \boxed{4{,}2\ \mathrm{cm}}$$

COMPROBACIÓN Como sen $\theta_1 = \lambda/a = (700\ \mathrm{nm})/(0{,}2\ \mathrm{nm}) = 0{,}0035$, podemos usar la aproximación de pequeños ángulos para calcular $2y_1$. En esta aproximación, sen θ_1 = tg θ_1, de forma que $\lambda/a = y_1/L$, y $2y_1 = 2L\lambda/a = 2(6\ \mathrm{m})(700\ \mathrm{nm})/(0{,}2\ \mathrm{mm}) = 4{,}20$ cm. (Este valor aproximado difiere del exacto en aproximadamente el 0,0006%.)

DIAGRAMA DE INTERFERENCIA-DIFRACCIÓN DE DOS RENDIJAS

Cuando se tienen dos o más rendijas, el diagrama de intensidad obtenido sobre una pantalla lejana es una combinación del diagrama de difracción de una sola rendija y del diagrama de interferencia de varias rendijas, que ya hemos estudiado. En la figura 33.14, se ve el diagrama de intensidad obtenido sobre una pantalla originado por dos rendijas cuya separación d es 10 veces la anchura a de cada una de ellas. El diagrama es el mismo que el obtenido por la interferencia de dos rendijas muy estrechas (figura 33.11) excepto en que se encuentra modulado por el diagrama de difracción de una sola rendija; es decir, la intensidad debida a cada rendija por separado no es ahora constante sino que disminuye con el ángulo, como se indica en la figura 33.14*b*.

Obsérvese que, en la figura 33.14, el máximo central de difracción contiene 19 máximos de interferencia —el máximo central de interferencia y 9 máximos a cada lado. El décimo máximo de interferencia a cada lado del central está en un ángulo θ dado por sen $\theta = 10\lambda/d = \lambda/a$, puesto que $d = 10a$. Este valor coincide con el primer mínimo de difracción, de modo que este máximo de interferencia no se ve. En estos puntos, la luz procedente de las dos rendijas se encontraría en fase e interferirían de forma constructiva, pero no existe luz procedente de ninguna de ellas porque estos puntos son mínimos de difracción. En general, vemos que si $m = d/a$, el máximo m-ésimo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción. Como la franja m-ésima no se ve, existirán $m - 1$ franjas a cada lado de la franja central para un total de N franjas en el máximo central, donde N viene dado por

$$N = 2(m - 1) + 1 = 2m - 1 \qquad 33.12$$

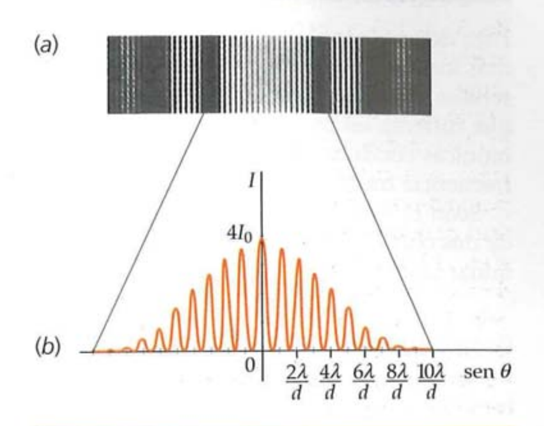


FIGURA 33.14 (*a*) Diagrama de interferencia-difracción correspondiente a dos rendijas cuya separación d es igual a 10 veces su anchura a. Se pierde el décimo máximo de interferencia a cada lado del máximo de interferencia central porque coincide con el primer mínimo de difracción. (*b*) Representación de la intensidad en función del sen θ correspondiente a la banda central del diagrama en (*a*). *(Gentileza de Michael Cagnet.)*

Ejemplo 33.6 Interferencia y difracción

Dos rendijas de anchura $a = 0{,}015$ mm están separadas por una distancia $d = 0{,}06$ mm y se encuentran iluminadas por luz de longitud de onda $\lambda = 650$ nm. ¿Cuántas franjas brillantes se ven en el máximo central de difracción?

PLANTEAMIENTO Debemos determinar el valor de m para el cual el máximo m-ésimo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción. Por lo tanto, consideramos que existirán $N = 2m - 1$ franjas en el máximo central.

SOLUCIÓN

1. Establecer la relación entre el ángulo θ_1 del primer mínimo de refracción y la anchura a:

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \quad \text{(primer mínimo de difracción)}$$

2. Relacionar el ángulo θ_m del m-ésimo máximo de interferencia con la separación d:

$$\operatorname{sen}\theta_m = \frac{m\lambda}{d} \quad \text{(m-ésimo máximo de interferencia)}$$

3. Igualar los senos de los ángulos y despejar m:

$$\frac{m\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}$$

$$m = \frac{d}{a} = \frac{0{,}060\text{ mm}}{0{,}015\text{ mm}} = 4{,}0$$

4. El primer mínimo de difracción coincide con la cuarta franja brillante. Por lo tanto, existen tres franjas brillantes visibles a cada lado del máximo central de difracción. Estos seis máximos, más el máximo central de interferencia, se combinan dando un total de 7 franjas brillantes en el máximo de difracción central:

$$N = \boxed{7\text{ franjas}}$$

* 33.5 SUMA DE ONDAS ARMÓNICAS MEDIANTE FASORES

Para determinar el diagrama o figura de interferencia producida por tres, cuatro o más focos coherentes y para calcular el diagrama o figura de difracción de una sola rendija, es necesario combinar varias ondas armónicas de la misma frecuencia pero que difieran en fase. Una interpretación geométrica de las funciones de onda armónicas conduce a un método general de suma de ondas armónicas de la misma frecuencia mediante una construcción geométrica.

Sean $E_1 = A_1$ sen α y $E_2 = A_2$ sen $(\alpha + \delta)$, donde $\alpha = \omega t$, las funciones de onda de dos ondas consideradas en un determinado punto. Nuestro problema es determinar la suma

$$E_1 + E_2 = A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}(\alpha + \delta)$$

Podemos representar cada función de onda mediante la componente y de un vector de dos dimensiones como se indica en la figura 33.15. El método geométrico de la suma se basa en el hecho de que la componente y (o la x) de la resultante de dos vectores es igual a la suma de las componentes y (o las x) de los vectores, como se ilustra en la figura. La función de onda E_1 viene representada por el vector $\vec{A}_1$. A medida que transcurre el tiempo, este vector gira en el plano xy con frecuencia angular ω. Este vector se llama **fasor**. (Ya vimos los fasores en la sección 29.4 al estudiar los circuitos de ac.) La función de onda E_2 es la componente y de un fasor de módulo A_2 que forma un ángulo $\alpha + \delta$ con el eje x. Según las leyes de la adición vectorial, la suma de estas componentes es igual a la componente y del fasor resultante $\vec{A}$, como se indica en la figura 33.15. La componente y del fasor resultante, A sen $(\alpha + \delta')$, es una función de onda armónica que es la suma de las dos funciones de onda originales:

$$A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}(\alpha + \delta) = A \operatorname{sen}(\alpha + \delta') \qquad 33.13$$

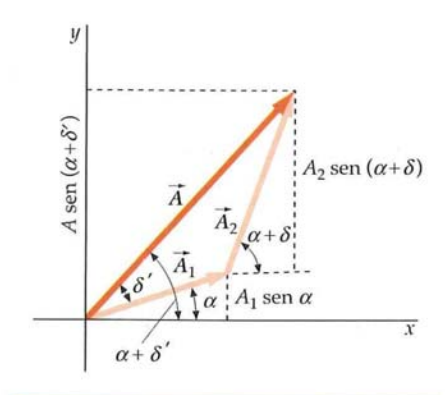


FIGURA 33.15 Representación mediante fasores de las funciones de onda.

donde A (la amplitud de la onda resultante) y δ' (la fase de la onda resultante respecto a la primera onda) se pueden hallar sumando los fasores que representan las ondas. Al variar el tiempo, α varía. Los fasores que representan las dos funciones de onda y el fasor resultante que representa la función de onda resultante giran en el espacio, pero sus posiciones relativas no varían debido a que todos giran con la misma velocidad angular ω.

Ejemplo 33.7 Superposición de ondas mediante fasores — *Inténtelo usted mismo*

Utilizar el método de suma de fasores para deducir la ecuación 33.7 $E = \left[2A_0 \cos\frac{1}{2}\delta\right] \sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\delta\right)$ correspondiente a la superposición de dos ondas de la misma amplitud.

PLANTEAMIENTO Se representan las ondas $y_1 = A_0$ sen α e $y_2 = A_0$ sen $(\alpha + \delta)$ mediante vectores (fasores) de longitud A_0 que formen entre sí un ángulo δ. La onda resultante $y_r = A$ sen $(\alpha + \delta')$ viene representada por la suma de estos vectores, que forman un triángulo isósceles, como se muestra en la figura 33.16.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Relacionar δ y δ' sabiendo que un ángulo externo a un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos adyacentes.	$\delta' + \delta' = \delta$
2. Despejar δ'.	$\delta' = \frac{1}{2}\delta$
3. Expresar $\cos\delta'$ en función de A y A_0.	$\cos\delta' = \dfrac{\frac{1}{2}A}{A_0}$
4. Expresar A en función de δ.	$A = 2A_0\cos\delta' = 2A_0\cos\frac{1}{2}\delta$
5. Utilizar estos resultados de A y δ' para expresar la función de onda resultante.	$y_r = A\,\text{sen}(\alpha + \delta')$ $= \boxed{\left[2A_0\cos\frac{1}{2}\delta\right]\text{sen}\left(\alpha + \frac{1}{2}\delta\right)}$

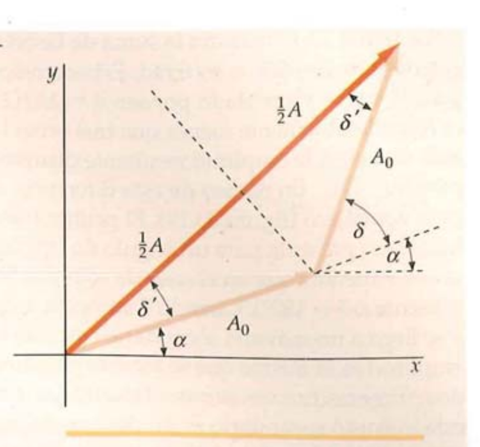


FIGURA 33.16

COMPROBACIÓN El resultado del paso 5 es idéntico a la ecuación 33.7.

PROBLEMA PRÁCTICO 33.3 Calcular la función de onda resultante de las dos ondas siguientes: $E_1 = 4\,\text{sen}\,(\omega t)$ y $E_2 = 3\,\text{sen}\,(\omega t + 90°)$.

*DIAGRAMA O FIGURA DE INTERFERENCIA DE TRES O MÁS FUENTES IGUALMENTE ESPACIADAS

El método de adición de fasores puede aplicarse al cálculo del diagrama de interferencia de tres o más focos coherentes, en fase e igualmente espaciados. Nos interesan particularmente los máximos y mínimos de interferencia. La figura 33.17 ilustra el caso de tres fuentes. La geometría es la misma que en el caso de las dos fuentes. A una distancia grande de las fuentes, los rayos procedentes de ellas y que llegan a un punto P de la pantalla son, aproximadamente, paralelos. La diferencia de caminos entre la primera y la segunda fuente es entonces $d\,\text{sen}\,\theta$, como antes, y entre la primera y tercera fuente la diferencia de caminos es de $2d\,\text{sen}\,\theta$. La onda en el punto P es la suma de las tres ondas. Sea $\alpha = \omega t$ la fase de la primera onda en el punto P. Así pues, tenemos el problema de sumar tres ondas de la forma

$$E_1 = A_0\,\text{sen}\,\alpha$$
$$E_2 = A_0\,\text{sen}(\alpha + \delta) \qquad 33.14$$
$$E_3 = A_0\,\text{sen}(\alpha + 2\delta)$$

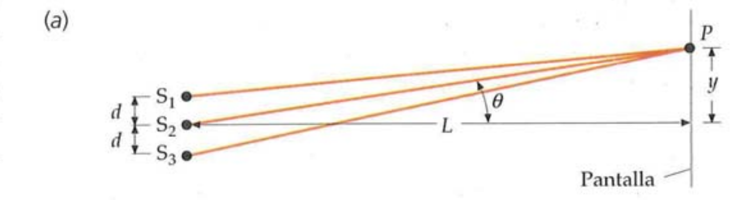
donde

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\,\text{sen}\,\theta \approx \frac{2\pi}{\lambda}\frac{yd}{L} \qquad 33.15$$

como en el problema de las dos rendijas.

En $\theta = 0$, $\delta = 0$, y todas las ondas están en fase. La amplitud de la onda resultante es 3 veces la de cada onda individual y la intensidad es 9 veces la correspondiente a cada fuente actuando separadamente. Cuando el ángulo θ aumenta desde $\theta = 0$, el ángulo de fase δ aumenta y disminuye la intensidad. Por lo tanto, la posición $\theta = 0$ es una posición de intensidad máxima.

(a)



(b)

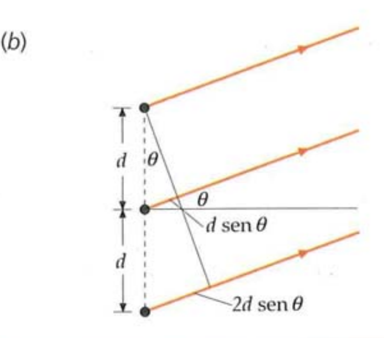


FIGURA 33.17 Construcción geométrica para calcular el diagrama de intensidad obtenido lejos de tres fuentes coherentes igualmente separadas que están en fase.

La figura 33.18 muestra la suma de fasores de tres ondas correspondientes a un ángulo de fase $\delta = 30° = \pi/6$ rad. Esto corresponde a un punto P situado en la pantalla para el cual θ viene dado por sen $\theta = \lambda\delta/(2\pi d) = \lambda/(12d)$. La amplitud resultante A es considerablemente menor que tres veces la de cada fuente. Cuando aumenta el ángulo de fase δ, la amplitud resultante disminuye hasta que la amplitud resulta ser nula para $\delta = 120°$. En el caso de esta diferencia de fases, los tres fasores forman un triángulo equilátero (figura 33.19). El primer mínimo de interferencia para el caso de tres fuentes se presenta para un ángulo de fase δ menor (y, por lo tanto, para un ángulo espacial θ menor) que en el caso de sólo dos fuentes (en este caso, el primer mínimo se presenta a $\delta = 180°$). Cuando δ aumenta a partir de 120°, la amplitud resultante crece y se llega a un máximo secundario cerca de $\delta = 180°$. En el ángulo de fase $\delta = 180°$, la amplitud es la misma que se tendría para una sola fuente, puesto que las ondas de las dos primeras fuentes se cancelan entre sí, quedando sólo la tercera. La intensidad de este máximo secundario es un noveno del máximo en $\theta = 0$. Cuando δ aumenta más allá de 180°, la amplitud disminuye nuevamente y es nula para $\delta = 180° + 60° = 240°$. Para δ mayor que 240°, la amplitud crece y es de nuevo igual a tres veces la de cada fuente por separado cuando $\delta = 360°$. Este ángulo de fase corresponde a una diferencia de caminos de 1 longitud de onda para las ondas de las dos primeras fuentes y de 2 longitudes de onda para las ondas de la primera y tercera fuente. Por lo tanto, las tres ondas están en fase en este punto. Los máximos más grandes, denominados máximos principales, están en las mismas posiciones que cuando sólo existen dos fuentes, y corresponden a los puntos en que los ángulos θ vienen dados por

$$d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{33.16}$$

Estos máximos son más intensos y más estrechos que los que aparecen con sólo dos fuentes. Se presentan en los puntos en que la diferencia de caminos entre fuentes adyacentes es cero o un número entero de longitudes de onda.

Estos resultados pueden generalizarse a más de tres fuentes. Por ejemplo, si tenemos cuatro fuentes en fase igualmente espaciadas, los máximos de interferencia vienen de nuevo dados por la ecuación 33.16, pero los máximos son todavía más intensos y estrechos, y existen dos pequeños máximos secundarios entre cada par de máximos principales. Para $\theta = 0$, la intensidad es 16 veces la correspondiente a una sola fuente. El primer mínimo de interferencia se presenta cuando δ es 90°, como puede verse mediante el diagrama de fasores de la figura 33.20. El primer máximo secundario está próximo a $\delta = 132°$, en donde las ondas procedentes de tres de las fuentes se cancelan dejando solamente la onda que procede de la cuarta fuente. La intensidad del máximo secundario es, aproximadamente, un dieciseisavo de la correspondiente al máximo central. Existe otro mínimo para $\delta = 180°$, otro máximo secundario cerca de $\delta = 228°$ y otro mínimo para $\delta = 270°$ antes del máximo principal siguiente, que corresponde a $\delta = 360°$.

La figura 33.21 muestra los diagramas de intensidad para dos, tres y cuatro fuentes igualmente espaciadas. La figura 33.22 muestra un gráfico de I/I_0, donde I_0 es la intensidad debida a cada fuente actuando por separado. En el caso de tres fuentes, existe un máximo secundario muy pequeño entre cada par de máximos principales, y éstos son más nítidos, más agudos y más intensos que los debidos a sólo dos fuentes. Si se tienen cuatro fuentes, aparecen dos pequeños máximos secundarios entre cada par de máximos principales y estos últimos son todavía más estrechos e intensos.

A partir de este análisis, podemos ver que al aumentar el número de fuentes, la intensidad se concentra cada vez más en los máximos principales dados por la ecuación 33.16 y estos máximos se hacen cada vez más estrechos. Si se tienen N fuentes, la intensidad de los máximos principales es N^2 veces la debida a una sola de ellas. El primer mínimo se presenta en un ángulo de fase de $\delta = 360°/N$, puesto que los N fasores forman entonces un polígono cerrado de N lados. Existen $N - 2$ máximos secundarios entre cada par de máximos principales. Estos

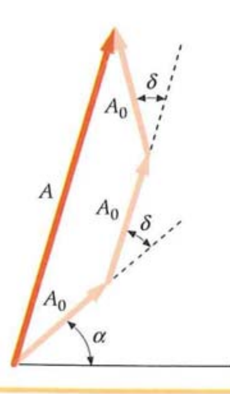


FIGURA 33.18 Diagrama de fasores para determinar la amplitud resultante A debida a tres ondas, cada una de ellas de amplitud A_0, que tienen diferencias de fase de δ y 2δ debidas a diferencias de caminos de d sen θ y $2d$ sen θ. El ángulo $\alpha = \omega t$ varía con el tiempo, pero no influye en el cálculo de A.

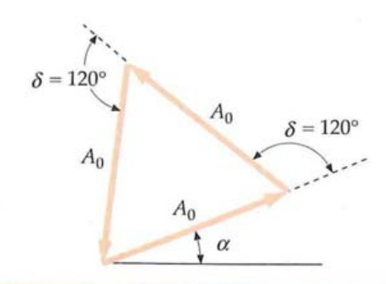


FIGURA 33.19 La amplitud resultante correspondiente a las ondas procedentes de tres focos es cero cuando δ es 120°. Este mínimo de interferencia se presenta para un ángulo θ menor que el correspondiente al primer mínimo con dos focos, que se presenta cuando δ es 180°.

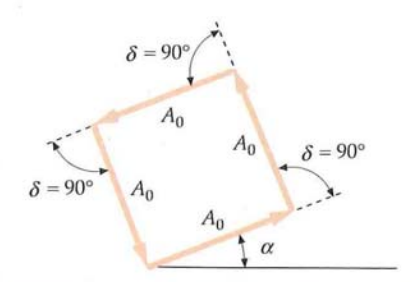


FIGURA 33.20 Diagrama de fasores para el primer mínimo en el caso de cuatro fuentes en fase e igualmente espaciadas. La amplitud es nula cuando la diferencia de fase de las ondas procedentes de fuentes adyacentes es 90°.

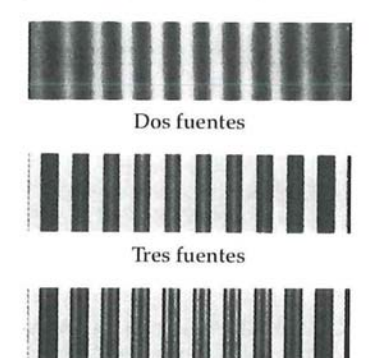


FIGURA 33.21 Diagramas de intensidad para dos, tres y cuatro fuentes coherentes igualmente espaciadas. Existe un máximo secundario entre cada par de máximos principales en el caso de las tres fuentes, y dos máximos secundarios si se trata de cuatro fuentes. *(Gentileza de Michael Cagnet)*

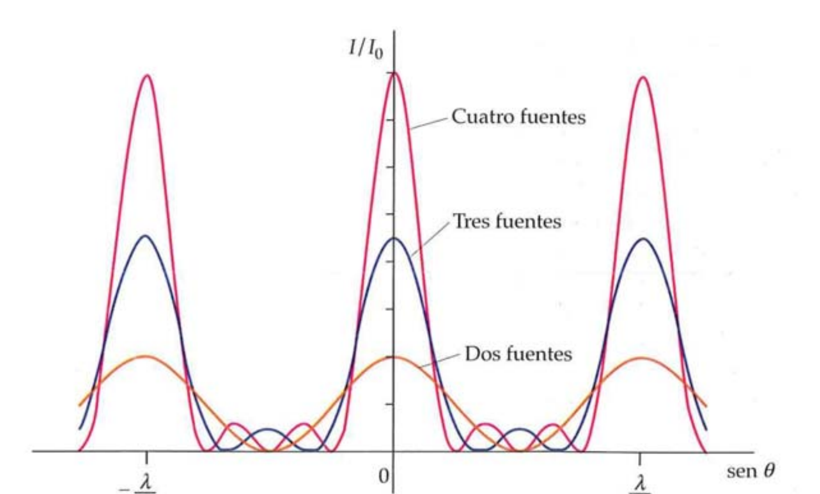


FIGURA 33.22 Representación de la intensidad en función del sen θ para dos, tres y cuatro fuentes coherentes igualmente espaciadas y en fase.

máximos secundarios son muy débiles comparados con los máximos principales. Cuando aumenta el número de fuentes, los máximos principales se hacen cada vez más agudos y más intensos, mientras que las intensidades de los máximos secundarios se hacen despreciables frente a las de los máximos principales.

*DETERMINACIÓN DEL DIAGRAMA O FIGURA DE DIFRACCIÓN PRODUCIDA POR UNA SOLA RENDIJA

A continuación, calcularemos el diagrama de intensidad indicado en la figura 33.11 utilizando el método de los fasores para sumar ondas armónicas. Supondremos que la rendija de anchura a se divide en N intervalos y que existe un foco puntual de ondas en el punto medio de cada intervalo (figura 33.23). Si la distancia entre dos fuentes adyacentes es d y la anchura de la abertura es a, tenemos $d = a/N$. Como la pantalla sobre la cual estamos calculando la intensidad está muy alejada de las fuentes, los rayos procedentes de éstas que llegan hasta un punto P de dicha pantalla son, aproximadamente, paralelos. La diferencia de trayectos entre dos fuentes cualesquiera adyacentes es entonces δ sen θ, y la diferencia de fases δ está relacionada con la diferencia de camino óptico mediante

$$\delta = \frac{d\ \mathrm{sen}\,\theta}{\lambda}2\pi$$

Si A_0 es la amplitud debida a una sola fuente, la amplitud en el punto máximo central, donde $\theta = 0$ y todas las ondas están en fase, es $A_{\text{máx}} = NA_0$ (figura 33.24).

Se puede hallar el valor de la amplitud en otro punto situado en un cierto ángulo θ utilizando el método de fasores para la suma de ondas armónicas. Como en el caso de la suma de 2, 3 o 4 ondas, la intensidad es cero en cualquier punto en el que los fasores que representan las ondas forman un polígono cerrado. En este caso, el polígono tiene N lados (figura 33.25). En el primer mínimo, la onda procedente de la primera fuente justo por debajo de la parte superior de la abertura y la que procede de la fuente exactamente debajo del punto medio de la abertura están desfa-

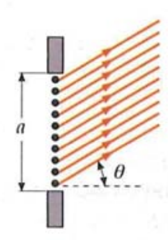


FIGURA 33.23 Esquema para el cálculo de la figura de interferencias lejos de una rendija estrecha. Se supone que la rendija de anchura a contiene un gran número de fuentes puntuales en fase separadas por una distancia δ. Los rayos procedentes de estas fuentes que terminan en un punto muy alejado son, aproximadamente, paralelos. La diferencia de caminos para las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes, es, pues, δ sen θ.

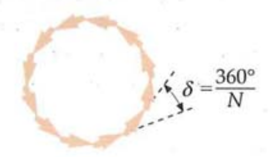


FIGURA 33.25 Diagrama de fasores correspondiente al primer mínimo en el diagrama de difracción de una sola rendija. Cuando las ondas procedentes de las N fuentes se cancelan completamente, los N fasores forman un polígono cerrado. La diferencia de fase entre ondas procedentes de fuentes adyacentes es entonces $\delta = 360°/N$. Cuando N es muy grande, las ondas procedentes de la primera y última fuentes están, aproximadamente, en fase.

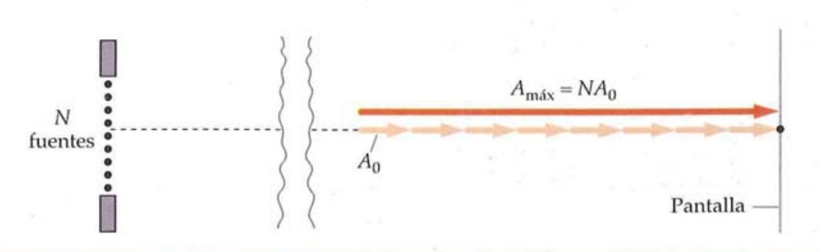


FIGURA 33.24 Una sola rendija se representa por N fuentes de amplitud A_0. En el punto máximo central, donde $\theta = 0$, las ondas procedentes de las fuentes se suman en fase, dando una amplitud resultante $A_{\text{máx}} = NA_0$.

sadas 180°. En este caso, las ondas procedentes de la fuente cerca de la parte superior e inferior de la abertura están desfasadas en casi 360°. [La diferencia de fase es de hecho (360° − 360°/N).] Así pues, si el número de fuentes es muy grande, 360/N es despreciable y se obtiene una anulación completa cuando las ondas procedentes de la primera y última fuente están desfasadas en 360°, lo cual corresponde a una diferencia de caminos de 1 longitud de onda, según la ecuación 33.11.

Podemos calcular ahora la amplitud en un punto general para el cual las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes difieran en una fase igual a δ. La figura 33.26 muestra el diagrama de fasores para la suma de N ondas cuyas fases difieren de la de la primera onda en $\delta, 2\delta, \ldots, (N-1)\delta$. Cuando N es muy grande y δ muy pequeña, el diagrama de fasores es, aproximadamente, un arco de circunferencia. La amplitud resultante A es la longitud de la cuerda de este arco. Se calcula esta amplitud resultante en función de la diferencia de fases ϕ entre la primera y última onda. A partir de la figura 33.26, tenemos

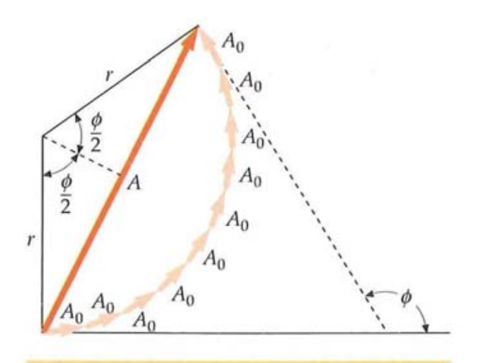


FIGURA 33.26 Modelo de fasores para el cálculo de la amplitud de las ondas procedentes de N fuentes en función de la diferencia de fase ϕ entre las ondas procedentes de la primera fuente cercana al borde superior de la rendija y la última cercana a su borde inferior. En el caso de que N sea muy grande, la amplitud resultante A es la cuerda de un arco de circunferencia de longitud $NA_0 = A_{máx}$.

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{A/2}{r}$$

o bien

$$A = 2r\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\phi \qquad 33.17$$

donde r es el radio del arco. Como la longitud del arco es $A_{máx} = NA_0$ y el ángulo subtendido es ϕ, tenemos

$$\phi = \frac{A_{máx}}{r} \qquad 33.18$$

o sea,

$$r = \frac{A_{máx}}{\phi}$$

Sustituyendo por esta expresión en la ecuación 33.17, se tiene

$$A = \frac{2A_{máx}}{\phi}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\phi = A_{máx}\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}$$

Como la amplitud en el punto máximo central ($\theta = 0$) es $A_{máx}$, el cociente entre la intensidad en cualquier otro punto y la del máximo central, viene dado por

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_{máx}^2} = \left(\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2$$

o sea,

$$I = I_0\left(\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2 \qquad 33.19$$

INTENSIDAD DE DIFRACCIÓN DE UNA SOLA RENDIJA

La diferencia de fase ϕ entre la primera y última onda se relaciona con la diferencia de camino a sen θ entre la parte superior y la inferior de la abertura mediante:

$$\phi = \frac{a\,\text{sen}\,\theta}{\lambda}2\pi \qquad 33.20$$

Las ecuaciones 33.19 y 33.20 describen el diagrama de intensidad de la figura 33.11. El primer mínimo aparece para a sen $\theta = \lambda$, punto donde las ondas procedentes del medio de la mitad superior y del medio de la mitad inferior de la abertura tienen una diferencia de caminos de $\lambda/2$ y están desfasados 180°. El segundo mínimo se presenta para a sen $\theta = 2\lambda$, punto donde las ondas que proceden de la mitad superior de la mitad superior de la abertura y las que proceden de la mitad inferior de la mitad superior de la abertura poseen una diferencia de caminos de $\lambda/2$ y están desfasadas 180°.

Existe un máximo secundario aproximadamente a medio camino entre el primer y segundo mínimos para $a\,\text{sen}\,\theta \approx \frac{3}{2}\lambda$. En la figura 33.27, se muestra el diagrama de fasores para determinar la intensidad aproximada de este máximo secundario. La diferencia de fases entre la primera y la última onda es, aproximadamente, 360° + 180°. Los fasores completan así $1\frac{1}{2}$ circunferencias. La amplitud resultante es el diámetro de una circunferencia cuya longitud es dos tercios de la longitud total $A_{\text{máx}}$. Si $a\,\text{sen}\,\theta \approx \frac{3}{2}\lambda$ es el valor de la circunferencia, el diámetro A vale

$$A = \frac{C}{\pi} = \frac{\frac{2}{3}A_{\text{máx}}}{\pi} = \frac{2}{3\pi}A_{\text{máx}}$$

y

$$A^2 = \frac{4}{9\pi^2}A^2_{\text{máx}}$$

La intensidad en este punto es

$$I = \frac{4}{9\pi^2}I_0 = \frac{1}{22{,}2}I_0 \qquad 33.21$$

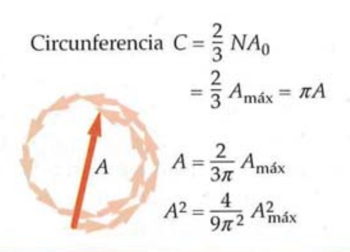


FIGURA 33.27 Diagrama de fasores para el cálculo de la amplitud aproximada del primer máximo secundario de la figura de difracción de una sola rendija. Este máximo secundario se produce cerca del punto medio entre el primer y segundo mínimos, cuando los N fasores completan $1\frac{1}{2}$ circunferencias.

*DETERMINACIÓN DEL DIAGRAMA O FIGURA DE INTERFERENCIA-DIFRACCIÓN DE DOS RENDIJAS

La intensidad del diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas puede calcularse a partir de la ecuación 33.8 sustituyendo la intensidad de cada rendija (I_0 en dicha ecuación) por la intensidad del diagrama de difracción correspondiente a cada rendija, I, expresada por la ecuación 33.19. Por lo tanto, la intensidad del diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas será

$$I = 4I_0\left(\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2 \cos^2\tfrac{1}{2}\delta \qquad 33.22$$

INTENSIDAD DEL DIAGRAMA INTERFERENCIA-DIFRACCIÓN PARA DOS RENDIJAS

donde ϕ es la diferencia de fase entre los rayos procedentes de la parte superior e inferior de cada rendija, relacionada con la anchura de cada rendija por

$$\phi = \frac{a\,\text{sen}\,\theta}{\lambda}2\pi$$

y δ es la diferencia de fase entre los rayos procedentes de los centros de dos ranuras adyacentes, la cual está relacionada con la separación entre rendijas por

$$\delta = \frac{d\,\text{sen}\,\theta}{\lambda}2\pi$$

En la ecuación 33.22, I_0 es la intensidad en $\theta = 0$ debida a una sola rendija.

Ejemplo 33.8 Sistema con cinco rendijas de interferencia y difracción

Determinar la intensidad del diagrama de interferencia y difracción debida a un sistema de cinco rendijas con separación constante entre ellas, donde a es la anchura de cada una de ellas y d es la distancia entre rendijas adyacentes.

PLANTEAMIENTO En primer lugar, calcularemos la intensidad del diagrama de interferencia para las cinco rendijas, asumiendo que la variación angular de la intensidad debida a la difracción es nula. Hacer esto considerando primero un diagrama de fasores para determinar la amplitud de la onda resultante en una dirección arbitraria definida por el ángulo θ. La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. A continuación, corregir la variación de intensidad con el ángulo θ usando la expresión de la intensidad de difracción debida a una rendija simple (ecuaciones 33.19 y 20).

SOLUCIÓN

1. La intensidad del diagrama de difracción I' debido a una rendija de anchura a viene dada por las ecuaciones 33.19 y 20:

$$I' = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2$$

donde

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta$$

2. La intensidad del diagrama de interferencia I es proporcional al cuadrado de la amplitud A de la superposición de las funciones de las ondas de la luz procedente de las cinco rendijas:

$$I \propto A^2$$

donde

$$A\operatorname{sen}(\alpha+\delta') = A_0\operatorname{sen}\alpha + A_0\operatorname{sen}(\alpha+\delta) + A_0\operatorname{sen}(\alpha+2\delta) + A_0\operatorname{sen}(\alpha+3\delta) + A_0\operatorname{sen}(\alpha+4\delta)$$

siendo $\alpha = \omega t$ y $\delta = \frac{d\operatorname{sen}\theta}{\lambda}2\pi$

3. Para calcular A, construimos un diagrama de fasores, tal como se indica en la figura 33.28. La amplitud A es igual a la suma de las proyecciones de las amplitudes de las ondas individuales en el fasor resultante:

$$\delta' = \beta + \delta$$

así

$$\beta = \delta' - \delta = 2\delta - \delta = \delta$$

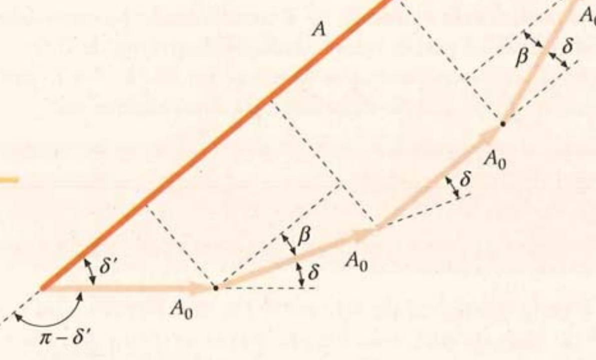


FIGURA 33.28

4. Para determinar δ', añadimos los ángulos exteriores. La suma de los ángulos exteriores es igual a 2π. (Si recorremos el perímetro de un polígono estamos realizando una rotación cuyo ángulo es la suma de los ángulos exteriores, que es igual a 2π radianes.):

$$2(\pi - \delta') + 4\delta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \delta' = 2\delta$$

5. Determinar A a partir de la figura:

$$A = 2A_0\cos\delta' + 2A_0\cos\beta + A_0$$

6. Sustituir δ' utilizando el paso 4, y sustituir β teniendo en cuenta que $\beta = \delta$. (β y δ son iguales, ya que cuando se cortan dos líneas paralelas por una transversal, los ángulos interior y exterior en el mismo lado de la transversal son iguales, es decir, corresponden a los ángulos de un rectángulo formados por lados paralelos respectivos con una de sus diagonales.):

$$A = A_0(2\cos 2\delta + 2\cos\delta + 1)$$

7. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad podemos relacionar las intensidades. Considerando que I' y A_0 son la intensidad y amplitud, respectivamente, debidas a una única rendija, tenemos:

$$A^2 = A_0^2(2\cos 2\delta + 2\cos\delta + 1)^2$$

así

$$I = I'(2\cos 2\delta + 2\cos\delta + 1)^2$$

8. Sustituyendo I' por el valor del resultado del paso 1, se tiene:

$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2(2\cos 2\delta + 2\cos\delta + 1)^2$$

donde $\phi = \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\lambda}2\pi$ y $\delta = \frac{d\operatorname{sen}\theta}{\lambda}2\pi$

COMPROBACIÓN Si $\theta = 0$, tanto ϕ como δ son iguales a 0, de forma que para $\theta = 0$, el paso 5 del problema viene a dar $A = 5A_0$, y el resultado del paso 8 viene a ser $I = 5^2I_0 = 25I_0$, como era de esperar.

33.6 DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER Y DE FRESNEL

Los diagramas de difracción, como el de una sola rendija de la figura 33.11, que se observan en puntos desde los cuales se ven casi paralelos los rayos procedentes de una abertura o de un obstáculo se denominan **diagramas de difracción de Fraunhofer**. Estos diagramas pueden observarse a grandes distancias del obstáculo o abertura, de modo que los rayos que alcancen un punto cualquiera sean aproximadamente paralelos, o bien pueden observarse utilizando una lente para enfocar rayos paralelos sobre una pantalla de observación situada en el plano focal de la lente.

Cuando el diagrama de difracción se observa cerca de una abertura o de un obstáculo, se denomina **diagrama o figura de difracción de Fresnel**. Debido a que los rayos procedentes de una abertura o de un obstáculo próximos a una pantalla no pueden considerarse paralelos, la difracción de Fresnel es mucho más difícil de analizar. La figura 33.29 ilustra la diferencia existente entre los diagramas de Fresnel y de Fraunhofer en el caso de una sola rendija.*



FIGURA 33.29 Diagramas de difracción correspondientes a una sola rendija con la pantalla a diversas distancias.

En la figura 33.30*a*, se muestra el diagrama de difracción de Fresnel de un disco opaco. Obsérvese el punto brillante del centro del diagrama causado por la interferencia constructiva de las ondas luminosas difractadas desde el borde del disco. Este diagrama tiene cierto interés histórico. En un intento de desacreditar la teoría ondulatoria de Fresnel, Siméon Poisson señaló que esta teoría predecía la existencia de un punto brillante en el centro de la sombra un disco, hecho que consideraba una contradicción ridícula. Sin embargo, Fresnel inmediatamente demostró experimentalmente que dicho punto existe efectivamente. Esta demostración sirvió para convencer a muchos de los que dudaban de la validez de la teoría ondulatoria de la luz. El diagrama de difracción de Fresnel de una abertura circular se muestra en la figura 33.30*b*. Comparándolo con el diagrama del disco opaco de la figura 33.30*a*, puede verse que ambos diagramas son complementarios entre sí.

La figura 33.31*a* muestra el diagrama de difracción de Fresnel de un borde rectilíneo iluminado por la luz procedente de una fuente puntual. Se añade un gráfico de la intensidad en función de la distancia (medida a lo largo de una línea perpendicular al borde) en la figura 33.31*b*. La intensidad de la luz no cae bruscamente a cero en la sombra geométrica, pero disminuye rápidamente y es despreciable al cabo de unas pocas longitudes de onda del borde. El diagrama de difracción de Fresnel de una abertura rectangular se muestra en la

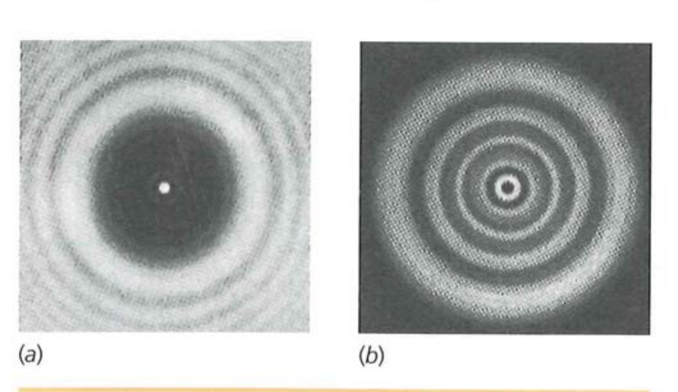
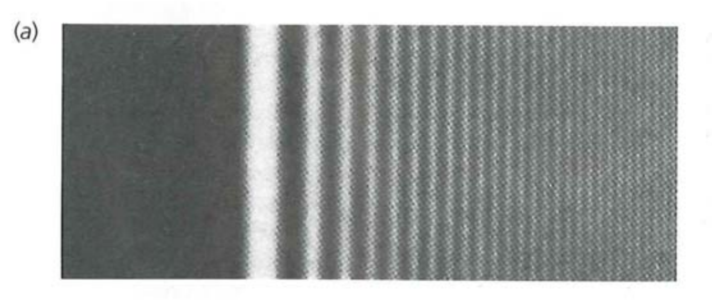


FIGURA 33.30 (*a*) Diagrama de difracción de Fresnel de un disco opaco. En el centro de la sombra, las ondas luminosas difractadas por el borde del disco están en fase y producen un punto brillante conocido como punto de Poisson. (*b*) Diagrama de difracción de Fresnel de una abertura circular. Comparar este diagrama con el del apartado (*a*). (*(a) y (b) M. Cagnet, M. Françon, J. C. Thrierr, Atlas of Optical Phenomena.*)



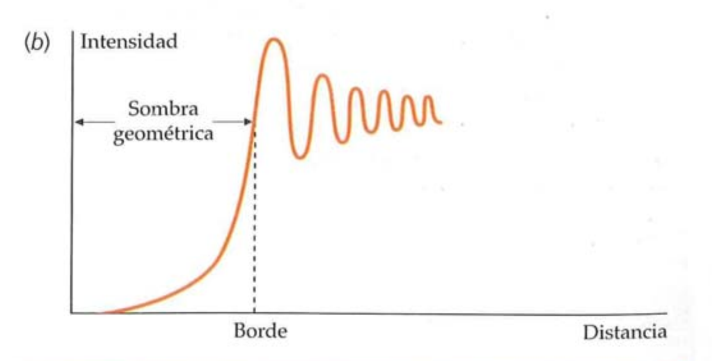


FIGURA 33.31 (*a*) Difracción de Fresnel de un borde recto. (*b*) Representación gráfica de la intensidad en función de la distancia a lo largo de una recta perpendicular a dicho borde. (*Gentileza de Battelle-Northwest Laboratories.*)

* Véase Richard E. Haskel, "A Simple Experiment on Fresnel Diffraction", *American Journal of Physics*, vol. 38, 1970, pág. 1039.

figura 33.32. Estos diagramas no pueden verse con fuentes luminosas extensas, como las lámparas incandescentes ordinarias, porque las franjas oscuras del diagrama producidas por la luz procedente de un punto de la fuente se solapan con las franjas brillantes del diagrama producido por la luz procedente de otro punto.

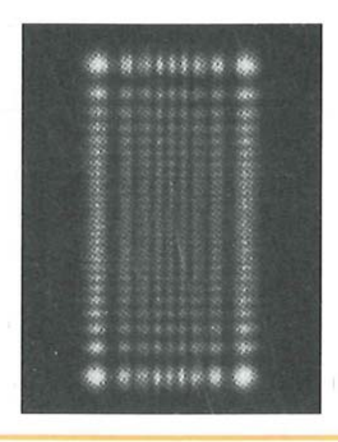


FIGURA 33.32 Diagrama de la difracción de Fresnel de una abertura rectangular. *(Gentileza de Michael Cagnet.)*

33.7 DIFRACCIÓN Y RESOLUCIÓN

La difracción debida a una abertura circular tiene implicaciones importantes en la resolución de muchos instrumentos ópticos. La figura 33.33 muestra el diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular. El ángulo θ subtendido por el primer mínimo de difracción está relacionado con la longitud de onda y con el diámetro de la abertura D por

$$\operatorname{sen}\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \qquad 33.23$$

La ecuación 33.23 es semejante a la ecuación 33.9 excepto en el factor 1,22. Este factor aparece en el análisis matemático del problema, que es semejante al de una sola rendija, pero más complicado debido a la geometría circular que posee. En muchas aplicaciones, el ángulo θ es pequeño, de modo que sen θ puede reemplazarse por θ. El primer mínimo de difracción se produce entonces en un ángulo θ dado por

$$\theta \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D} \qquad 33.24$$

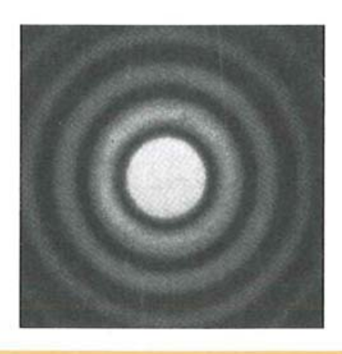


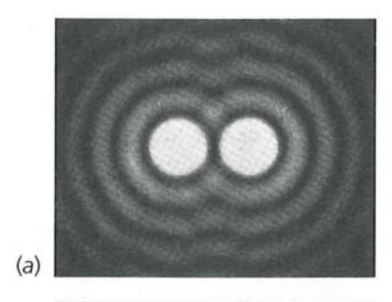
FIGURA 33.33 Diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular. *(Gentileza de Michael Cagnet.)*

La figura 33.34 muestra dos fuentes puntuales que subtienden un ángulo α respecto a una abertura circular alejada de las fuentes. También se incluye en dicha figura la intensidad de los diagramas de difracción de Fraunhofer correspondientes. Si α es mucho mayor que 1,22 λ/D, se verán como dos fuentes. Sin embargo, al ir disminuyendo α, aumenta el solapamiento de los diagramas de difracción y resulta cada vez más difícil distinguir las dos fuentes de una sola. Para la separación angular crítica, α_c, dada por

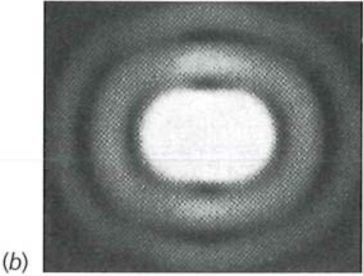
$$\alpha_c = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \qquad 33.25$$

el primer mínimo del diagrama de difracción de una fuente cae en el máximo central de la otra. Se dice entonces que estos objetos están en el límite justo de su resolución según el denominado **criterio de resolución de Rayleigh**. La figura 33.35 muestra los diagramas de difracción para dos fuentes cuando α es mayor que el ángulo crítico que permite la resolución y cuando α es exactamente igual al ángulo crítico mencionado.

La ecuación 33.25 tiene muchas aplicaciones. El **poder de resolución** de un instrumento óptico, como un microscopio o un telescopio, se refiere a su capacidad para resolver y distinguir dos objetos que están muy próximos. Las imágenes de los objetos tienden a solaparse debido a los efectos de difracción de la abertura de entrada del instrumento. La ecuación 33.25 pone de manifiesto que puede aumentarse el poder de resolución, o bien aumentando el diámetro D de la lente (o espejo), o haciendo disminuir la longitud de onda λ. Los telescopios astronómicos utilizan grandes lentes o espejos objetivo para aumentar su resolución y además aumentar también su capacidad de recoger la luz que procede de objetos lejanos. Una red de 27 radio-antenas, como la que se muestra en la fotografía de la figura 33.36, con las antenas montadas sobre raíles, puede configurar un telescopio simple con una resolución de 36 km (22 millas). En un



(*a*)



(*b*)

FIGURA 33.35 Diagramas de difracción correspondientes a una abertura circular y a dos fuentes puntuales incoherentes cuando (*a*) α es mucho mayor que 1,22 λ/D y (*b*) cuando α es igual al límite de resolución, α_c = 1,22 λ/D *((a) y (b) Gentileza de Michael Cagnet.)*

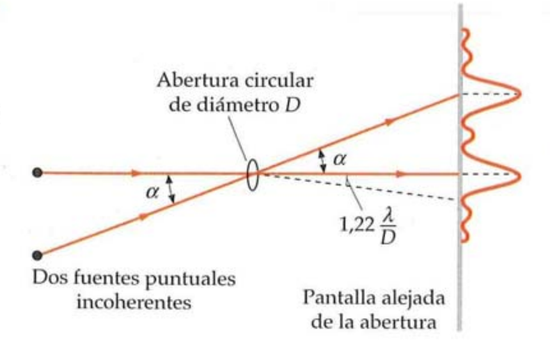


FIGURA 33.34 Dos fuentes distantes que subtienden un ángulo α. Si α es mucho mayor que 1,22 λ/D, siendo λ la longitud de onda de la luz y D el diámetro de la abertura, los diagramas de difracción apenas se solapan y las fuentes se ven fácilmente como dos fuentes separadas. Si α no es mucho mayor que 1,22λ/D, el solapamiento de los diagramas de difracción hace que sea difícil distinguir dos fuentes de una.

microscopio, a veces se coloca bajo el objetivo una película de aceite transparente con un índice de refracción del orden de 1,55 con objeto de que disminuya la longitud de onda de la luz ($\lambda' = \lambda/n$). Aún puede reducirse más la longitud de onda mediante la utilización de luz ultravioleta y una película fotográfica; sin embargo, como el vidrio ordinario es opaco a la luz ultravioleta, las lentes del microscopio ultravioleta deben ser de cuarzo o fluorita. Para obtener altas resoluciones, se usan microscopios electrónicos, que utilizan electrones en lugar de luz. Las longitudes de onda de los electrones varían con la raíz cuadrada de su energía cinética; permite disponer de longitudes de onda tan bajas como se desee.*



FIGURA 33.36 Una extensa red de radio antenas (VLA, *very large array*), se encuentra cerca de Socorro, Nuevo México. Las antenas, de 25 m de diámetro, se montan en raíles y pueden constituir varias configuraciones que incluso pueden extenderse en un diámetro de 36 km. Los datos de estas antenas se combinan electrónicamente, de tal forma que constituyen un único telescopio de muy alta resolución. *(Gentileza del Observatorio Nacional de Radioastronomía/ Universidades Asociadas, Inc./ Fundación Nacional Para la Ciencia. Fotógrafo: Kelly Gattlin. Composición digital: Patricia Smiley.)*

Ejemplo 33.9 Física en la biblioteca — *Póngalo en su contexto*

Mientras estudiamos en la biblioteca, echándonos hacia atrás con nuestra silla, analizamos los pequeños huecos que hay en las placas del falso techo. Observamos que los huecos están separados entre sí unos 5 mm, aproximadamente. Podemos ver claramente los huecos que están directamente encima de nosotros, a unos 2 m; sin embargo, los de las placas que están más alejadas no los podemos apreciar. Nos preguntamos si la razón por la que no podemos ver los huecos distantes es que se encuentran a una distancia cuyo valor está fuera de los criterios de resolución establecidos por Rayleigh. ¿Es ésta una explicación plausible acerca de la desaparición de los huecos en las placas más alejadas? Observamos que los huecos desaparecen cuando están a unos 20 metros de distancia de nosotros.

PLANTEAMIENTO Para resolver el problema, es necesario conocer algunos datos y clarificar cómo se realiza la observación. Si utilizamos la ecuación 32.25, necesitaremos conocer la longitud de onda de la luz y el diámetro de abertura. Suponiendo que nuestra pupila es la abertura, podemos considerar que tiene unos 5 mm de diámetro. (Este es el valor utilizado en nuestro libro de texto de Física.) La luz está probablemente centrada en una longitud de onda en torno a 500 nm.

SOLUCIÓN

1. El límite angular de resolución para el ojo depende de la relación de la longitud de onda y el diámetro de la pupila:
$$\theta_c \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$
2. El ángulo subtendido por los huecos depende de su distancia de separación d y de su distancia L desde nuestro ojo:
$$\theta \approx \frac{d}{L}$$
3. Igualando los dos ángulos y sustituyendo los valores correspondientes, nos da:
$$\frac{d}{L} \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$
$$\frac{5{,}0\text{ mm}}{L} \approx 1{,}22\frac{500\text{ nm}}{5{,}0\text{ mm}}$$
4. Despejando L, obtenemos:
$$L = 41\text{ m}$$
5. Una distancia de 41 m es demasiado grande (por un factor 2). Sin embargo, pensamos que el valor asignado al diámetro de la pupila bien pudiera no ser correcto. Sabemos que la pupila es menor cuando la luz brilla más y el techo de la biblioteca está muy iluminado y pintado de blanco. En una búsqueda rápida en Internet encontramos enseguida información acerca del diámetro de una pupila normal. Las pupilas tienen un diámetro que oscila entre 2 y 3 mm y pueden alcanzar hasta 7 mm:

> Es una explicación razonable. Si el diámetro de la pupila es de 2,5 mm, el valor de L es 20 m.

Resulta instructivo comparar la limitación que marca la resolución del ojo debida a la difracción, como se ha visto en el ejemplo 33.9, con la originada por la separación de los receptores (conos) en la retina. Para que sean vistos como dos objetos distintos, sus imágenes deben caer sobre la retina en dos conos no adyacentes. (Véase el problema 65 en el capítulo 32.) Como la retina está a 2,5 cm aproximadamente de la lente del ojo o cristalino, la distancia y sobre la retina que corresponde a una separación angular de $1{,}5 \times 10^{-4}$ rad se obtiene mediante

$$\alpha_c = 1{,}5 \times 10^{-4}\text{ rad} = \frac{y}{2{,}5\text{ cm}}$$



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 33.2

Verdadera o falso:
La difracción de Fraunhofer es un caso límite de la de Fresnel.

* Las propiedades ondulatorias de los electrones se estudiarán en el capítulo 34.

o bien

$$y = 3{,}8 \times 10^{-4}\ \text{cm} = 3{,}8 \times 10^{-6}\ \text{m} = 3{,}8\ \mu\text{m}$$

La separación real de los conos en la fóvea (central), en donde los conos están muy estrechamente juntos, es del orden de 1 μm. Fuera de esta región, se encuentran separados entre 3 y 5 μm.

* 33.8 REDES DE DIFRACCIÓN

Un dispositivo útil para medir la longitud de onda de la luz es la **red de difracción**, que consiste en un gran número de rayas o rendijas igualmente espaciadas y grabadas sobre una superficie plana. Una red de este tipo puede fabricarse cortando surcos paralelos, igualmente espaciados, sobre una placa de vidrio o metal con una máquina de gran presión. Cuando se trata de una red de reflexión, la luz se refleja en los salientes situados entre las rayas marcadas. Los discos de gramófono y los discos compactos presentan algunas de las propiedades de una red de reflexión. En el caso de las redes de transmisión, la luz pasa a través de los espacios transparentes que existen entre las rayas grabadas. Existen redes baratas de plástico con 10 000 o más rayas por centímetro. El espaciado de la rayas en una red con 10 000 rayas por centímetro es $d = (1\ \text{cm})/10\,000\ \text{rayas} = 10^{-4}$ cm.



Los discos compactos actúan como redes de reflexión *(Kevin R. Morris/Corbis.)*

Consideremos una onda luminosa plana que incide normalmente sobre una red de transmisión (figura 33.37) y supongamos que la anchura de cada rendija es muy pequeña, de forma que cada una de ellas produce un haz muy difractado. El diagrama de interferencia producido sobre una pantalla a gran distancia de la red es debida a un gran número de fuentes luminosas igualmente espaciadas. Supongamos que tenemos N rendijas separadas la distancia d entre dos adyacentes. Para $\theta = 0$, la luz de cada rendija está en fase con la procedente de todas las demás de modo que la amplitud de la onda es NA_0, siendo A_0 la amplitud correspondiente de cada rendija, y la intensidad es N^2I_0, siendo I_0 la correspondiente a cada rendija. Para un ángulo θ_1, tal que d sen $\theta_1 = \lambda_1$, la diferencia de camino entre dos rendijas sucesivas es λ_1, de modo que la luz procedente de cada rendija también está en fase con la de todas las demás rendijas y la intensidad es N^2I_0. Los máximos de interferencia se encuentran en ángulos θ dados por

$$d\ \text{sen}\,\theta_m = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad 33.26$$

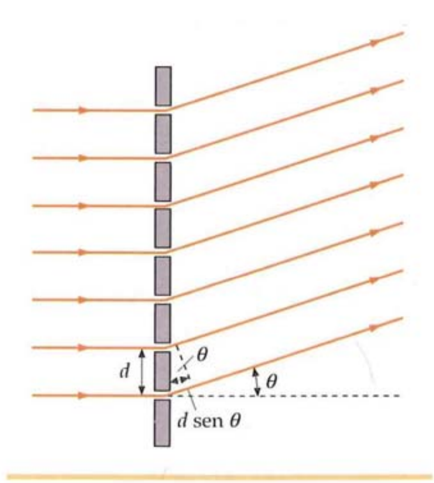


FIGURA 33.37 Luz que incide normalmente sobre una red de difracción. Para un ángulo θ, la diferencia de caminos entre rayos procedentes de rendijas adyacentes es d sen θ.

La posición de un máximo de interferencia no depende del número de fuentes, pero cuantas más fuentes existan, más nítidos e intensos serán dichos máximos.

Podemos ver que los máximos de interferencia serán más agudos cuando haya muchas ranuras, considerando el caso de N ranuras, donde N es muy grande ($N >> \lambda$). La distancia entre la primera ranura y la N-ésima es $(N - 1)d \approx Nd$. Cuando la diferencia de camino recorrido por la luz entre la primera ranura y la N-ésima es λ, la intensidad resultante es cero. (Ya se vio al estudiar la difracción con una sola rendija.) Como su separación aproximada es Nd, la intensidad será cero para el ángulo $\theta_{\text{mín}}$ dado por

$$Nd\ \text{sen}\,\theta_{\text{min}} = \lambda$$

así

$$\theta_{\text{min}} \approx \text{sen}\,\theta_{\text{min}} = \frac{\lambda}{Nd}$$

La anchura del máximo de interferencia, $2\theta_{\text{mín}}$ es, por lo tanto, inversamente proporcional a N. Así pues, cuanto mayor sea el número de rendijas N, más agudo (estrecho) es el máximo. Como la intensidad en el máximo es proporcional a N^2I_0, la intensidad de luz en el máximo multiplicada por la anchura del máximo es proporcional a NI_0. La intensidad multiplicada por la anchura es una medida de la potencia por unidad de longitud en el máximo.

En la figura 33.38*a*, puede verse un espectroscopio para prácticas de laboratorio que utiliza una red de difracción para analizar la luz procedente de una fuente, que generalmente es un tubo de vidrio que contiene átomos de gas, por ejemplo, helio o vapor de sodio. Los átomos de gas se excitan mediante el bombardeo por electrones que son acelerados por una alta tensión aplicada a través del tubo. La luz emitida por dicho tipo de fuentes contiene únicamente ciertas longitudes de onda que son características de los átomos contenidos en el tubo o foco. La luz emitida por la fuente pasa a través de una rendija estrecha de colimación y se hace paralela mediante una lente


(a)


(b)

adecuada. La luz paralela incide entonces sobre la red, pero en vez de observarse sobre una pantalla muy alejada, la luz paralela que emerge de la red se enfoca mediante un anteojo y se observa directamente. El anteojo está montado sobre una plataforma rotatoria que ha sido calibrada de modo que pueda medirse el ángulo θ. En la dirección hacia delante ($\theta = 0$), se ve el máximo central correspondiente a todas las longitudes de onda. Si la fuente emite luz de una longitud de onda particular λ, se verá el primer máximo de interferencia en el ángulo θ dado por la ecuación 33.26, siendo $m = 1$. Cada longitud de onda emitida por la fuente produce una imagen separada de la rendija de colimación del espectroscopio denominada **línea o raya espectral**. El conjunto de líneas correspondiente a $m = 1$ se denomina *espectro de primer orden*. El **espectro de segundo orden** corresponde a $m = 2$ para cada longitud de onda. Pueden verse órdenes mayores si el ángulo θ dado por la ecuación 33.26 es menor de 90°. Dependiendo de las longitudes de onda, los órdenes pueden aparecer mezclados; es decir, la línea de tercer orden correspondiente a una determinada longitud de onda puede aparecer antes que la línea de segundo orden correspondiente a otra longitud de onda. Si se conoce la separación de las rendijas de la red, pueden determinarse las longitudes de onda emitidas por la fuente mediante la medición del ángulo θ.

FIGURA 33.38 (*a*) Espectroscopio para prácticas de laboratorio. La luz procedente de la rendija colimadora cercana a la fuente se hace paralela mediante una lente e incide sobre una red. Se observa la luz difractada con un anteojo que forma un ángulo con el haz incidente que puede medirse con gran exactitud. (*b*) Vista aérea del radiotelescopio (VLA) de Nuevo México. Las señales de radio procedentes de galaxias muy alejadas se suman constructivamente cuando se satisface la ecuación 33.26, siendo d la distancia entre dos telescopios adyacentes. *((a) Clarence Bennett/Universidad de Oakland, Rochester, Michigan. (b) NRAO/AUI/Science Photo Library/ Photo Researchers.)*

Ejemplo 33.10 Líneas D del sodio

Sobre una red de difracción de 12 000 rayas por centímetro incide luz de sodio. ¿Con qué ángulos se verán las dos líneas amarillas de longitudes de onda de 589,00 nm y 589,59 nm (llamadas líneas D del sodio) correspondientes al primer orden?

PLANTEAMIENTO Aplicar $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ a cada longitud de onda, siendo $m = 1$ y $d = 1\text{ cm}/12000$.

SOLUCIÓN

1. El ángulo θ_m viene dado por $d \operatorname{sen} \theta_m = m\lambda$, siendo $m = 1$: $\quad \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{\lambda}{d}$

2. Calcular θ_1 para $\lambda = 589{,}00$ nm: $\quad \theta_1 = \operatorname{arcsen}\left[\dfrac{589{,}00 \times 10^{-9}\text{ m}}{(1/12000)\text{ cm}} \times \left(\dfrac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}\right)\right] = \boxed{44{,}98°}$

3. Repetir el cálculo para $\lambda = 589{,}59$ nm: $\quad \theta_1 = \operatorname{arcsen}\left[\dfrac{589{,}59 \times 10^{-9}\text{ m}}{(1/12000)\text{ cm}} \times \left(\dfrac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}\right)\right] = \boxed{45{,}03°}$

COMPROBACIÓN El máximo de intensidad de primer orden para mayores longitudes de onda aparece en ángulos más grandes, tal como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 33.4 Determinar los ángulos correspondientes a las dos líneas amarillas del sodio si la red posee 15 000 líneas por centímetro.

Una característica importante de un espectroscopio es su capacidad para medir la luz de dos longitudes de onda muy próximas λ_1 y λ_2. Por ejemplo, las dos líneas amarillas destacadas del espectro del sodio tienen longitudes de onda de 589,00 nm y 589,59 nm, que pueden observarse como dos longitudes de onda si no se solapan sus máximos de interferencia. Según el criterio de Rayleigh para la resolución, estas longitudes de onda se resuelven si la separación angular de sus máximos de interferencia es mayor que la separación angular entre un máximo de interferencia y el primer mínimo de interferencia que aparece a cada lado. Se define el poder de resolución de

una red de difracción como $\lambda/|\Delta\lambda|$, siendo $|\Delta\lambda|$ la diferencia más pequeña entre dos longitudes de onda próximas, cada una de ellas aproximadamente igual a λ, que pueden ser resueltas. El **poder de resolución** es proporcional al número de rendijas iluminadas porque cuantas más rendijas estén iluminadas más nítido será el máximo de interferencia. Se puede demostrar que el poder de resolución R es

$$R = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN \qquad 33.27$$

donde N es el número de rendijas y m es el número de orden (véase problema el 78.) La ecuación 33.27 nos muestra que para resolver las dos rayas amarillas del primer orden del espectro del sodio, el poder de resolución debe ser

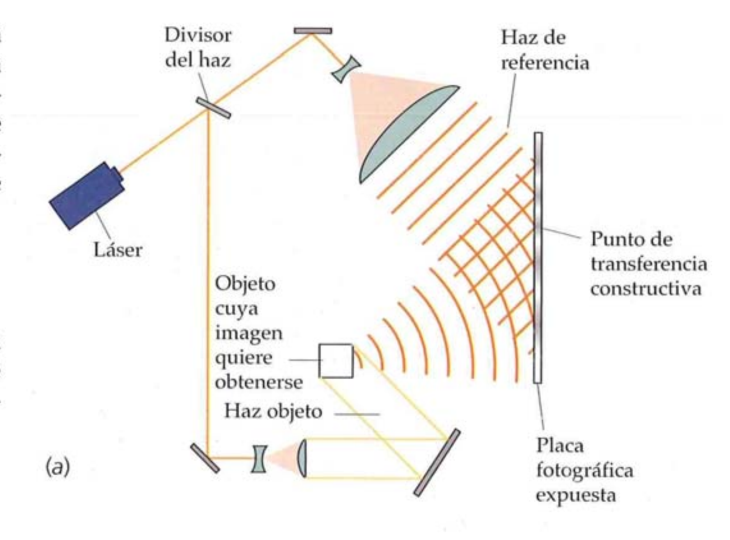
$$R = 1 \times \frac{589{,}00\text{ nm}}{589{,}59\text{ nm} - 589{,}00\text{ nm}} = 998$$

Así pues, para resolver las dos líneas amarillas del sodio en el primer orden ($m = 1$), necesitamos una red que contenga 998 o más rendijas en el área iluminada por la luz.

*HOLOGRAMAS

Una interesante aplicación de las redes de difracción consiste en la producción de una fotografía tridimensional denominada **holograma** (figura 33.39). En una fotografía ordinaria, la intensidad de la luz reflejada por un objeto se recibe y registra sobre una película. Cuando la película se mira con luz transmitida, se obtiene una imagen bidimensional. En un holograma, un haz procedente de un láser se descompone o divide en dos haces, un haz de referencia y un haz objeto. El haz objeto se refleja en el objeto a fotografiar, y el diagrama de interferencia entre él y el haz de referencia se registra sobre una película fotográfica. Esto puede hacerse porque el haz de láser es coherente, de modo que puede mantenerse constante la diferencia de fase relativa entre el haz de referencia y el haz objeto durante la exposición. Las franjas de interferencia en la película actúan como una red de difracción. Cuando la película se ilumina con un láser, se produce una réplica tridimensional del objeto.

Los hologramas utilizados en tarjetas de crédito o sellos de correos, llamados hologramas de arco iris, son más complejos. Una tira horizontal del holograma original se utiliza para hacer un segundo holograma. La imagen tridimensional puede verse cuando el observador se mueve de un lado a otro, pero si se observa con luz monocromática, la imagen desaparece cuando los ojos del observador se mueven por arriba o por abajo de la imagen de la rendija. Cuando se observa con luz blanca, la imagen se ve de diferentes colores si el observador se mueve en dirección vertical.



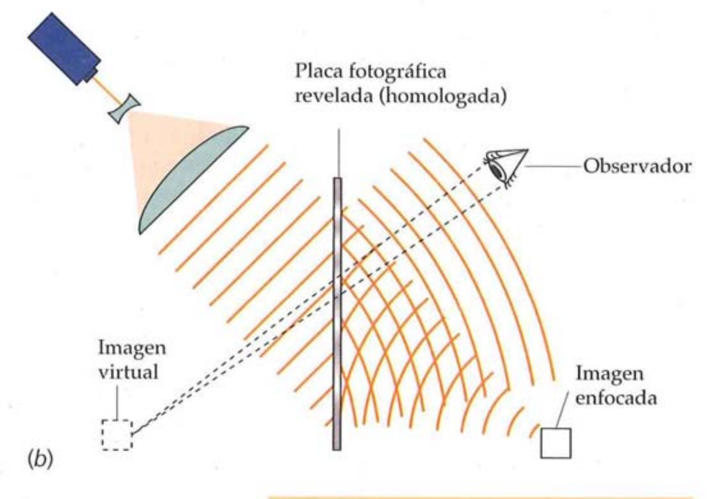
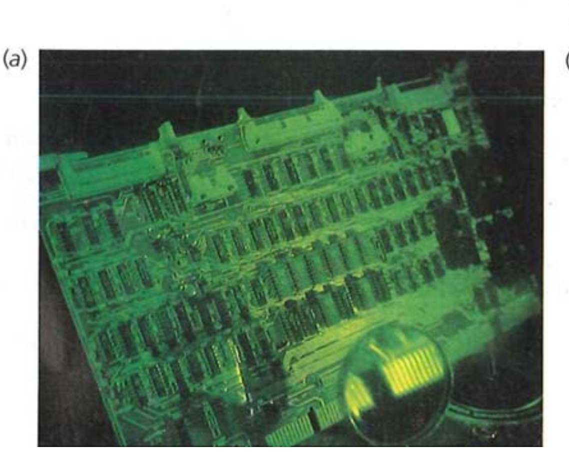
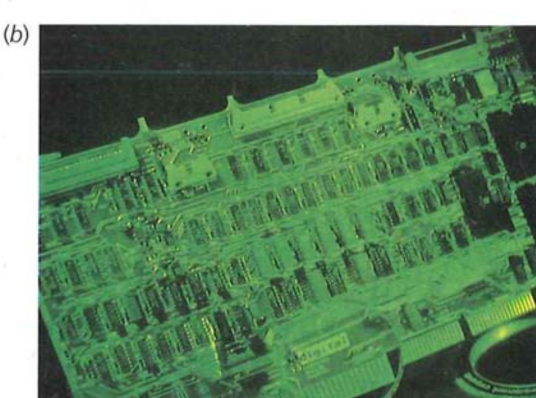


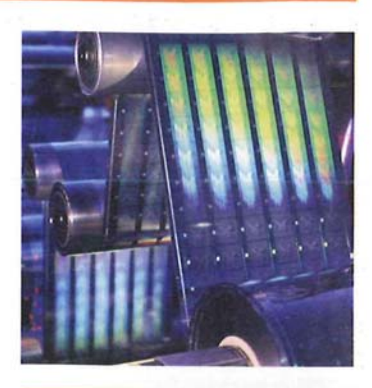
FIGURA 33.39 (*a*) Producción de un holograma. El diagrama de interferencia producido por el haz de referencia y el haz procedente del objeto se registra sobre una película fotográfica. (*b*) Cuando se revela la película y se ilumina con luz láser coherente, se ve una imagen tridimensional.

(a)


(b)


Un holograma visto desde dos ángulos distintos. Obsérvese que aparecen partes diferentes del circuito detrás de la lupa situada en primer plano. *(© 1981 by Ronald R. Erickson, Hologram by Nicklaus Phillips, 1978, for Digital Equipment Corporation.)*

Hologramas: interferencia guiada



Esta máquina se usa para grabar hologramas con tratamiento térmico en tarjetas (quizás incluso en tarjetas de crédito). Estos hologramas se imprimen tanto por seguridad como por razones estéticas. *(Pascal Goetgheluck/Photo Researchers.)*

La holografía fue inventada por Dennis Gabor en 1948 cuando trataba de mejorar la resolución de la microscopía electrónica.[1] Generó frentes de onda que producían interferencia en una placa con objeto de hacer una fotografía que contuviera información tanto de la intensidad como de la fase. A este tipo de formación de imágenes se le denominó holográficas, término que se obtiene uniendo las palabras griegas "holo" que significa totalidad y "grafo" que significa escritura. La razón que se esgrimió para dar este nombre fue que se había construido una fotografía completa al contener información de la intensidad y de la fase de la onda luminosa.[2]

La obtención de los primeros hologramas resultó extremadamente difícil debido a la insuficiente resolución que se conseguía, inferior en cualquier caso a la buscada y deseada. Se utilizaron lámparas de vapor de mercurio como fuente luminosa. La luz era altamente monocromática, pero incoherente, es decir, la fase fluctuaba aleatoriamente. Aproximadamente una década después, una vez que el primer láser había sido construido, el uso de la luz coherente láser permitió la generación de hologramas para multitud de usos.

Una técnica utilizada con frecuencia, debido a su bajo coste, consiste en grabar hologramas en películas de plástico metalizado[3] acuñados en caliente como una marca o sello que hace las veces de una copia negativa, extremadamente fina y superficial (alrededor de 0,3-0,5 micras de grosor) que produce líneas de interferencia en el holograma.[4] La película de plástico forma un duplicado de las finas líneas interferenciales en el holograma original. Cuando la luz atraviesa la película y se refleja en la parte metálica que está detrás, se reconstruye la imagen holográfica. Casi todos los hologramas grabados son policromados que pueden ser observados sin luz láser. La generación de hologramas policromados es un proceso complejo que requiere exposiciones ante la luz desde diferentes ángulos.[5]

Los hologramas impresos son muy ostensibles, fáciles de reconocer y difíciles de falsificar;[6] pueden usarse para hacer papeles timbrados, añadirse en papel normal o plástico, tarjetas de crédito, paquetes de farmacia, papel moneda, talones bancarios de viaje, aportando siempre seguridad y una forma rápida de identificación y autentificación.[7,8]

En enero de 1999, la compañía Ford utilizó hologramas digitalizados para crear un holograma de dimensiones 10 × 4 pies como anuncio publicitario de un modelo de coche. Los hologramas fueron impresos directamente utilizando los datos del diseño por ordenador.[9] Los hologramas digitalizados se utilizan actualmente para visualizar los resultados de tomografías computerizadas, las conocidas TAC, o las imágenes obtenidas por resonancia magnética.[10] La información, en forma de imagen, producto de estas técnicas, resonancia magnética y tomografía computerizada, se recoge, se procesa digitalmente y se imprime en un holograma que se puede ver con la ayuda de un visor. Los hologramas resultantes facilitan la labor para la realización de operaciones quirúrgicas,[11] y presentan aplicaciones en biomedicina e ingeniería industrial.[12] Además, la holografía digital se empieza a usar para aplicaciones de vídeos holográficos.[13]

Los hologramas pueden usarse como sustitutivos de las lentes tradicionales. Los elementos de óptica holográfica permiten construir dispositivos ópticos miniaturizados y mucho más compactos. Pantallas y sistemas de control óptico para los pilotos de los aeroplanos se construyen con elementos holográficos.[14] Un sistema extremadamente compacto que utiliza hologramas calculados digitalmente se usa para los elementos ópticos de los teléfonos móviles. [15] El uso de hologramas como elementos ópticos o de almacenaje de datos (memorias) depende de los avances obtenidos en la ciencia de materiales, ya que se requieren dispositivos ligeros de peso, fuertes y con ciertas propiedades ópticas diseñadas previamente.[16]

Últimamente, los hologramas se usan para medir potenciales electrostáticos[17] y campos magnéticos[18] en objetos extremadamente pequeños que se utilizan para construir lentes de rayos X de muy alta resolución.[19] Hace más de 50 años que se inventó la holografía y ahora se está utilizando incluso para mejorar la resolución de las imágenes obtenidas por microscopía electrónica.

1 Gabor, D., "Nobel Lecture." *Nobel Prize Lectures, 1971*, Dec. 11, 1971, at http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1971/gabor-lecture.pdf As of Nov. 2006.
2 Scanlon, L., "The Whole Picture." *Technology Review*, Dec. 2002/Jan. 2003, Vol. 105, No. 10, p. 88.
3 Ruschmann, H. W., "Apparatus for Embossing Holograms on Metallized Thermoplastic Films." *United States Patent 4,547,141*, Oct. 15, 1985.
4 Abraham, N. C., "Optical Data Storage Disc." *United States Patent 5,452,282*, Sept. 19, 1995.
5 Benton, S., Houde-Walter, W., and Mingace, Jr., H., "Methods of Making Holographic Images." *United States Patent 4,415,225.*, Nov. 15, 1983.
6 Cross, L., "Brand Security." *Graphic Arts Monthly*, Jan. 2006, Vol. 78, No. 1, pp. 32–33.
7 "MasterCard Renews Hologram Contract." *American Banker*, Mar. 3, 2003, Vol. 168, No. 44, p. 18.
8 Miller, H. I., "Fear and Pharmaceutical Failure." *The Washington Times*, Oct. 5, 2006, p. A16.
9 Mahoney, D. P., "Ford Drives Holography Development." *Computer Graphics World*, Feb. 1999, Vol. 22, No. 2, pp. 12–13.
10 Samudhram, A., "Digital Holography Opens New Frontiers." *New Straits Times (Malaysia)*, Nov. 23, 2000, p. 2W.
11 Penrod, S., "3D Imaging Assisting Surgeons in Separation Surgery." *Local News*, KSL, Salt Lake City, Aug. 7, 2006. At http://www.ksl.com/?nid=148&sid=408002 As of Dec. 2006.
12 Liu, C., Yan, C., and Gao, S., "Digital Holographic Method for Tomography Reconstruction." *Applied Physics Letters*, Feb. 9, 2004, Vol. 84, No. 6, pp. 1010–1012.
13 Freedman, D. H., "Holograms in Motion." *Technology Review*, Nov. 2002, Vol. 105, No. 9, pp. 48–55.
14 Stevens, T., "Holograms: More than Pretty Pictures." *Industry Week*, Oct. 4, 1993, Vol. 242, No. 19, pp. 34–46.
15 Buckley, E., "Miniature Projectors Based on LBO Technology." *SID Mobile Displays Conference*, San Diego: Oct. 3–5. 2006. At http://www.lightblueoptics.com/images/news/SID_Mobile_Displays_2006.pdf As of Nov. 2006.
16 Huang, G. T., "Holographic Memory." *Technology Review*, Sept. 2005, Vol. 108, No. 9, pp. 64–67.
17 Chou, L.-J., Chang, M.-T., and Chueh, Y.-L., "Electron Holography for Improved Measurement of Microfields in Nanoelectrode Assemblies." *Applied Physics Letters*, Jul. 10, 2006, Vol. 89, No. 2, Letter 023112, 3 pp.
18 Nepijko, S., and Wiesendanger, R., "Studies of Magnetic Properties of Small Particles by Electron Holography." *Applied Physics A, Materials Science and Processing*, 1997, Vol. 65, No. 4/5, pp. 361–366.
19 "Solak, H. H., David, C., and Gobrecht, J., "Fabrication of High-Resolution Zone Plates with Wideband Extreme-Ultraviolet Holography." *Applied Physics Letters*, Oct. 4, 2004, Vol. 85, No. 14, pp. 2700–2702.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Interferencia	Dos ondas de luz que se superponen interfieren si su diferencia de fase permanece constante durante un intervalo de tiempo suficientemente largo para poder ser observadas. Interfieren constructivamente si su diferencia de fase es cero o un número entero de veces 360°. Interfieren destructivamente si su diferencia de fase es 180° o un número entero impar de veces 180°.	
Diferencia de fase debida a la diferencia de camino óptico	$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$	33.1
Diferencia de fase debida a la reflexión	Se introduce una diferencia de fase de 180° cuando una onda luminosa se refleja en un límite o frontera entre dos medios si la velocidad de onda en el medio de la luz incidente es superior.	
Películas delgadas	La interferencia de rayos de luz reflejados en las superficies superior e inferior de una película delgada produce bandas o franjas coloreadas, como las que se observan con frecuencia en películas de jabón o de aceite. La diferencia de fase entre los dos rayos es el resultado de la diferencia de caminos que, en este caso, es el doble del espesor de la película más cualquier cambio de fase adicional debido a la reflexión de uno o ambos rayos.	
Dos rendijas	La diferencia de caminos ópticos para un ángulo θ sobre una pantalla alejada de dos rendijas estrechas separadas entre sí una distancia d, es d sen θ. Si la intensidad debida a cada rendija por separado es I_0, la intensidad en los puntos de interferencia constructiva es $4I_0$ y la correspondiente a la interferencia destructiva es cero.	
Máximos de interferencia (fuentes en fase)	$d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$	33.2
Mínimos de interferencia (fuentes con una diferencia de fase de 180°)	$d \operatorname{sen}\theta_m = (m - \frac{1}{2})\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$	33.3
2. Difracción	Se produce difracción siempre que una porción de un frente de onda se encuentra limitada por un obstáculo o abertura. La intensidad de la luz en un punto cualquiera del espacio puede calcularse mediante el empleo del principio de Huygens, considerando que cada punto del frente de onda es una fuente puntual y teniendo en cuenta el diagrama de interferencia resultante.	
Diagramas de Fraunhofer	Los diagramas de Fraunhofer se observan a distancias grandes del obstáculo o abertura, de modo que los rayos que llegan a un punto cualquiera son aproximadamente paralelos, o bien pueden observarse utilizando una lente para enfocar los rayos paralelos sobre una pantalla de observación situada en su plano focal.	
Diagramas de Fresnel	Los diagramas de Fresnel se observan en puntos próximos a la fuente.	
Una sola rendija	Cuando la luz está incidiendo sobre una sola rendija de anchura a, el diagrama de intensidad sobre una pantalla muy alejada muestra un máximo central de difracción ancho que disminuye a cero para un ángulo θ_1 dado por	
	$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$	33.9
	La anchura del máximo central es inversamente proporcional a la anchura de la rendija. Se presentan otros ceros en el diagrama de difracción de una sola rendija en ángulos dados por	
	$a \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$	33.11
	A cada lado del máximo central existen máximos secundarios de mucha menos intensidad.	
Dos rendijas	El diagrama de interferencia-difracción de dos rendijas es el diagrama de interferencia modulado por el diagrama de difracción de una sola rendija.	
Resolución de dos fuentes	Cuando la luz procedente de dos fuentes o focos que están muy próximos pasa a través de una abertura, los diagramas de difracción de ambas fuentes pueden solaparse. Si el solapamiento es demasiado grande, no pueden resolverse las dos fuentes como dos fuentes separadas. Cuando el máximo central de difracción de una fuente coincide con el mínimo de difracción de la otra, se dice que las dos fuentes están en el límite de resolución según el criterio de Rayleigh. En el caso de una abertura circular de diámetro D, la separación angular crítica de dos fuentes mediante el criterio para la resolución de Rayleigh es	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Criterio de Rayleigh	$\alpha_c = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$	33.25
*Redes	Una red de difracción está formada por un gran número de rayas o rendijas muy juntas, y se utiliza para medir la longitud de onda de la luz emitida por una fuente. Las posiciones de los máximos de interferencia de una red vienen dadas por $d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$ (33.26) donde m es el número de orden. El poder de resolución de una red es $R = \frac{\lambda}{\lvert\Delta\lambda\rvert} = mN$ (33.27) siendo N el número de rendijas de la red que resultan iluminadas.	33.26, 33.27
3. *Fasores	Dos o más ondas armónicas pueden sumarse representando cada onda por un vector bidimensional llamado fasor. La diferencia de fase entre las ondas se representa por el ángulo que forman entre sí los fasores.	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

33.1 6

33.2 Verdadero. La difracción de Fresnel describe la figuras de difracción para cualquier distancia de la fuente a la pantalla, y la de Fraunhofer, para distancias considerables, es decir, cuando la fuente de luz se encuentra muy alejada de la pantalla.

Respuestas a los problemas prácticos

33.1 9,2 cm^{-1}

33.2 4,4 mm

33.3 $A = 5{,}0$ V/m, $\delta = 37°$

33.4 62,07° y 62,18°

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*
- Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Para que exista en una onda luminosa una diferencia de fase, se requiere un mínimo de diferencia de camino óptico. ¿Cuál es este mínimo? (*a*) 90°. (*b*) 180°. (*c*) 270°. (*d*) El resultado depende de la longitud de onda de la luz.

2 • ¿Cuáles de las siguientes parejas de fuentes luminosas son coherentes? (*a*) Dos candelas. (*b*) Una fuente de luz y su imagen reflejada en un espejo plano. (*c*) Dos pequeños orificios iluminados por la misma fuente de luz. (*d*) Dos faros de coche. (*e*) Dos imágenes de una fuente puntual producida por reflexión de las dos superficies, delantera y trasera, de una de una película jabonosa.

3 • En el experimento de los anillos de Newton, la separación entre circunferencias interferenciales decrece rápidamente según van creciendo sus diámetros. Explique por qué ocurre este fenómeno. SSM

4 • Si el ángulo de una película de aire en forma de cuña tal como el ángulo del ejemplo 33.2 es demasiado grande, las franjas interferenciales no se observan. ¿Por qué?

5 • ¿Por qué para observar colores en un diagrama de interferencia la película donde se forman ha de ser delgada?

6 • Un aro de alambre se introduce en agua jabonosa y se saca de modo que la película jabonosa esté vertical. (*a*) Cuando se observa por reflexión con luz blanca, la parte superior de la película aparece negra. Explicar la razón. (*b*) Debajo de la región negra existen bandas coloreadas. ¿La primera de ellas es roja o violeta?

7 • Se genera una figura interferencial de dos rendijas utilizando luz láser monocromática de longitud de onda de 640 nm. ¿Cuál es la diferencia de camino óptico procedente de cada una de las rendijas, en el segundo máximo de luz a partir del central? (*a*) 640 nm. (*b*) 320 nm. (*c*) 960 nm. (*d*) 1280 nm. SSM

8 • En el esquema interferencial de dos rendijas formado con luz de 640 nm, ¿cuál es la diferencia de fase en el primer mínimo a partir del máximo central debida a la luz procedente de cada una de las rendijas? (*a*) 640 nm. (*b*) 320 nm. (*c*) 960 nm. (*d*) 1280 nm.

9 • Formamos una figura interferencial con dos rendijas iluminadas con luz cuya longitud de onda es de 450 nm. ¿Cómo varía la distancia entre el primer máximo y el central cuando las dos rendijas se van acercando entre sí? (*a*) La distancia crece. (*b*) Decrece. (*c*) Permanece igual.

10 • En el diagrama de interferencia de dos rendijas formadas por dos ondas monocromáticas, una verde y otra roja, ¿cuál de estas frecuencias tiene su primer máximo más cercano de su máximo central? (*a*) Verde. (*b*) Roja, (*c*) Ambas frecuencias presentan distancias iguales entre los citados máximos.

11 • En el esquema de difracción con una rendija formada con luz de longitud de onda de 450 nm, ¿cómo se modifica la distancia entre el primer máximo y el máximo central cuando la rendija disminuye de tamaño? (*a*) La distancia crece. (*b*) Decrece. (*c*) Permanece igual.

12 • Las ecuaciones 33.2, $d \text{ sen } \theta_m = m\lambda$, y 33.11, $a \text{ sen } \theta_m = m\lambda$, son fáciles de confundir. Definir para cada ecuación los símbolos que intervienen y razonar sus aplicaciones.

13 • Cuando una red de difracción se ilumina con luz blanca, el máximo de luz verde de primer orden (*a*) está más próximo al máximo central que el de la luz roja, (*b*) está más próximo al máximo central que el de la luz azul, (*c*) solapa el máximo de luz roja de segundo orden, (*d*) solapa el máximo de luz azul de segundo orden.

14 • En una cámara donde puede hacerse el vacío, se monta un experimento de interferencias de doble rendija. Utilizando luz monocromática, se observa un determinado diagrama de interferencia cuando la cámara está en contacto con el aire. Al hacer el vacío, se observa que (*a*) las franjas de interferencia permanecen fijas, (*b*) las franjas de interferencia se aproximan entre sí, (*c*) las franjas de interferencia se separan alejándose, (*d*) las franjas de interferencia desaparecen completamente.

15 • Verdadero o falso:

(*a*) Cuando ocurre interferencia destructiva entre dos ondas, la energía se convierte en energía térmica.
(*b*) Sólo se observa interferencia en ondas procedentes de fuentes coherentes.
(*c*) En el diagrama de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola rendija, cuando más estrecha es ésta, más ancho es el máximo central del diagrama de difracción.
(*d*) Una abertura circular puede producir un diagrama de difracción de Fraunhofer y una de Fresnel.
(*e*) La capacidad de resolver dos fuentes puntuales depende de la longitud de onda de la luz. SSM

16 • Se observan dos fuentes de luz blanca muy próximas entre sí a través de un orificio circular y utilizando filtros. ¿Qué filtro es más apropiado para impedir la resolución de la imagen en la retina cuando la luz procede de dos distintas fuentes? (*a*) Rojo. (*b*) Amarillo. (*c*) Verde. (*d*) Azul. (*e*) La elección del filtro es irrelevante.

17 •• Explicar por qué la capacidad del ojo humano para distinguir la luz de los faros de un coche que se acerca es superior por la noche que con la luz del día. Considerar que los faros de ese coche están encendidos tanto de noche como de día.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 • Se dice que la gran Muralla China es la única obra humana que se puede ver desde el espacio a simple vista. Argumentar esta afirmación apoyándose en el poder de resolución del ojo humano. Evaluar la validez del argumento para observadores localizados tanto en una órbita cercana a la Tierra, a unos 400 km, como en la Luna.

19 •• (*a*) Hacer una estimación de cuánto se tiene que aproximar un coche a un observador en una recta de una autopista para que pueda distinguir por la noche la pareja de faros del coche del único faro de una motocicleta. (*b*) Hacer una estimación de la distancia en línea recta a la que es preciso estar, para que la estela luminosa de dos luces rojas de un coche se vean como una sola. SSM

20 •• Se pone un pequeño altavoz a gran distancia de un observador y situado al este. Se conecta al altavoz una señal sinusoidal de frecuencia variable. Estimar la frecuencia más baja a la que sus oídos reciben las ondas de sonido fuera de fase cuando el observador está mirando hacia el norte.

21 •• Hacer una estimación de la distancia máxima a la que un sistema de estrella doble puede ser vista como tal por el ojo humano. Asumir que las dos estrellas están a una distancia 50 veces mayor que la existente entre la Tierra y el Sol, y despreciar los fenómenos atmosféricos. (Una prueba de agudeza visual, similar a ésta, es la que se proponía en la antigua Roma para entrar en el ejercito. Una persona con visión normal puede distinguir con dificultad dos estrellas, aun siendo conocidas, cuando aparecen juntas en el firmamento. Quien no dijera que había dos estrellas fallaría la prueba.) SSM

DIFERENCIA DE FASE Y COHERENCIA

22 • Se hace incidir normalmente luz de 500 nm de longitud de onda sobre una película de agua de 10^{-4} cm de espesor. El índice de refracción del agua es 1,33. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el agua? (*b*) ¿Cuántas longitudes de onda están contenidas en la distancia $2t$, siendo t el espesor de la película? (*c*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre la onda reflejada en la parte superior de la película y la reflejada en la interfase del fondo agua-aire después de que ha recorrido esta distancia?

23 •• Dos fuentes coherentes de microondas que producen ondas de 1,5 cm de longitud de onda están en el plano xy; una fuente en el eje y en $y = 15$ cm y la otra en $x = 3$ cm, $y = 14$ cm. Si las fuentes están en fase, hallar la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al origen de coordenadas. SSM

INTERFERENCIAS EN PELÍCULAS DELGADAS

24 • Se prepara una película de aire en forma de cuña colocando un trocito de papel entre los bordes de dos láminas de vidrio planas. Una luz de 700 nm de longitud de onda incide normalmente sobre las láminas de vidrio y se observan bandas de interferencia por reflexión. (*a*) La primera banda próxima al punto de contacto de las láminas, ¿es oscura o brillante? ¿Por qué? (*b*) Existen cinco bandas oscuras por centímetro. ¿Cuál es el ángulo de la cuña?

25 •• El diámetro de hilos finos se puede medir con precisión mediante diagramas de interferencia. Dos láminas de vidrio de longitud L ópticamente planas se disponen junto con el hilo en la forma indicada en la figura 33.40. Este montaje se ilumina con luz monocromática y se detectan las franjas de interferencia resultantes. Supóngase que $L = 20$ cm y que se utiliza luz amarilla de sodio para su iluminación ($\lambda \approx 590$ nm). Si se ven 19 franjas brillantes a lo largo de la distancia de 20 cm, ¿cuáles son los límites del diámetro del hilo? *Sugerencia: la franja 19 podría no estar justo en el extremo, pero no se ven 20 franjas.* SSM

26 •• Se utiliza luz de 600 nm de longitud de onda para iluminar con incidencia normal dos placas de vidrio de 22 cm de longitud que están en contacto por un extremo y separadas por el otro mediante un hilo de 0,025 mm de diámetro. ¿Cuántas franjas aparecerán a lo largo de la longitud total de las placas?

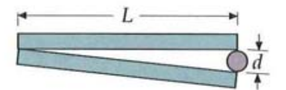


FIGURA 33.40 Problema 25

27 •• Una película delgada de índice de refracción 1,5 está rodeada por aire. Se ilumina con luz blanca que incide normalmente y se observa por reflexión. El análisis de la luz reflejada resultante muestra que las únicas longitudes de onda que se han perdido cerca de la parte visible del espectro son las de 360, 450 y 602 nm. Es decir, en el caso de estas longitudes de onda existe interferencia destructiva. (*a*) ¿Cuál es el espesor de la película? (*b*) ¿Qué longitudes de onda visible serán las más brillantes en el diagrama de interferencia reflejado? (*c*) Si esta película está depositada sobre vidrio cuyo índice de refracción es 1,6, ¿qué longitudes de onda del espectro visible se perderán en la luz reflejada?

28 •• Una gota de aceite ($n = 1{,}22$) flota sobre agua ($n = 1{,}33$). Cuando se observa luz reflejada desde arriba, del modo indicado en la figura 33.41, ¿cuál es el espesor de la gota en el punto en donde se ob-

serva la segunda franja roja, contando desde el borde de la gota? Suponer que dicha luz tiene una longitud de onda de 650 nm.

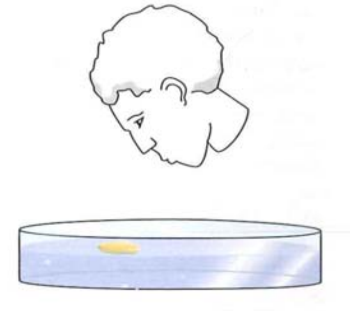


FIGURA 33.41 Problema 28

29 •• Una película de aceite de índice de refracción $n = 1{,}45$ reposa sobre una pieza de vidrio ópticamente plana de índice de refracción $n = 1{,}6$. Cuando se ilumina con luz blanca de incidencia normal, predominan en la luz reflejada las longitudes de onda de 690 y 460 nm. Hallar el espesor de la película de aceite. SSM

30 •• Una película de aceite de índice de refracción $n = 1{,}45$ flota sobre agua ($n = 1{,}33$). Iluminada con luz blanca de incidencia normal, predominan en la luz reflejada las longitudes de onda de 700 y 500 nm. Determinar el espesor de la película de aceite.

ANILLOS DE NEWTON

31 •• Un aparato de anillos de Newton se compone de una lente de vidrio plano-convexa de radio de curvatura R que descansa sobre una lámina de vidrio plana, como se ve en la figura 33.42. La película delgada que hay entre ambas es aire de espesor variable. El diagrama se observa por luz reflejada. (*a*) Demostrar que en el caso de un espesor t la condición para un anillo brillante de interferencia (constructiva) es $2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ (*b*) Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de lados r, $R - t$, e hipotenusa R, demostrar que para $t \ll R$, el radio de una franja depende de t según la expresión $r = \sqrt{2tR}$. (*c*) Utilizar $R = 10$ m y un diámetro de 4 cm para la lente. ¿Cuántas franjas brillantes se verán si el aparato se ilumina con luz amarilla de sodio ($\lambda \approx 590$ nm) y se observa por reflexión? (*d*) ¿Cuál será el diámetro de la sexta franja brillante? (*e*) Si el vidrio utilizado en el aparato tiene un índice de refracción $n = 1{,}5$ y se coloca agua ($n_a = 1{,}33$) entre los dos trozos de vidrio, ¿qué variaciones tendrán lugar en las franjas brillantes? SSM

32 •• Una lente plano-convexa de radio de curvatura 2,0 m descansa sobre una placa de vidrio ópticamente plana. El sistema se ilumina por arriba con luz monocromática de 520 nm de longitud de onda. Los índices de refracción de la lente y la placa son 1,6. Determinar los radios de la primera y segunda franja brillante de la luz reflejada.

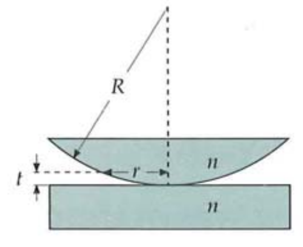


FIGURA 33.42 Problema 31

33 ••• Suponer que antes de colocar la lente del problema 32 sobre la placa, se deposita sobre ésta una película de aceite de índice de refracción 1,82. ¿Cuáles serán entonces los radios de la primera y segunda franja brillante de la luz reflejada?

DIAGRAMAS DE INTERFERENCIA DE DOS RENDIJAS

34 • Dos rendijas estrechas separadas entre sí 1 mm se iluminan con luz de 600 nm de longitud de onda y se observa el diagrama de interferencia en una pantalla situada a 2 m. Calcular el número de franjas brillantes por centímetro que se verán en la pantalla.

35 • Utilizando un aparato convencional de dos rendijas con luz de 589 nm de longitud de onda, se observan, sobre una pantalla a 3 m, 28 franjas brillantes por centímetro. ¿Cuál es la separación entre las rendijas? SSM

36 • Se hace incidir normalmente luz de 633 nm de longitud de onda procedente de un láser de helio-neón sobre un plano que contiene dos rendijas. El primer máximo de interferencia se encuentra a 82 cm del máximo central cuando se observa en una pantalla situada a 12 m. (*a*) Calcular la separación de las rendijas. (*b*) ¿Cuántos máximos de interferencia es posible observar?

37 •• Dos rendijas estrechas están separadas una distancia d. Su diagrama de interferencia ha de observarse sobre una pantalla a gran distancia L. (*a*) Calcular el espaciado Δy de los máximos sobre la pantalla para luz de 500 nm de longitud de onda cuando $L = 1$ m y $d = 1$ cm. (*b*) ¿Es de esperar que se observe en la pantalla la interferencia de la luz en este caso? (*c*) ¿A qué distancia deberán situarse las rendijas para que los máximos se encuentren separados 1 mm para esta longitud de onda y esta distancia de la pantalla?

38 •• Sobre un plano vertical que contiene dos rendijas de separación d (figura 33.43) incide luz con un ángulo ϕ respecto a la normal. Demostrar que los máximos de interferencia están situados en los ángulos θ_m dados por $\operatorname{sen}\theta_m + \operatorname{sen}\phi = m\lambda/d$.

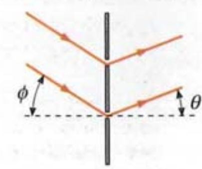


FIGURA 33.43 Problemas 38 y 39

39 •• Se hace incidir luz blanca con un ángulo de 30° respecto a la normal sobre un plano que contiene un par de rendijas que están separadas 2,5 μm. ¿Qué longitudes de onda de luz visible dan un máximo de interferencia brillante en la luz transmitida en la dirección normal al plano? (Véase el problema 38.) SSM

40 •• Dos pequeños altavoces están separados por una distancia de 5 cm, como muestra la figura 33.44. Los altavoces se ponen en fase con una señal sinusoidal de frecuencia 10 KHz. Se sitúa un pequeño micrófono a una distancia de 1 m, alejado de los dos altavoces en el eje de simetría del sistema, como se indica en la figura, pudiéndose mover este micrófono perpendicularmente al citado eje. ¿Dónde recogerá el micrófono el primer mínimo y el primer máximo debido a la interferencia entre los dos altavoces? La velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.

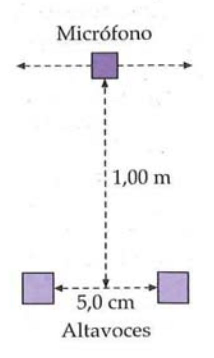


FIGURA 33.44 Problema 40

DIAGRAMA DE DIFRACCIÓN DE UNA SOLA RENDIJA

41 • Se hace incidir luz de 600 nm sobre una rendija larga y estrecha. Calcular el ángulo del primer mínimo de difracción si la anchura de la rendija es (*a*) 1 mm, (*b*) 0,1 mm, y (*c*) 0,01 mm.

42 • Se hacen incidir normalmente microondas planas sobre una rendija metálica larga y estrecha de 5 cm de anchura. El primer mínimo de difracción se observa a $\theta = 37°$. ¿Cuál es la longitud de onda de las microondas?

43 ••• Para medir la distancia a la Luna es frecuente utilizar pulsos cortos de láser. Esto se hace midiendo el tiempo que tarda en llegarnos el pulso reflejado por la Luna. Se envía un pulso desde la Tierra, el cual se expande de forma que llena la abertura de 6 pulgadas del diámetro del telescopio. Considerando que lo único que dispersa el haz es la difracción, ¿cuál deberá ser la dimensión del haz cuando llegue a la Luna, cuya distancia a la Tierra es de 382 000 km? SSM

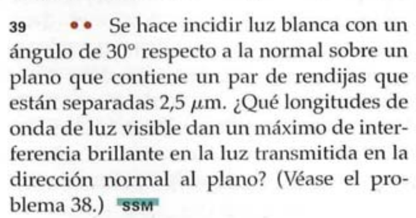


DIAGRAMA DE INTERFERENCIA-DIFRACCIÓN DE DOS RENDIJAS

44 • ¿Cuántos máximos de interferencia estarán contenidos en el máximo central de difracción en el diagrama de difracción-interferencia de dos rendijas, si la separación d de las dos rendijas es 5 veces su anchura a? ¿Cuántos habría si $d = na$ para cualquier valor de n?

45 •• Se observa un diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer producido por dos rendijas con una luz de longitud de onda 500 nm. Las rendijas tienen una separación de 0,1 mm y una anchura a. (*a*) Determinar la anchura a si el quinto máximo de interferencia está en el mismo ángulo que el primer mínimo de difracción. (*b*) En este caso, ¿cuántas franjas brillantes se verán en el máximo central de difracción? SSM

46 •• Se observa un diagrama de interferencia-difracción de Fraunhofer producido por dos rendijas con luz de 700 nm de longitud de onda. Las rendijas tienen una anchura de 0,01 mm y están separadas por 0,2 mm. ¿Cuántas franjas brillantes se verán en el máximo de difracción central?

47 •• Supóngase que el máximo central de difracción correspondiente a dos rendijas contiene 17 franjas de interferencia para cierta longitud de onda de la luz. ¿Cuántas franjas de interferencia existirán en el primer máximo secundario de difracción?

48 •• Luz de 550 nm de longitud de onda ilumina dos rendijas de anchura 0,03 mm y separación 0,15 mm. (*a*) ¿Cuántos máximos de interferencia caen dentro de la anchura total del máximo central de difracción? (*b*) ¿Cuál es el cociente entre la intensidad del tercer máximo de interferencia a un lado de la línea central (sin contar el máximo central de interferencia) y la intensidad del máximo de interferencia central?

*SUMA DE ONDAS ARMÓNICAS UTILIZANDO FASORES

49 • Hallar la resultante de las dos ondas $\vec{E}_1 = 2{,}0A_0 \operatorname{sen}\omega t\,\hat{i}$ y $\vec{E}_2 = 3{,}0A_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right)\hat{i}$. SSM

50 • Hallar la resultante de las dos ondas $\vec{E}_1 = 4{,}0A_0 \operatorname{sen}\omega t\,\hat{i}$ y $\vec{E}_2 = 3{,}0A_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{1}{6}\pi\right)\hat{i}$.

51 •• Se hace incidir luz monocromática en una lámina con una rendija estrecha y larga, tal como indica la figura 33.45. Sea I_0 la intensidad del máximo central del diagrama de difracción que aparece en la pantalla, y sea I el segundo máximo secundario. La distancia desde este máximo al borde más alejado de la rendija es 2,5 longitudes de onda mayor que la distancia entre este máximo secundario y el extremo más cercano de la rendija. ¿Cuál será la relación entre la intensidad del máximo central y la intensidad del segundo secundario?

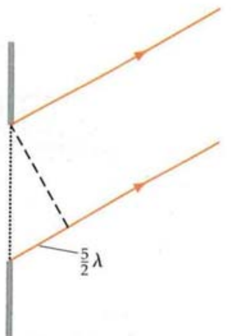


FIGURA 33.45 Problema 51

52 •• Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla situada a una distancia grande L de tres fuentes igualmente espaciadas (separación d, siendo $d \gg \lambda$) vienen dadas, aproximadamente, por $y_m = m\lambda L/3d$, donde $m = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots$, es decir, n no es múltiplo de 3. (*b*) Para $L = 1$ m, $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m y $d = 0{,}1$ mm, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (distancia entre mínimos sucesivos) para las tres fuentes.

53 •• Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla situada a una distancia grande L de cuatro fuentes igualmente espaciadas (espaciado $d \gg \lambda$) vienen dadas, aproximadamente, por $y_m = m\lambda L/4d$, donde $m = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, \ldots$, es decir, m no es múltiplo de 4. (*b*) Para $L = 2$ m, $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m y $d = 0{,}1$ mm, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (distancia entre mínimos sucesivos) para las cuatro fuentes. Comparar esta anchura con la de dos fuentes con el mismo espaciado. SSM

54 •• Se hace incidir luz de 480 nm de longitud de onda sobre cuatro rendijas, cada una de ellas de 2 μm de anchura y separada de la siguiente por 6 μm. (*a*) Determinar el ángulo desde el centro hasta el primer punto de intensidad cero del diagrama de difracción de una sola rendija visto sobre una pantalla lejana. (*b*) Calcular los ángulos de cualquier máximo de interferencia brillante que se encuentre en el interior del máximo de difracción central. (*c*) Hallar la dispersión angular entre el máximo de interferencia central y el primer mínimo de interferencia en ambos lados de éste. (*d*) Representar la intensidad en función del ángulo.

55 ••• Tres rendijas, cada una de ellas separada de sus vecinas en 0,06 mm, se iluminan mediante una fuente de luz coherente de 550 nm de longitud de onda. Las rendijas son extremadamente estrechas. Se sitúa una pantalla a 2,5 m de las rendijas. La intensidad de la línea central es 0,05 W/m^2. Consideremos un lugar a 1,72 cm de la línea central. (*a*) Dibujar el diagrama de fasores adecuado para sumar las tres ondas armónicas en este lugar. (*b*) A partir del diagrama de fasores, calcular la intensidad luminosa en dicha posición. SSM

56 ••• En la difracción de Fraunhofer con una rendija, el diagrama de intensidades de la figura 33.11 está formado por un máximo central ancho y una secuencia de máximos secundarios a cada lado de aquel. La relación de intensidades entre los diferentes máximos viene dada por $I = I_0\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right)^2$, donde ϕ es la diferencia de fase entre las ondas parciales que llegan desde los bordes opuestos de la rendija. Calcular el valor de ϕ para los tres primeros máximos secundarios, determinando, a su vez, el ángulo para el que $dI/d\phi$ es igual a cero. Compruebe sus resultados comparando sus respuestas con valores aproximados para ϕ de 3π, 5π, y 7π. (En las explicaciones que se dan acerca de la figura 33.27, se analiza por qué estos valores de ϕ correspondientes a estos máximos secundarios son, aproximadamente, correctos.)

DIFRACCIÓN Y RESOLUCIÓN

57 • Sobre un orificio de diámetro 0,1 mm incide luz de 700 nm de longitud de onda. (*a*) ¿Cuál es el ángulo que hay entre el máximo central y el primer mínimo de difracción correspondiente a una difracción de Fraunhofer? (*b*) ¿Cuál es la distancia entre el máximo central y el primer mínimo de difracción en una pantalla situada a 8 m? SSM

58 • Dos fuentes de longitud de onda 700 nm están a 10 m del orificio del problema 57. ¿A qué distancia deben estar entre sí las fuentes para que sus diagramas de difracción sean resueltos por el criterio de Rayleigh?

59 • Dos fuentes de 700 nm de longitud de onda separadas por una distancia horizontal x, están a 5 m de una rendija vertical de 0,5 mm de anchura. ¿Cuál es el menor valor de x que permite que el diagrama de difracción de las fuentes sea resuelto mediante el criterio de Rayleigh?

60 •• Normalmente, el techo de las bibliotecas se recubre de un tipo de aislante acústico que posee pequeños orificios separados por una distancia de aproximadamente 6 mm. (*a*) Utilizando luz con longitud de onda de 500 nm, ¿a qué distancia debería encontrarse una persona para poder distinguir estos orificios? El diámetro de la pupila del ojo del observador es de aproximadamente 5 mm. (*b*) ¿Podrían verse mejor estos orificios si se utilizara luz roja o luz violeta?

61 •• El telescopio del Monte Palomar posee un diámetro aproximado de 5 m (200 pulgadas). Supóngase una estrella doble situada a 4 años-luz. En condiciones ideales, ¿cuál debe ser la separación mínima de las dos estrellas del sistema para que sus imágenes puedan ser resueltas utilizando luz de longitud de onda 550 nm? SSM

62 •• La estrella Mizar de la Osa Mayor es un sistema binario formado por dos estrellas de magnitudes iguales. La separación angular entre las dos estrellas es de 14 segundos de arco. ¿Cuál es el diámetro mínimo de la pupila que permite distinguir las dos estrellas utilizando luz de longitud de onda 550 nm?

*REDES DE DIFRACCIÓN

63 • Una red de difracción con 2000 rendijas por centímetro se utiliza para medir las longitudes de onda emitidas por el gas hidrógeno. ¿Para qué ángulos θ, en el espectro de primer orden, encontraremos las dos líneas violetas de 434 nm y 410 nm de longitud de onda? SSM

64 • Con la red utilizada en el problema 63 se encuentran otras dos líneas del espectro de hidrógeno de primer orden en los ángulos $\theta_1 = 9{,}72 \times 10^{-2}$ rad y $\theta_2 = 1{,}32 \times 10^{-1}$ rad. Hallar las longitudes de onda de estas líneas.

65 • Los colores de las alas de algunas mariposas y de los caparazones de algunos coleópteros se deben a los efectos de la difracción. La mariposa *Morpho* tiene elementos estructurales en sus alas que efectivamente actúan como redes de difracción, con rendijas cuyo espacio de separación entre dos contiguas es de 880 nm. ¿Cuál debe ser el ángulo θ_1 con el que deberá incidir luz azul de $\lambda = 440$ nm para que se difracte por las alas de esta mariposa *Morpho*?

66 •• Una red de 2000 rendijas por centímetro se utiliza para analizar el espectro del mercurio. (*a*) Hallar la desviación angular de primer orden de las dos líneas de 579,0 nm y 577,0 nm de longitud de onda. (*b*) ¿Cuál deberá ser la anchura del haz en la red para que puedan resolverse estas líneas?

67 •• Una red de difracción que posee 4800 líneas por centímetro se ilumina con incidencia normal mediante luz blanca (longitudes de onda en el intervalo de 400 nm a 700 nm). ¿En cuántos órdenes puede observarse el espectro completo de la luz transmitida? ¿Se solapan algunos de estos órdenes? En caso afirmativo, describir las regiones de solapamiento. SSM

68 •• Una red de difracción cuadrada con un área de 25 cm² tiene una resolución de 22 000 en el cuarto orden. ¿Con qué ángulo debería realizarse una observación para ver una longitud de onda de 510 nm en el cuarto orden?

69 •• Se hace incidir en dirección normal luz de sodio de 589 nm de longitud de onda sobre una red de difracción de 2 cm² con 4000 líneas por centímetro. Se proyecta el diagrama de difracción de Fraunhofer sobre una pantalla situada a 1,5 m mediante una lente de 1,5 m de distancia focal situada justo enfrente de la red. Calcular (*a*) las posiciones de los dos primeros máximos de intensidad en uno de los lados del máximo central, (*b*) la anchura del máximo central, y (*c*) la resolución en el primer orden.

70 •• El espectro del neón es excepcionalmente rico en la región visible. Entre las múltiples líneas hay dos que corresponden a las longitudes de onda 519,313 y 519,322 nm. Si la luz procedente de una descarga de un tubo de neón incide normalmente sobre una red de transmisión de 8400 líneas por centímetro y se observa el espectro en el segundo orden, ¿cuál debe ser la anchura de la red iluminada para que puedan resolverse estas dos líneas?

71 •• El mercurio tiene varios isótopos estables, entre ellos ^{198}Hg y ^{202}Hg. La línea espectral intensa del mercurio de unos 546,07 nm está formada por varias líneas espectrales que corresponden a diversos isótopos del mercurio. Las longitudes de onda de esta línea para el ^{198}Hg y ^{202}Hg son 546,07532 y 546,07355 nm, respectivamente. ¿Cuál debe ser el poder de resolución de una red capaz de resolver estas dos líneas isotópicas en el espectro de tercer orden? Si la red se ilumina en una región de 2 cm de anchura, ¿cuál debe ser el número de líneas por centímetro de red? SSM

72 ••• Una red de difracción posee n líneas por metro. Demostrar que la separación angular de dos líneas de longitudes de onda λ y $\lambda + \Delta\lambda$ metros es, aproximadamente, $\Delta\theta = \Delta\lambda/\sqrt{\dfrac{1}{n^2m^2} - \lambda^2}$, donde m es el número del orden.

73 ••• En el caso de una red de difracción en la que todas las superficies son normales a la radiación incidente, la mayoría de la energía se consume en el orden cero, que resulta inútil desde el punto de vista espectroscópico, puesto que en este orden las diversas longitudes de onda corresponden al ángulo 0°. Por consiguiente, las redes modernas tienen los surcos con forma especial, como se ve en la figura 33.46. Estos surcos así conformados desplazan la reflexión especular, que contiene la mayor parte de la energía, del orden cero a otro orden superior. (*a*) Calcular el ángulo de inclinación ϕ_m en función de d (separación entre surcos), de λ (la longitud de onda) y de m (el orden en el que ha de producirse la reflexión especular, $m = 1, 2, \ldots$). (*b*) Calcular el ángulo de inclinación adecuado para que la reflexión especular se produzca en el segundo orden para luz de longitud de onda de 450 nm que incida sobre una red con 10 000 líneas por centímetro. SSM

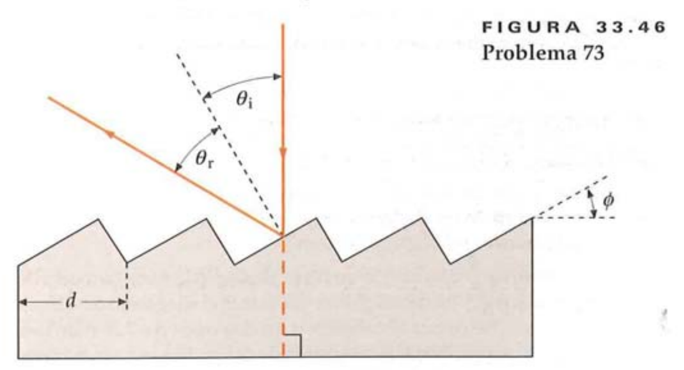


FIGURA 33.46
Problema 73

74 ••• En este problema, vamos a deducir la ecuación 33.27, que da el poder de resolución de una red de difracción que contiene N rendijas separadas entre sí una distancia d. Para ello, calculamos la separación angular entre el máximo y el mínimo para una cierta longitud de onda λ, y luego igualamos con la separación angular del máximo de orden m-ésimo correspondiente a dos longitudes de onda próximas. (*a*) Demostrar que la diferencia de fase ϕ entre la luz procedente de dos rendijas adyacentes viene dada por $\phi = \dfrac{2\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$. (*b*) Derivar esta expresión para demostrar que una pequeña variación en el ángulo $d\theta$ da como resultado un cambio de fase $d\phi$ dado por $d\phi = \dfrac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta\, d\theta$. (*c*) En el caso de N rendijas, la separación angular entre un máximo de interferencia y un mínimo de interferencia corresponde a un cambio de fase de $d\phi = 2p/N$. Utilizar este hecho para demostrar que la separación angular $d\theta$ entre el máximo y el mínimo para una cierta longitud de onda λ viene dada por $d\theta = \dfrac{\lambda}{Nd\cos\theta}$. (*d*) El ángulo del máximo de interferencia de orden m-ésimo para la longitud de onda λ viene dado por la ecuación 33.26. Calcular el diferencial de cada miembro de esta ecuación para demostrar que la separación angular del máximo de

orden m-ésimo para dos longitudes de onda muy cercanas que difieren en $d\lambda$ viene dada por $d\theta = \frac{m\, d\lambda}{d \cos\theta}$. (*e*) De acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos longitudes de onda se resolverán en el orden m-ésimo si su separación angular, dada por el apartado (*d*), es igual a la separación angular del máximo y el mínimo de interferencia dados por el apartado (*c*). Basándose en lo anterior, deducir la ecuación 33.27 que nos da el poder de resolución de una red.

PROBLEMAS GENERALES

75 • A veces se forman anillos tanto en la Luna como en el Sol que son brillantes y de diferentes colores. (Es preciso tener cuidado y protegerse los ojos de esta radiación y no mirar directamente.) Estos anillos se deben a la difracción de la luz en pequeñas gotas de agua ubicadas en las nubes. La amplitud angular típica con la que se observan estos anillos es de unos 10°. Considerando estos datos, realizar una estimación de la dimensión de las gotas de agua en la nube. Asumir que estas gotas son como discos de su mismo diámetro, y que el diagrama de difracción de Fraunhofer producido por un disco es igual al diagrama que produce un orificio con el mismo diámetro (esta última condición se conoce como el *principio de Babinet*.) SSM

76 • Se puede obtener una corona similar a los anillos descritos en el problema anterior mediante microesferas de poliestireno puestas en suspensión en el agua. Estas microesferas son pequeñas, uniformes y construidas con plástico cuyo índice de refracción es de 1,59. Si consideramos que el índice de refracción del agua es 1,33, ¿cuál es la abertura angular con la se ve el diámetro de una corona circular, si las partículas de poliestireno son de 5 μm de diámetro y se iluminan con la luz de un láser helio-neón cuya longitud de onda es de 632,8 nm?

77 • Los anillos brillantes del problema 75 pueden formarse mediante granos de polen de abedul o pino. Estos granos son de forma irregular, pero se pueden tratar como si fueran discos cuyo diámetro fuera la dimensión media del grano y cuyo valor puede estimarse que es de 25 μm. ¿Cuál es la abertura angular en radianes de uno de estos anillos que se forman en los granos cuando se iluminan con luz azul? ¿Y cuando se hace lo mismo con luz roja?

78 • Se ilumina con luz de un láser He-Ne (632,8 nm) un cabello humano para intentar medir su grosor mediante el diagrama de difracción que produce. Se coloca el cabello en un dispositivo a 7,5 m de una pared (pantalla) y se obtiene un diagrama de difracción con un máximo central de 14,6 cm de ancho. ¿Cuál es el diámetro del cabello? (El diagrama de difracción de un cabello que tenga un diámetro d es el mismo que el que forma una rendija cuya anchura fuese $a = d$. Véase el principio de Babinet comentado en el problema 75.)

79 • Una rendija larga, estrecha y horizontal está situada a 1 μm por encima de un espejo plano situado en el plano horizontal. El diagrama de interferencias producido por la rendija y su imagen se ven en una pantalla situada a una distancia de 1 m de la rendija. La longitud de onda de la luz es 600 nm. (*a*) Hallar la distancia del espejo al primer máximo. (*b*) ¿Cuántas bandas oscuras por centímetro se ven en la pantalla? SSM

80 • Un radiotelescopio se sitúa al borde de un lago. El telescopio recoge la luz procedente de una galaxia que se empieza a elevar en el horizonte. Si la altura de la antena es de 20 m sobre la superficie del lago, ¿con qué ángulo sobre el horizonte estará el primer máximo del diagrama de interferencia procedente de la luz de la citada galaxia? La longitud de onda de las ondas irradiadas que se reciben en el telescopio es de 20 cm. *Ayuda: recordar que la luz adquiere una diferencia de fase de 180° en la reflexión con el agua.*

81 • El diámetro de la abertura del radiotelescopio de Arecibo, Puerto Rico, es de 300 m. ¿Cuál es el poder de resolución del telescopio cuando se sintoniza para detectar microondas de longitud de onda 3,2 cm?

82 •• Se utiliza una capa muy fina de un material transparente con un índice de refracción de 1,30 como recubrimiento antirreflejante en la superficie de un vidrio de índice de refracción 1,50. ¿Cuál deberá ser el espesor para que la película no refleje la luz de 600 nm de longitud de onda?

83 •• Un *interferómetro Fabry-Perot* (figura 33.47) consta de dos espejos semiplateados paralelos, separados entre sí una pequeña distancia a. Demostrar que cuando la luz incide sobre el interferómetro con un ángulo de incidencia θ, la luz transmitida tendrá una intensidad máxima cuando $2a = m\lambda \cos\theta$. SSM

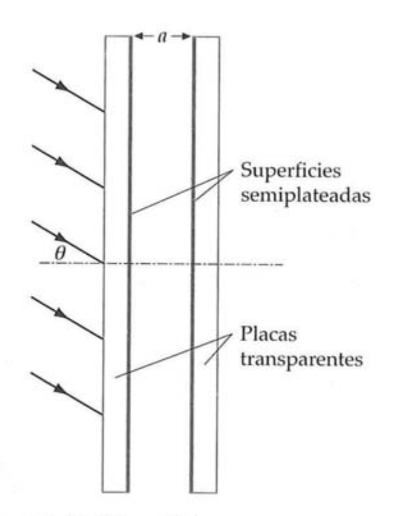


FIGURA 33.47 Problema 83

84 •• Una lámina de mica de 1,2 μm de espesor está suspendida en el aire. En el espectro de luz reflejada en la lámina, se encuentran ventanas del espectro visible a 421, 474, 542 y 633 nm. Calcular el índice de refracción de la mica.

85 •• Una lente de una cámara fotográfica se construye con vidrio de índice de refracción 1,6. Esta lente se recubre con una película de fluoruro magnésico ($n = 1{,}38$) para mejorar su transmisión luminosa. Esta película ha de producir una reflexión cero para la luz de longitud de onda 540 nm. Considerar que la superficie de la lente es un plano liso y que la película tiene un espesor uniforme. (*a*) ¿Cuál deberá ser el espesor mínimo de la película para cumplir su función? (*b*) ¿Existirán interferencias destructivas para otras longitudes de onda visibles? (*c*) ¿En qué factor se reducirá la reflexión en esta película en el caso de longitudes de onda de 400 y 700 nm? Despreciar la variación de las amplitudes de la luz reflejada procedente de las dos superficies. SSM

86 •• En una cámara de orificio pequeño, se obtienen imágenes borrosas debido al tamaño finito del orificio (es decir, debido a los rayos que llegan al punto imagen procedentes de diferentes partes del orificio) y a los fenómenos de difracción. Cuanto más pequeño es el orificio, la imagen es más definida, pero el efecto borroso debido a la difracción se incrementa. El tamaño óptimo de la abertura para la imagen más definida es aquél para el cual la dispersión debida a la difracción iguala a la dispersión debida a los efectos geométricos de orificio. Estimar el tamaño óptimo de la abertura si la distancia desde el orificio a la pantalla es de 10 cm y la longitud de onda de la luz 550 nm.

87 •• El pintor impresionista Georges Seurat utilizaba una técnica denomina *puntillismo*, en la cual sus pinturas estaban compuestas por puntos pequeños cercanos, de color puro, de unos 2 mm de diámetro. La ilusión de la mezcla de colores de forma suave se produce en el ojo del observador debido a efectos de difracción. Calcular la distancia mínima de visión para que este efecto actúe adecuadamente. Utilizar la longitud de onda de la luz visible que requiere la máxima distancia entre manchas, de modo que nos aseguremos que el efecto funciona para todas las longitudes de onda de la luz visible. Suponer que la pupila del ojo tiene un diámetro de 3 mm. SSM

Índice alfabético

La *n* que sigue a algunos números indica que la entrada está en una nota a pie de página.



Constantes físicas*

Constante de masa atómica	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}C)$	$1\ u = 1{,}66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Número de Avogadro	N_A	$6{,}0221415(10) \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K $8{,}617343(15) \times 10^{-5}$ eV/K
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/(2m_e)$	$9{,}27400949(80) \times 10^{-24}$ J/T = $5{,}788381804(39) \times 10^{-5}$ eV/T
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8{,}987551788 \ldots \times 10^{9}\ N \cdot m^2/C^2$
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$2{,}426310238(16) \times 10^{-12}$ m
Carga fundamental	e	$1{,}60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases	R	$8{,}314472(15)$ J/(mol · K) = $1{,}9872065(36)$ cal/(mol · K) = $8{,}205746(15) \times 10^{-2}$ atm · L/(mol · K)
Constante de la gravitación	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
Masa del electrón	m_e	$9{,}1093826(16) \times 10^{-31}$ kg = $0{,}510998918(44)\ MeV/c^2$
Masa del protón	m_p	$1{,}67262171(29) \times 10^{-27}$ kg = $938{,}272029(80)\ MeV/c^2$
Masa del neutrón	m_n	$1{,}67492728(29) \times 10^{-27}$ kg = $939{,}565360(81)\ MeV/c^2$
Constante magnética (permitividad del espacio libre)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2$
Constante eléctrica (permeabilidad del espacio libre)	ϵ_0	$= 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854187817 \ldots \times 10^{-12}\ C^2/(N \cdot m^2)$
Constante de Planck	h	$6{,}6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s = $4{,}13566743(35) \times 10^{-15}$ eV · s
	$\hbar = h/(2\pi)$	$1{,}05457168(18) \times 10^{-34}$ J · s = $6{,}58211915(56) \times 10^{-16}$ eV · s
Velocidad de la luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}670400(40) \times 10^{-8}\ W/(m^2 \cdot K^4)$

* Los valores de estas y otras constantes pueden obtenerse en el Apéndice B y en la dirección de Internet http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html. Los números entre paréntesis representan los errores en las dos últimas cifras. (Por ejemplo, 2,04443(13) significa 2,04443 ± 0,00013.) Los valores sin números entre paréntesis son exactos incluyendo aquellos con puntos suspensivos (como el valor de π que es exactamente 3,1415...).

Derivadas e integrales definidas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax \qquad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \qquad \int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a} \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

En las seis integrales la a es una constante positiva.

Productos vectoriales

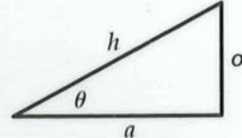
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ $\qquad$ $\vec{A} \times \vec{B} = AB\operatorname{sen}\theta\,\hat{n}$ $\quad$ ($\hat{n}$ obtenida usando la regla de la mano derecha)



Geometría y trigonometría

$C = \pi d = 2\pi r$	definición de π
$A = \pi r^2$	área de un círculo
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	volumen de una esfera
$A = \partial V/\partial r = 4\pi r^2$	área de la superficie esférica
$V = A_{base} L = \pi r^2 L$	volumen de un cilindro
$A = \partial V/\partial r = 2\pi r L$	área de la superficie cilíndrica

$o = h \operatorname{sen}\theta$
$a = h \cos\theta$



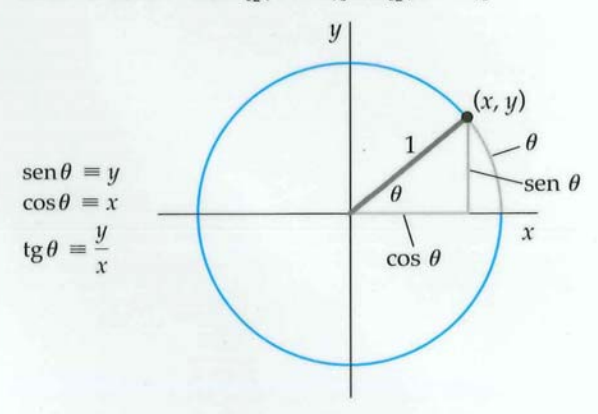
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}[\frac{1}{2}(A \pm B)] \cos[\frac{1}{2}(A \mp B)]$

$\operatorname{sen}\theta \equiv y$
$\cos\theta \equiv x$
$\operatorname{tg}\theta \equiv \frac{y}{x}$



Si $|\theta| << 1$, entonces
$\cos\theta \approx 1$ y $\operatorname{tg}\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (θ en radianes)

La ecuación de segundo grado

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Desarrollo del binomio

Si $|x| < 1$, entonces $(1 + x)^n =$

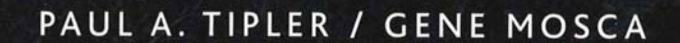
$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Si $|x| << 1$, entonces $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Aproximación diferencial

Si $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$ y si $|\Delta x|$ es pequeño,

entonces $\Delta F \approx \dfrac{dF}{dx}\Delta x$.



Física para la ciencia y la tecnología

6ª edición

Física para la Ciencia y la Tecnología, dada su impecable claridad y precisión, se ha constituido en una referencia obligada de los cursos universitarios de Física de casi todo el mundo. Para realizar esta 6ª edición, Paul A. Tipler y Gene Mosca hicieron una revisión exhaustiva y escrupulosa de todos los contenidos de la edición con el objeto de lograr un manual aún más didáctico y de incorporar los nuevos conceptos de la Física en que se sustentan los recientes avances de la tecnología.

Para facilitar la comprensión de los conceptos físicos descritos, esta edición incorpora una gran variedad de herramientas y recursos pedagógicos nuevos. Entre ellos cabe destacar la novedosa estrategia en la resolución de problemas; los temas de actualidad en física que ayudan a los estudiantes a relacionar lo que aprenden con las tecnologías del mundo real; la inclusión a lo largo de todo el texto de nuevos ejemplos conceptuales; y la mejora del apéndice de matemáticas, ahora mucho más completo e integrado con el texto.

Esta nueva edición incorpora una serie de materiales de apoyo, dirigidos tanto a los alumnos como a los profesores que basen sus cursos de física general en este manual.



EDITORIAL
REVERTÉ

www.reverte.com

